
الجزء الخاص بالشرح
و التمارين
2021
معاك
Ma3ak App
التطبيق التفاعلي
للتعلم عن بُعد
الاستاتيكا
المعاصر
إعداد نخبة من خبراء التعليم
3
ثانوى
HUAWEI Mate 9
LEICA DUAL CAMERA

مراجعة عامة

على ما سبقت دراسته فى الاستـــاتيكـــا

١ محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ قوتين متلاقيتين فى نقطة واحدة محصلتهما $\overrightarrow{\text{ح}}$ وقياس الزاوية بينهما = ى

، قياس زاوية ميل المحصلة $\overrightarrow{\text{ح}}$ على $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ = هـ

فإن : $\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$ ، $\text{ظا هـ} = \dfrac{\text{ق}_2 \text{ جا ى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$

(حيث ق_1 ، ق_2 معيارا القوتين $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ ، ح معيار المحصلة $\overrightarrow{\text{ح}}$)

حالات خاصة :

① إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ فى نفس الاتجاه (ى = صفر)

فإن : $\text{ح} = \text{ق}_1 + \text{ق}_2$

، اتجاه $\overrightarrow{\text{ح}}$ فى نفس اتجاه القوتين

② إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ متضادتين فى الاتجاه (ى = ١٨٠°)

فإن : $\text{ح} = |\text{ق}_1 - \text{ق}_2|$

، اتجاه $\overrightarrow{\text{ح}}$ فى نفس اتجاه القوة الأكبر مقدارًا

③ إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}_1} \perp \overrightarrow{\text{ق}_2}$

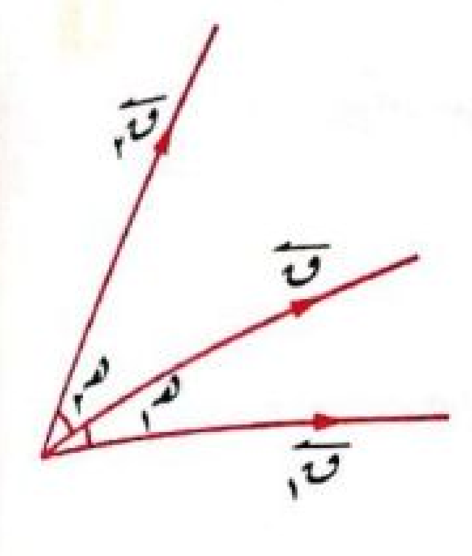
فإن : $\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2}$ ، $\text{ظا هـ} = \dfrac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1}$

④ إذا كانت : $\text{ق}_1 = \text{ق}_2 = \text{ق}$

فإن : $\text{ح} = 2\,\text{ق جتا } \dfrac{\text{ى}}{2}$ ، $\text{هـ} = \dfrac{\text{ى}}{2}$



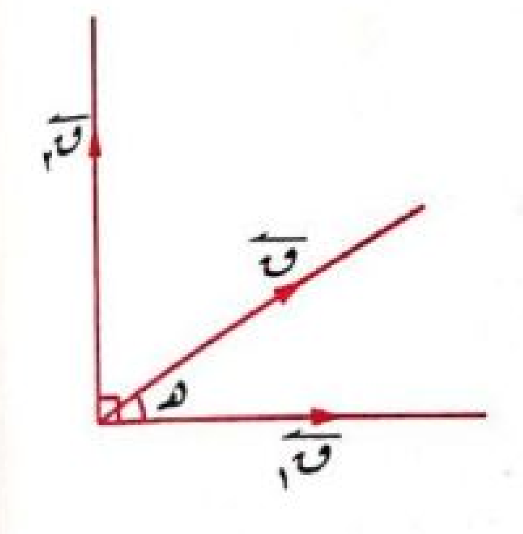
٢ تحليل القوة إلى مركبتين :



① فى اتجاهين معلومين :

إذا كان : $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ هما مركبتا القوة $\overrightarrow{ق}$

فإن : $ق_١ = \frac{ق \, جا \, هـ_٢}{جا \, (هـ_١ + هـ_٢)}$ ، $ق_٢ = \frac{ق \, جا \, هـ_١}{جا \, (هـ_١ + هـ_٢)}$



② فى اتجاهين متعامدين :

إذا كان : $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ هما مركبتا $\overrightarrow{ق}$ بحيث $\overrightarrow{ق_١} \perp \overrightarrow{ق_٢}$

فإن : $ق_١ = ق \, جتا \, هـ$ ، $ق_٢ = ق \, جا \, هـ$

٣ محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة :

إذا كانت : $هـ_١$ ، $هـ_٢$ ، ..... ، $هـ_ن$ هى قياسات الزوايا القطبية التى تصنعها القوى

$\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، ..... ، $\overrightarrow{ق_ن}$ مع $\overrightarrow{و س}$

فإن : س (المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overrightarrow{و س}$)

$= ق_١ \, جتا \, هـ_١ + ق_٢ \, جتا \, هـ_٢ + ... + ق_ن \, جتا \, هـ_ن$

، ص (المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overrightarrow{و ص}$)

$= ق_١ \, جا \, هـ_١ + ق_٢ \, جا \, هـ_٢ + ... + ق_ن \, جا \, هـ_ن$

ويكون : $ح = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

، $ظا \, هـ = \frac{ص}{س}$ حيث هـ زاوية ميل $\overrightarrow{ح}$ على $\overrightarrow{و س}$

٤ الاتــــزان :

(١) إذا اتزن جسم تحت تأثير قوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ فإن : $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ متساويتان فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه وخط عملهما على استقامة واحدة.

(٢) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ فإن :

(١) إذا تلاقى خطا عمل قوتين منها فى نقطة فإن خط عمل القوة الثالثة لابد أن يمر بهذه النقطة.

(٢) إذا رسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى الثلاثة وفى اتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاعه تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.

أى : $\frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{ب ح} = \frac{ق_3}{ح أ}$ (قاعدة مثلث القوى)

(٣) مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين

أى : $\frac{ق_1}{جا هـ_1} = \frac{ق_2}{جا هـ_2} = \frac{ق_3}{جا هـ_3}$ (قاعدة لامى)

(٣) يتزن الجسم تحت تأثير عدة قوى متلاقية فى نقطة واحدة إذا كان :

المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه ما = صفر

والمجموع الجبرى لمركبات القوى فى الاتجاه العمودى عليه = صفر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمـــاريـــن تراكمية
على ما سبقت دراسته فى الاستـــاتيكـــا (من الكتاب المدرسى)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت قوتان مقداراهما ٤ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

فإن مقدار محصلتهما يساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ٤ (جـ) ٤ $\sqrt{٣}$ (د) -٨ $\sqrt{٣}$

② إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة فإن قياس الزاوية

بين أى قوتين فيها يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) -٩٠° (د) ١٢٠°

---

٢ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٤ ، ٥ ، ٦ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، فإذا كانت المجموعة متزنة. فما قياس الزاوية بين القوتين الأخيرتين ؟

---

٣ أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ ث.جم حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط.

أوجد مقدار القوة ومقدار الشد فى الخيط.

---

٤ عُلق ثقل وزنه ٢٦ نيوتن بخيطين طولاهما ٢٥ سم ، ٦٠ سم ، وثبت الطرفان الآخران للخيطين فى نقطتين من خط أفقى ، البُعد بينهما ٦٥ سم. أوجد الشد فى كل من الخيطين.

---

٥ عُلق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين يميلان على الرأسى بزاويتين قياساهما هـ° ، ٣٠° فاتزن الجسم عندما كان الشد فى الخيط الأول ١٢ نيوتن والشد فى الخيط الثانى ٩ نيوتن. أوجد قيمة الوزن (و) وقياس الزاوية هـ

---

٦ كرة مصمتة منتظمة وزنها ٣٠ ث.جم تستند بسطحها على مستويين ، فإذا كانت الكرة فى حالة اتزان بين مستويين أملسين أحدهما رأسى ، والآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠° أوجد مقدارى قوتى الضغط على كل من المستويين.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٧ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ٢٠ نيوتن (يؤثر فى منتصفه) ، عُلق القضيب من طرفيه بخيطين خفيفين ، ثبت طرفاهما من نقطة فى سقف حجرة. إذا كان الخيطان متعامدين وطول أحدهما ٦٠ سم ، فأوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين عندما يكون القضيب مُعلقًا تعليقًا حرًا وفى حالة توازن.

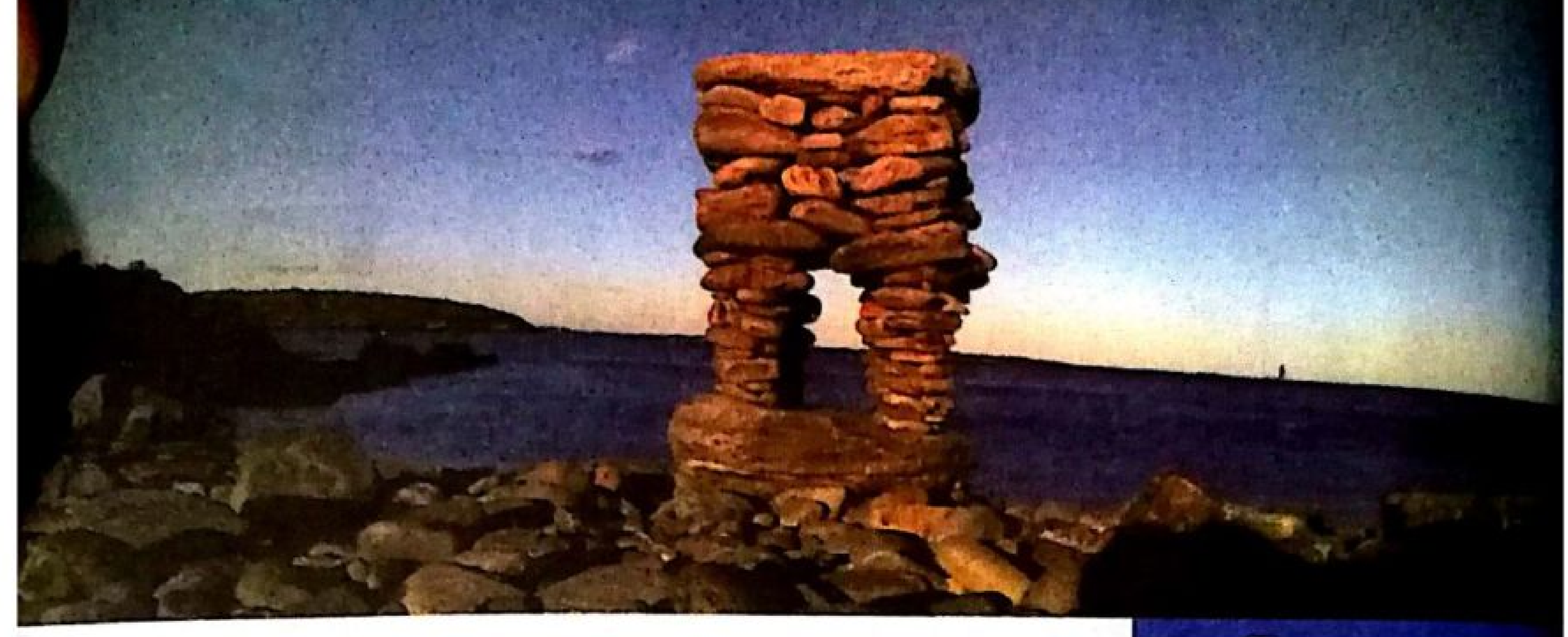
---

٨ $\overline{أب}$ قضيب منتظم (وزنه يؤثر فى منتصفه) مثبت بطرفه أ فى حائط رأسى بواسطة مفصل ، جذب القضيب أفقيًا بقوة مقدارها ق ث.كجم من طرفه ب حتى اتزن القضيب فى وضع يصنع فيه زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى. أوجد ق ، ورد فعل المفصل.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الدرس 1

مفهوم الاحتكاك
- اتزان جسم على مستوٍ أفقى خشن

مفهوم الاحتكاك

لقوى الاحتكاك أهمية كبيرة فى حياتنا العملية. فلولاها لما استطاع الإنسان السير دون أن تنزلق قدماه ولا استطاع الجسم المتحرك التوقف عن الحركة عند الحاجة إلى ذلك. ولذلك قد لا نبالغ إذا اعتبرنا أن قوى الاحتكاك سر من أسرار الكون ونظرًا لوجود نتواءت وتجويفات على سطوح كل الأجسام مهما بلغت درجة نعومتها تنشأ قوى الاحتكاك نتيجة تداخل هذه النتواءت والتجويفات لكل من السطحين المتلامسين ويعتبر معامل الاحتكاك مقياسًا لدرجة خشونة الأسطح فإذا ازدادت قيمة معامل الاحتكاك ازدادت الخشونة

وإذا كان معامل الاحتكاك = صفر فإن قوى الاحتكاك تنعدم تمامًا وفيما يلى سوف نستعرض بعض التعاريف التى سوف تساعدنا على التعرف على مفهوم الاحتكاك.

السطح الأملس والسطح الخشن

* **السطح الأملس :**

هو سطح افتراضى تنعدم فيه قوى الاحتكاك تمامًا.

* **السطح الخشن :**

هو سطح تظهر فيه قوى الاحتكاك عند محاولة تحريك جسم عليه.

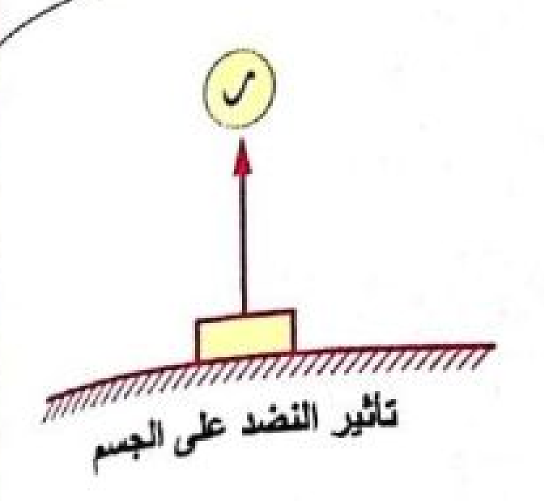
لاحظ أن

(١) معامل احتكاك السطح الأملس = صفر

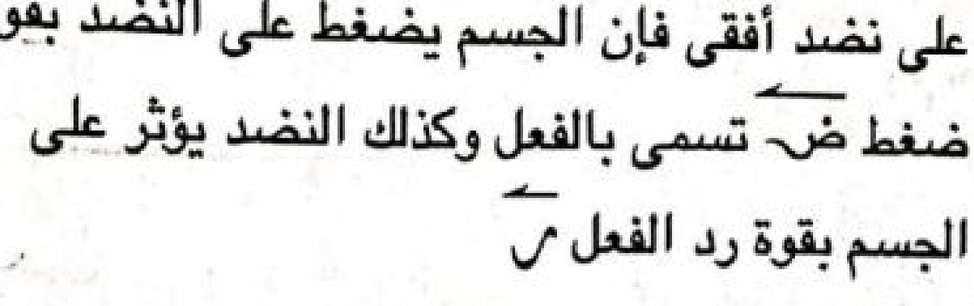
(٢) معامل احتكاك السطح الخشن = عدد حقيقى > ٠ (أى عدد حقيقى موجب)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

رد الفعل



هو قوة تنشأ من تلامس سطحين فإذا وضعنا جسمًا على نضد أفقى فإن الجسم يضغط على النضد بقوة ضغط ض تسمى بالفعل وكذلك النضد يؤثر على الجسم بقوة رد الفعل ر



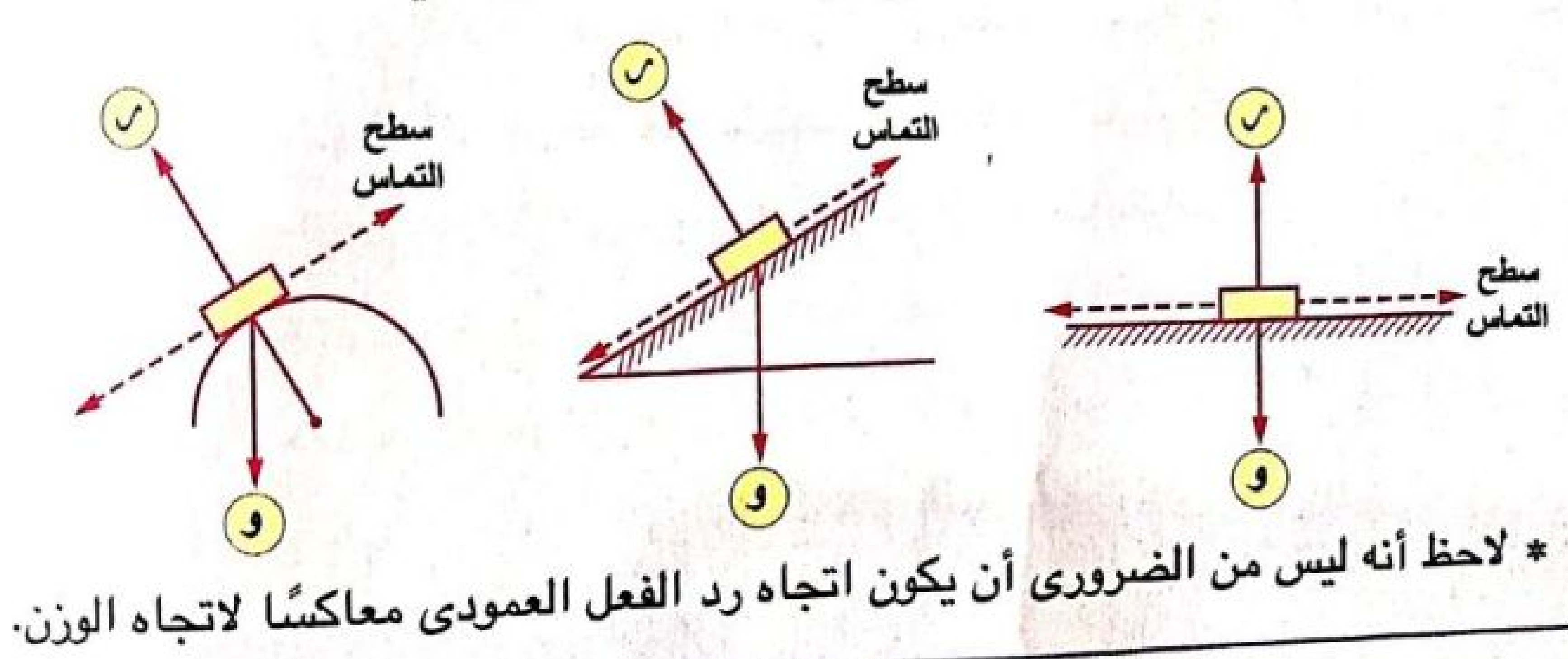


مع ملاحظة أن :

القوتان ر ، ض لا تؤثران فى نفس الجسم بل إحداهما وهى قوة الضغط ض تؤثر فى النضد بينما قوة رد الفعل ر تؤثر فى الجسم. وطبقًا للقانون الثالث لنيوتن نجد أن : ر = ض

ملاحظة

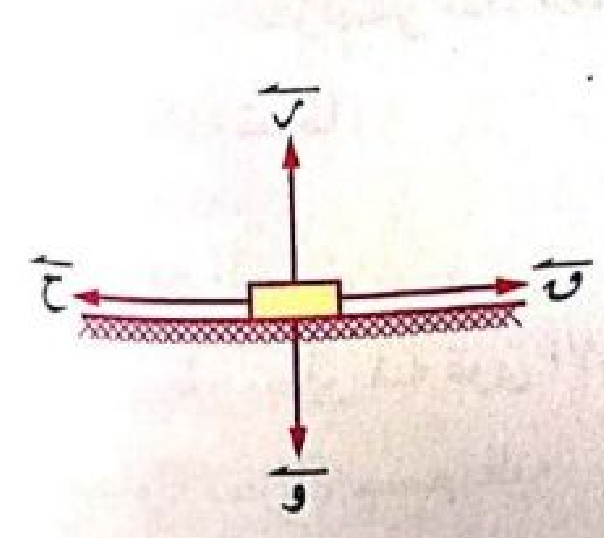
رد الفعل فى حالة السطوح الملساء يكون عموديًا على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين ويسمى (رد الفعل العمودى) ويأخذ أحد الأشكال الآتية :



* لاحظ أنه ليس من الضرورى أن يكون اتجاه رد الفعل العمودى معاكسًا لاتجاه الوزن.

قوة الاحتكاك السكونى

إذا وضعنا جسمًا مقدار وزنه و على مستوى أفقى خشن وأثرنا على الجسم بقوة أفقية صغيرة ق فإنه يظهر تأثير قوة خفية تقاوم حركة الجسم تسمى قوة الاحتكاك ويرمز لها بالرمز ح تعمل فى اتجاه مضاد للقوة ق فإذا لم يكن مقدار القوة ق كافيًا لتحريك الجسم فإن الجسم فى هذه الحالة يكون متزنًا تحت تأثير :



(١) قوة الوزن و وقوة رد الفعل العمودى ر حيث و = ر

(٢) القوة الأفقية ق ، وقوة الاحتكاك ح حيث ق = ح

ومن ذلك يمكن أن نستنتج أن :

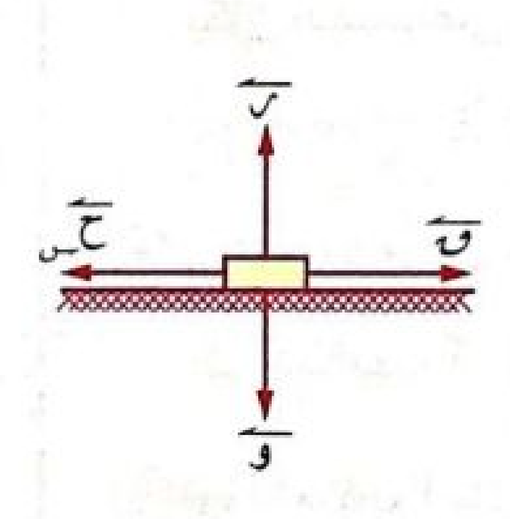
قوة الاحتكاك السكونى

هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن.

ملاحظة

إذا وضعنا جسمًا أملس على مستوى أفقى أملس فإن الجسم يكون متزنًا تحت تأثير قوتين وهما قوة وزن الجسم و وقوة رد الفعل العمودى ر فإذا أثرنا على الجسم بقوة أفقية ق فإن الجسم فى هذه الحالة لا يمكن أن يتزن مهما كانت هذه القوة صغيرة فى المقدار وذلك لعدم ظهور القوة المضادة للقوة ق التى تعمل على اتزان الجسم وهى قوة الاحتكاك ح وهذا يعنى أن قوة الاحتكاك لا تظهر إلا عند محاولة تحريك الجسم على سطح خشن.

قوة الاحتكاك السكونى النهائى



يزداد مقدار قوة الاحتكاك السكونى «ح» كلما زاد مقدار القوة الأفقية «ق» المؤثرة على جسم موضوع على مستوى أفقى خشن إلى أن يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى نهايته العظمى «قيمة لا يمكن أن يتعداها» حين يصبح الجسم على وشك الحركة وفى هذه الحالة يُقال أن الاحتكاك أصبح نهائيًا ويرمز له بالرمز $ح_س$ وتكون معادلتا اتزان الجسم هما : $ق = ح_س$ ، $ر = و$

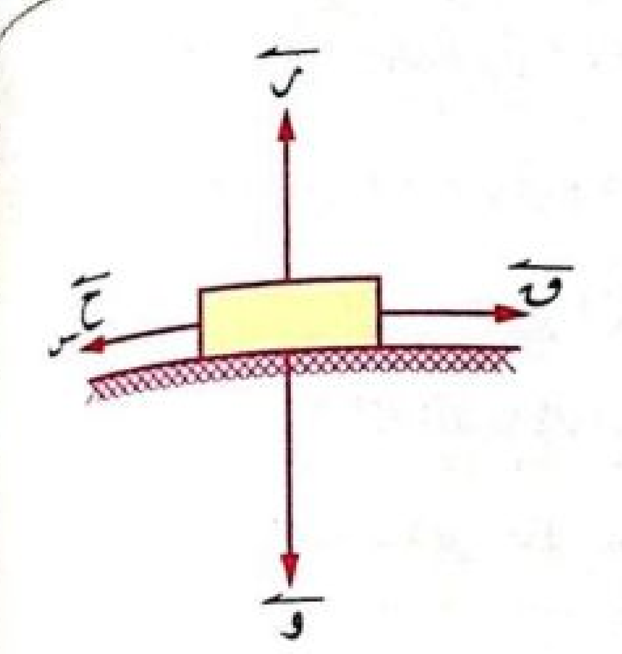
ونستنتج من ذلك أن :

قوة الاحتكاك السكونى النهائى

هى قوة الاحتكاك عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته النهائية (العظمى) والتى عندها يكون الجسم على وشك الحركة ويرمز لها بالرمز $ح_س$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معامل الاحتكاك السكونى



تسمى النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك السكونى النهائى ($ح_س$) ورد الفعل العمودى ($ر$) بمعامل الاحتكاك بين السطحين المتلامسين ويرمز له بالرمز $م_س$

أى أن : $م_س = \frac{ح_س}{ر}$ ومنها $ح_س = م_س ر$

قوة الاحتكاك الحركى

إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركى ($ح_ك$) فى اتجاه مضاد لاتجاه الحركة ويكون $ح_ك = م_ك ر$

حيث $م_ك$ معامل الاحتكاك الحركى ، $ر$ رد الفعل العمودى ومنها يمكن تعريف معامل الاحتكاك الحركى على أنه النسبة بين قوة الاحتكاك الحركى وقوة رد الفعل العمودى.

ملاحظات

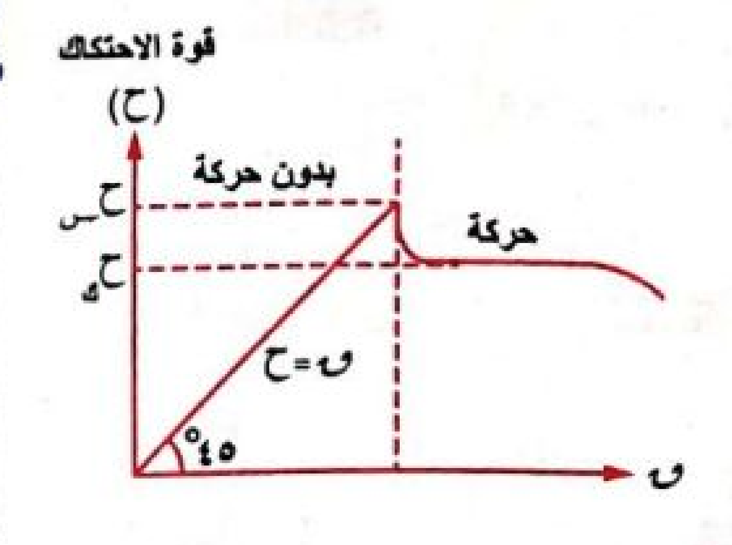
① المتساوية : $ح_س = م_س ر$ تتحقق فقط عند الاحتكاك السكونى النهائى أى عندما يكون الجسم على وشك الحركة وهى أقصى قيمة لقوة الاحتكاك السكونى ح

أى أن : $0 \leq ح \leq م_س ر$

② معاملا الاحتكاك $م_س$ ، $م_ك$ يعتمدان على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما أو كتلتيهما أو مساحة السطوح المتماسة.

③ قوة الاحتكاك النهائى للأجسام الساكنة ($ح_س$) > قوة الاحتكاك للأجسام المتحركة ($ح_ك$) وبالتالى معامل الاحتكاك السكونى ($م_س$) > معامل الاحتكاك الحركى ($م_ك$) وهذا شئ نلاحظه فى حياتنا العملية حيث يحتاج الشخص إلى قوة كبيرة فى بداية الأمر لتحريك صندوق خشبى على الأرض ولكن بعد أن يتحرك الصندوق نلاحظ أن القوة اللازمة أصبحت أقل من ذى قبل وهذا لأن الجسم أصبح متحركًا وبالتالى فإن قوة الاحتكاك تصبح أقل.

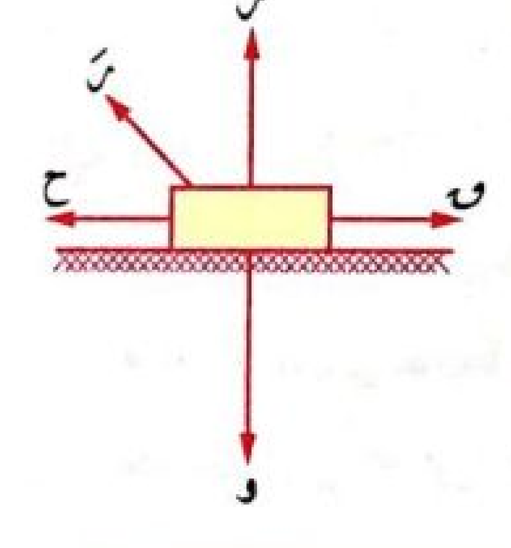
ومن الشكل المقابل نستنتج أن :



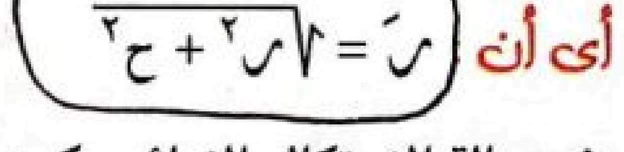
قوة الاحتكاك تزداد تدريجيًا بزيادة القوة المماسية الموازية للمستوى المؤثرة على الجسم حتى تصل إلى حد لا تتعداه (الاحتكاك السكونى النهائى) وذلك عندما يكون الجسم على وشك الحركة ويسمى عندها الاحتكاك السكونى النهائى ($ح_{س}$)

وله معامل احتكاك سكونى ($م_{س}$) ثم يقل كما بالشكل فى حالة الحركة ويكون احتكاك حركى ($ح_{ل}$) وله معامل احتكاك حركى ($م_{ل}$) ثم بعد ذلك يقل أكثر فى حالة السرعات الكبيرة.

رد الفعل المحصل



يرمز لرد الفعل المحصل (رد الفعل الكلى) بالرمز $\overleftarrow{ر}$ وهو محصلة رد الفعل العمودى $\overleftarrow{ر}$ وقوة الاحتكاك $\overleftarrow{ح}$

أى أن 

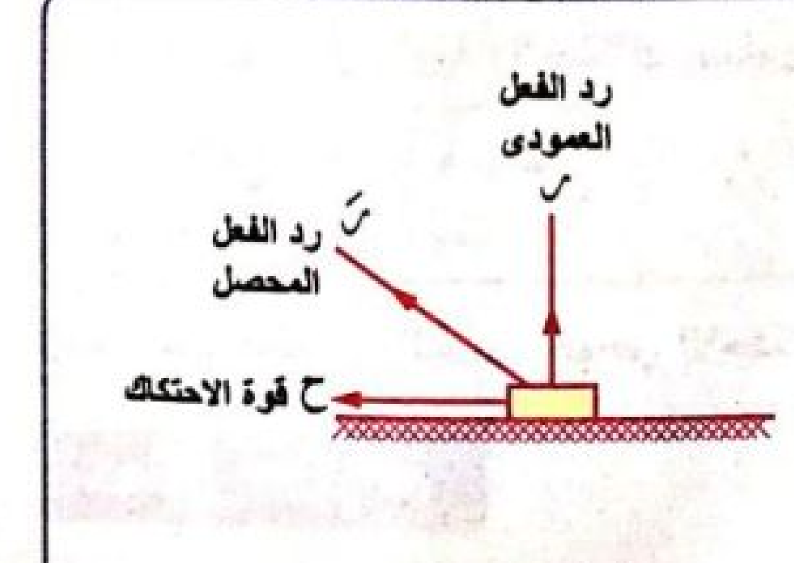
$$\bar{ر} = \sqrt{ر^{2} + ح^{2}}$$

وفى حالة الاحتكاك النهائى يكون : $\bar{ر} = \sqrt{ر^{2} + ح_{س}^{2}}$

، $\because ح_{س} = م_{س}\, ر$ $\quad \therefore \bar{ر} = \sqrt{ر^{2} + م_{س}^{2}\, ر^{2}}$

$$\therefore \bar{ر} = ر\sqrt{1 + م_{س}^{2}}$$

ملاحظة

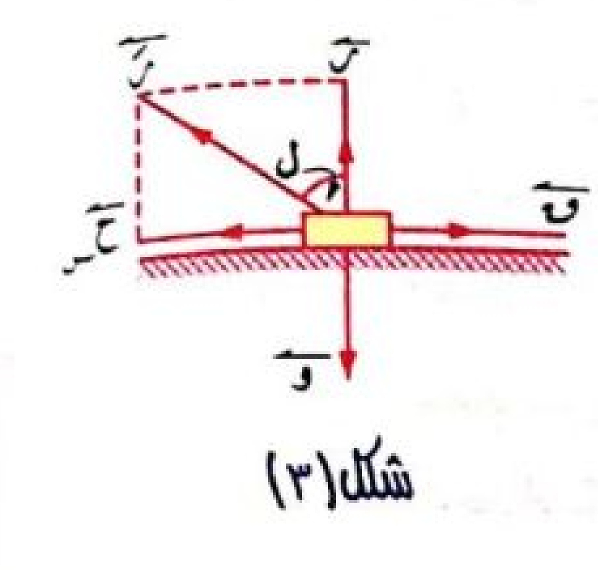


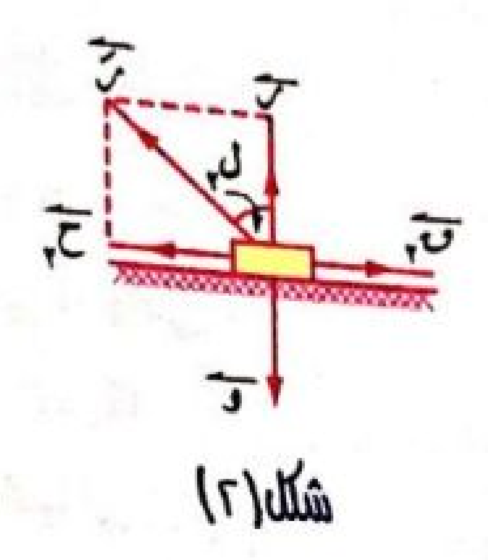
رد الفعل فى حالة السطوح الخشنة يكون غير معلوم الاتجاه ويسمى (رد الفعل المحصل) أو (رد الفعل الكلى) ويمكن تحليله إلى مركبتين متعامدتين المركبة العمودية على سطح التماس وتسمى بقوة رد الفعل العمودى (ر) ، المركبة الموازية لسطح التماس وتسمى بقوة الاحتكاك (ح)

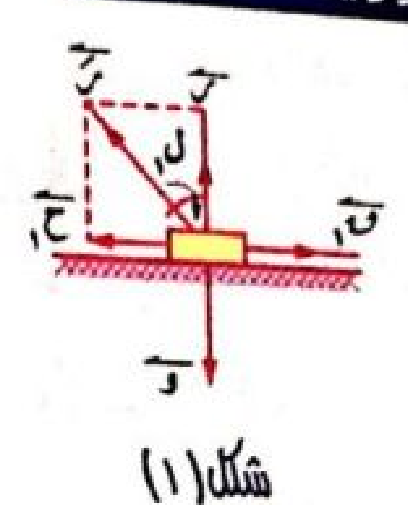


الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

زاوية الاحتكاك


شكل(٣)


شكل(٢)


شكل(١)

ليكن ر َ مقدار رد الفعل المحصل ، ل، قياس الزاوية المحصورة بين هذه القوة وقوة رد الفعل العمودى (شكل ١) وكلما تزايد مقدار قوة الاحتكاك فإن قياس الزاوية يزداد تبعًا لذلك وليكن ل٢ (شكل ٢) وعندما تصل قوة الاحتكاك إلى نهايتها العظمى ح س فإن قياس الزاوية هذا يصل إلى نهايته العظمى وليكن ل وتسمى ل فى هذه الحالة بقياس زاوية الاحتكاك (شكل ٣)

أى أن :

زاوية الاحتكاك

هى الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل المحصل وقوة رد الفعل العمودى عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته العظمى ح س = م س ر ويرمز لقياس زاوية الاحتكاك بالرمز (ل)

(قوة رد الفعل المحصل)

(قوة رد الفعل العمودى)

ويكون : $\text{ظا ل} = \frac{\text{ح}_\text{س}}{\text{ر}}$ ولكن : $\frac{\text{ح}_\text{س}}{\text{ر}} = \text{م}_\text{س}$

$\therefore \text{م}_\text{س} = \text{ظا ل}$

أى أن : ظل زاوية الاحتكاك يساوى معامل الاحتكاك.

$\because \text{ر}' = \text{ر}\sqrt{1 + \text{م}_\text{س}^2}$ ، $\therefore \text{ر}' = \text{ر}\sqrt{1 + \text{ظا}^2\text{ ل}} = \text{ر}\sqrt{\text{قا}^2(\text{ل})} = \text{ر قا (ل)}$

ومما سبق يمكن أن نلخص خواص الاحتكاك كما يلى :

خواص الاحتكاك

(١) قوة الاحتكاك عبارة عن قوة خفية تعمل على معاكسة حركة الجسم.

(٢) قوة الاحتكاك تكون دائمًا فى اتجاه مضاد للاتجاه المحتمل لحركة الجسم.

(٣) مقدار قوة الاحتكاك يزداد تدريجيًا كلما ازدادت القوة المماسية ويكون مساويًا لمقدار هذه القوة المماسية طالما كان الجسم متزنًا إلى أن يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى حدٍ لا يتعدّاه وعندئذٍ يصبح الجسم على وشك الحركة أو فى نهاية اتزانه ويسمى الاحتكاك فى هذه الحالة بالاحتكاك السكونى النهائى ويرمز له بالرمز ح ـس

(٤) إذا زاد مقدار القوة المماسية بعد ذلك فإن الجسم يتحرك على المستوى.

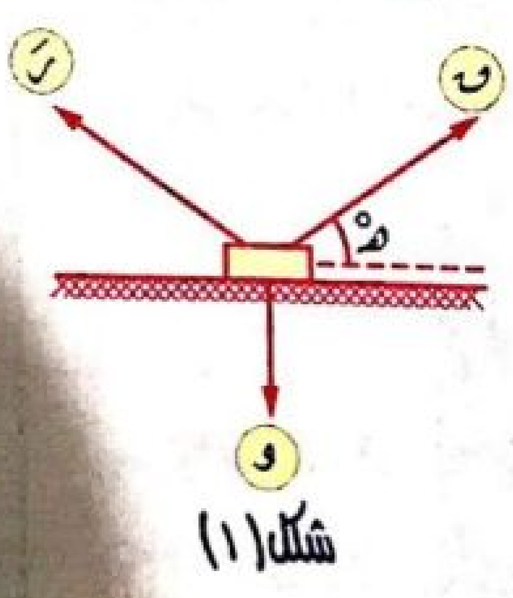
(٥) النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك السكونى النهائى (ح ـس) ، رد الفعل العمودى (ر) نسبة ثابتة تتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما أو كتلتيهما وتسمى هذه النسبة بمعامل الاحتكاك السكونى (م ـس)

ملاحظة

عند وضع جسمان مصنوعان من نفس المادة وغير متساويين فى الوزن على مستوى أفقى خشن واحد يكون لهما نفس معامل الاحتكاك أما قوة الاحتكاك السكونى النهائى لكل جسم تتغير حسب وزنه.

اتزان جسم على مستوى أفقى خشن

إذا وضع جسم مقدار وزنه (و) على مستوى أفقى خشن وأثرت عليه قوة مقدارها ق تميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها هـ° فإن الجسم فى وضع الاتزان يكون متزنًا تحت تأثير ثلاث قوى هى :



شكل (١)

(١) قوة الوزن و رأسيًا لأسفل ومقدارها و

(٢) قوة رد الفعل المحصل ر َ ومقدارها ر َ

(٣) القوة ق ومقدارها ق كما بالشكل (١)

وبتحليل القوة ق إلى مركبتين فى الاتجاه الأفقى والاتجاه العمودى عليه فيكون مقداراهما ق جتا هـ ، ق جا هـ

وبتحليل قوة رد الفعل المحصل ر َ إلى مركبتين متعامدتين

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

هما رد الفعل العمودى $\overrightarrow{ر}$ ومقداره ر ، وقوة الاحتكاك $\overrightarrow{ح}$

ومقداره ح كما بالشكل (٢) فتكون معادلتا اتزان الجسم هما :

ح = ق جتا هـ (١)

، ر + ق جا هـ = و (٢)

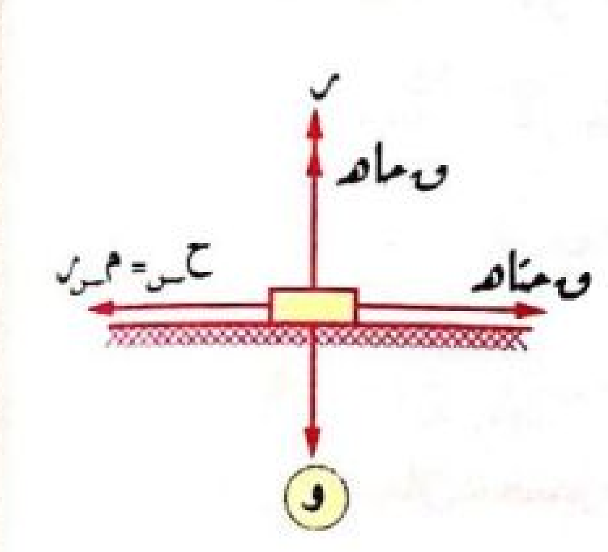
شكل (٢)

* إذا كان الجسم على وشك الحركة فإن الاحتكاك يصبح نهائيًا

أى : ح = $ح_{س}$ ومن الاتزان : يكون $ح_{س}$ = ق جتا هـ

، ∵ $ح_{س}$ = $م_{س}$ ر

∴ معادلتا الاتزان للجسم هما :



$م_{س}$ ر = ق جتا هـ (١) ، ر + ق جا هـ = و (٢)

ملاحظات

① إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ المؤثرة على الجسم أفقية والجسم متزن فإن هـ = ٠

أى : ق جا هـ = ٠ ، ق جتا هـ = ق

ويكون معادلتا الاتزان هما :

ح = ق (١) ، ر = و (٢)

وفى حالة الاحتكاك النهائى

فإن : ق = $ح_{س}$ = ر طا ل ، ر = و

∴ ق = و طا ل وهى القوة الأفقية التى تجعل الجسم على وشك الحركة.

وهى أكبر قوة أفقية تحافظ على توازن الجسم.

② إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أفقى خشن ولم تؤثر عليه أى قوة فإن قوة الاحتكاك فى هذه الحالة تساوى صفر.

مثال ١

وضع جسم وزنه ١٥ ثقل كجم على مستوٍ أفقى خشن وأثرت فى الجسم قوة أفقية مقدارها ٥ ثقل كجم جعلت الجسم على وشك الحركة.

(١) أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى.

(٢) إذا وضع فوق الجسم صنج وزنها ٣ ثقل كجم فأوجد مقدار القوة الأفقية التى تؤثر فى الجسم وما عليه من صنج كى يصبح على وشك الحركة.

الحـــل

(١) ∵ الجسم على وشك الحركة

∴ الاحتكاك نهائى ومقداره = م س ر

∴ معادلتا اتزان الجسم هما :

م س ر = ٥ (١) ، ر = ١٥ (٢)

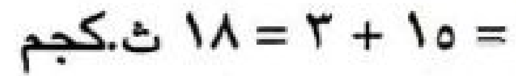
وبالتعويض من (٢) فى (١) :




∴ م س × ١٥ = ٥ ∴ م س = $\frac{1}{3}$

∴ معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = $\frac{1}{3}$

(٢) مقدار وزن الجسم وما عليه من صنج



= ١٥ + ٣ = ١٨ ث.كجم

ويفرض أن مقدار القوة الأفقية التى تجعل الجسم وما عليه من صنج على وشك الحركة = ق ث.كجم

∴ معادلتا الاتزان هما : ق = $\frac{1}{3}$ ر (١) ، ر = ١٨ (٢)

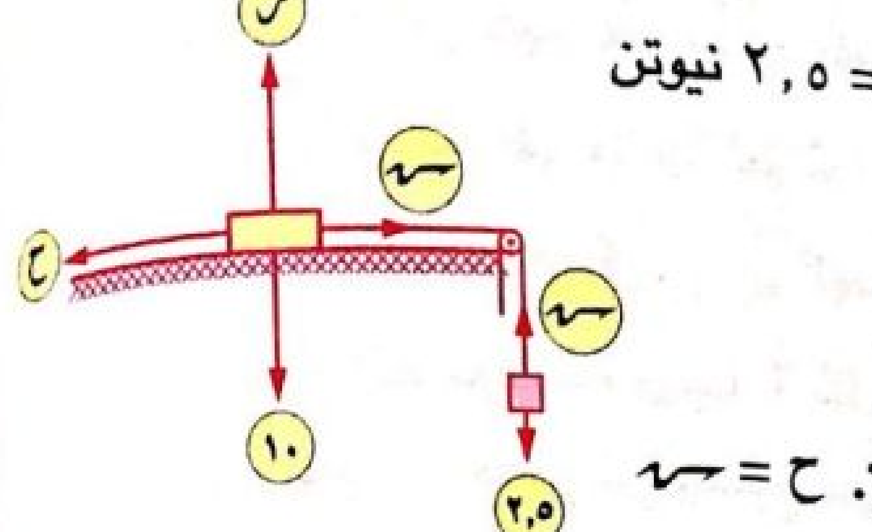
بالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ ق = $\frac{1}{3}$ × ١٨ = ٦ ث.كجم

مثال ٢

وضعت كتلة خشبية وزنها ١٠ نيوتن على نضد أفقى وربطت بخيط أفقى يمر على بكرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ٢,٥ نيوتن. فإذا كانت الكتلة الخشبية متزنة على النضد فعيِّن مقدار قوة الاحتكاك وقوة رد الفعل العمودى وإذا علم أن معامل الاحتكاك السكونى بين الكتلة الخشبية والنضد يساوى $\frac{1}{2}$ فهل تكون الكتلة الخشبية على وشك الحركة أم لا ؟

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحــل



• الجسم المعلق متزن تحت تأثير قوتين وزنه (و) = ٢,٥ نيوتن

والشد فى الخيط (شـ)

أى أن : شـ = ٢,٥ نيوتن

• ∵ الكتلة الخشبية على النضد متزنة ∴ ح = شـ

∴ ح = ٢,٥ نيوتن ، ر = ١٠ نيوتن

تكون الكتلة الخشبية على وشك الحركة عندما يصل مقدار الاحتكاك ح إلى قيمته العظمى

$ح_س$ = $م_س$ ر أى يصبح الاحتكاك نهائى

، ∵ $ح_س$ = $\frac{1}{3}$ × ١٠ = ٣ $\frac{1}{3}$ نيوتن ، ح = ٢,٥ نيوتن ∴ ح < $ح_س$

∴ الاحتكاك غير نهائى ∴ الكتلة الخشبية لا تكون على وشك الحركة.

مثال ❸

وضع جسم وزنه ١٥ ثقل كجم على مستوٍ أفقى خشن فإذا كان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ٣٠° **فأوجد :**

① القوة الأفقية التى تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة.

② القوة التى تميل على المستوى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° وتجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى أيضًا.

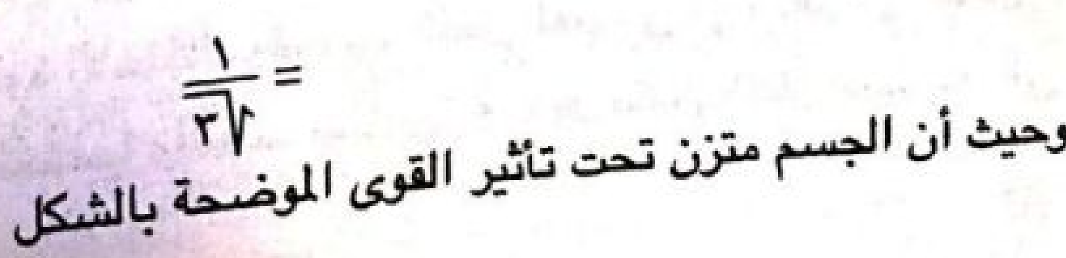
الحــل

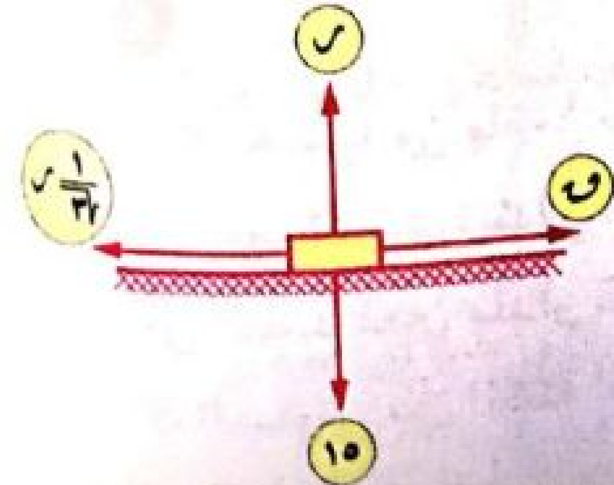
① **إذا كانت القوة أفقية :**

∵ الجسم على وشك الحركة على المستوى

∴ $م_س$ (معامل الاحتكاك السكونى) = ظا ل = ظا ٣٠°

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$





وحيث أن الجسم متزن تحت تأثير القوى الموضحة بالشكل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ معادلتا الاتزان هما :

$ق = \frac{1}{\sqrt{3}} ر$ (١) ، $ر = ١٥$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ $ق = \frac{١٥}{\sqrt{٣}} = ٥\sqrt{٣}$ ثقل كجم

∴ القوة الأفقية التى تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة هى $٥\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

(٢) إذا كانت القوة مائلة على الأفقى :

بتحليل القوة $\overleftarrow{ق}$ إلى مركبتين مقداراهما : ق جتا ٣٠°

، ق جا ٣٠° فى الاتجاه الأفقى والاتجاه العمودى عليه

∴ معادلتا الاتزان هما : ق جتا ٣٠° $= \frac{1}{\sqrt{3}} ر$

∴ $ر = \frac{٣}{٢} ق$ (١)

، ر + ق جا ٣٠° = ١٥ ∴ $ر + \frac{١}{٢} ق = ١٥$ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) : ∴ $\frac{٣}{٢} ق + \frac{١}{٢} ق = ١٥$ ∴ ق = ٧,٥ ثقل كجم

تذكر أن :

إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتين متلاقيتين فى نقطة وكان

قياس الزاوية بين اتجاهى القوتين يساوى ى°

فإن مقدار محصلة القوتين $ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى}$

، $ظا هـ = \frac{ق_٢ جا ى}{ق_١ + ق_٢ جتا ى}$

حيث هـ قياس زاوية ميل المحصلة $\overleftarrow{ح}$ على القوة الأولى $\overleftarrow{ق_١}$

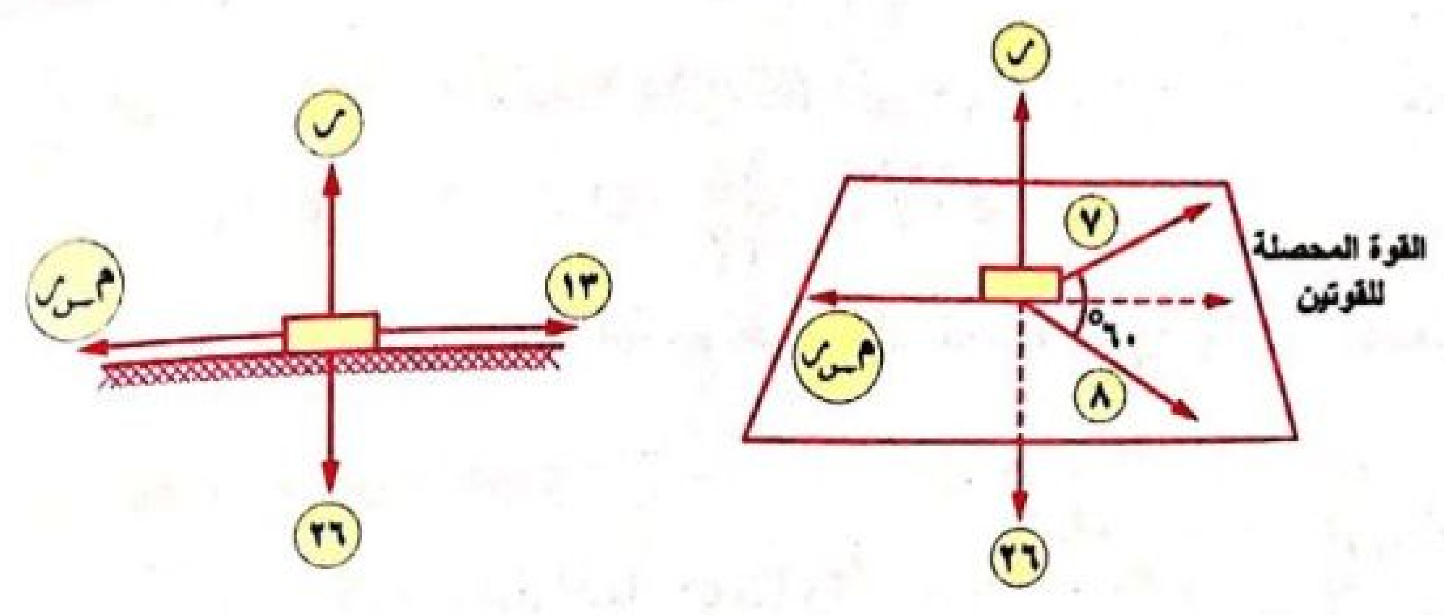
مثال ٤

وضع جسم وزنه ٢٦ نيوتن على مستوٍ أفقى خشن وأثرت على الجسم قوتان مقداراهما ٧ ، ٨ نيوتن يحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° وكانت القوتان أفقيتين وواقعتين فى نفس المستوى الأفقى مع الجسم فإذا أصبح الجسم على وشك الحركة **فأوجد :**

(١) قياس زاوية الاحتكاك. (٢) رد الفعل المحصل.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل



الجسم على وشك الحركة تحت تأثير محصلة القوتين اللتين مقداراهما ٧ ، ٨ نيوتن

ومقدار هذه المحصلة يعادل مقدار قوة الاحتكاك النهائى $ح_س = م_س ر$

وحيث أن مقدار المحصلة = $\sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى}$

∴ مقدار محصلة القوتين = $\sqrt{٤٩ + ٦٤ + ٢ × ٧ × ٨ × \frac{١}{٢}}$ (حيث جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$)

∴ مقدار محصلة القوتين = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ نيوتن

، ∵ الجسم فى حالة اتزان نهائى

∴ معادلتا الاتزان هما : $م_س ر = ١٣$ (١) ، $ر = ٢٦$ (٢)

وبقسمة (١) على (٢) : ∴ $م_س = \frac{١}{٢}$

ولكن معامل الاحتكاك السكونى = ظل زاوية الاحتكاك = طا ل ∴ طا ل = $\frac{١}{٢}$

∴ قياس زاوية الاحتكاك ل = ٢٦° ٣٤َ

، ∵ رد الفعل المحصل $(\bar{ر}) = \sqrt{ر^٢ + (م_س ر)^٢} = \sqrt{ر^٢ + م_س^٢ ر^٢}$

$= \sqrt{ر^٢ (١ + م_س^٢)} = ر \sqrt{١ + م_س^٢}$

∴ $\bar{ر} = ٢٦ \sqrt{١ + \frac{١}{٤}} = ٢٦ \sqrt{\frac{٥}{٤}} = ١٣ \sqrt{٥}$ نيوتن

مثال ٥

وضع جسم مقدار وزنه ٢ نيوتن على مستوٍ أفقى خشن وأثرت على الجسم فى نفس المستوى قوتان مقداراهما $٢\sqrt{٣}$ ، ٤ نيوتن تحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠° فظل الجسم ساكناً أثبت أن قياس زاوية الاحتكاك (ل) بين الجسم والمستوى يجب ألا يقل عن ٤٥° وإذا كان

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ل = ٦٠° وبقى اتجاه كل من القوتين ثابتًا كما بقيت القوة ٢ $\sqrt{٣}$ دون تغيير فعِّين مقدار القوة الأخرى غير المنعدمة لكى يصبح الجسم على وشك الحركة وعيِّن أيضًا الاتجاه الذى يوشك الجسم أن يبدأ الحركة فيه.

الحـــل



∵ مقدار محصلة القوتين اللتين مقداراهما ٤ ، ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن

$= \sqrt{(ق_١)^٢ + (ق_٢)^٢ + ٢\, ق_١\, ق_٢\, جتا\, ى}$

$= \sqrt{(٤)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢ + ٢ \times ٤ \times ٢\sqrt{٣}\ جتا\ ١٥٠°}$

$= \sqrt{١٦ + ١٢ - ٢٤} = \sqrt{٤} = ٢$ نيوتن

، ∵ الجسم متزن تحت تأثير

(١) قوة الاحتكاك ومقدارها ح ومحصلة القوتين ٤ ، ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن ومقدارها ٢ نيوتن

∴ ح = ٢ نيوتن

(٢) قوة رد الفعل العمودى ومقدارها ر ، وزن الجسم ومقداره ٢ نيوتن

∴ ر = ٢ نيوتن

، ∵ الجسم ساكن

∴ ح ≤ $ح_س$ ∴ ح ≤ $م_س$ ر

∴ ٢ ≤ ٢ $م_س$ ∴ ١ ≤ $م_س$

، ∵ $م_س$ = طا ل   ∴ ١ ≤ طا ل

∴ ل ≥ ٤٥°   ∴ قياس زاوية الاحتكاك ل يجب ألا يقل عن ٤٥°

وعندما : ل = ٦٠°   ∴ $م_س$ = طا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

وبفرض أن مقدار القوة الأخرى لكى يصبح الجسم على وشك الحركة = ق

∴ مقدار محصلة القوتين اللتين مقداراهما ٢ $\sqrt{٣}$ ، ق = مقدار قوة الاحتكاك النهائى $ح_س$

∵ $\sqrt{(٢\sqrt{٣})^٢ + ق^٢ + ٢ \times ٢\sqrt{٣} \times ق \times جتا\ ١٥٠°} = م_س\ ر$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\therefore \sqrt{١٢ + ق^{٢} - ٦\,ق} = \sqrt{٣} \times ٢$ «وبتربيع الطرفين»

$\therefore ١٢ + ق^{٢} - ٦\,ق = ١٢$ $\quad \therefore ق^{٢} - ٦\,ق = ٠$

$\therefore ق\,(ق - ٦) = ٠$ $\quad \therefore ق = \text{صفر}$ (مرفوض) أ، $ق = ٦$ نيوتن

ويكون الاتجاه الذى يوشك الجسم أن يتحرك فيه عكس اتجاه قوة الاحتكاك $\overleftarrow{ح}$ أى فى اتجاه محصلة القوتين $٢\sqrt{٣}$ ، ٦ نيوتن ويفرض أن قياس زاوية ميل المحصلة على القوة التى مقدارها $٢\sqrt{٣}$ يساوى $هـ^{\circ}$

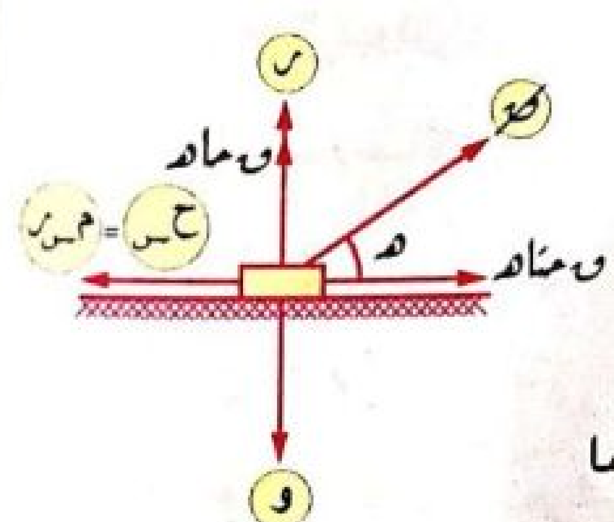
$$\therefore \text{طا}\,هـ = \frac{ق_{٢}\,\text{جا}\,ى}{ق_{١} + ق_{٢}\,\text{جتا}\,ى} = \frac{٦\,\text{جا}\,١٥٠^{\circ}}{٢\sqrt{٣} + ٦\,\text{جتا}\,١٥٠^{\circ}} = -\sqrt{٣} \qquad \therefore هـ^{\circ} = ١٢٠^{\circ}$$

مثال ٦

وضع جسم وزنه (و) على مستوٍ أفقى خشن وكان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى معلوم وهو (ل) ، شد الجسم بقوة تميل على المستوى الأفقى لأعلى بزاوية قياسها غير معلوم وليكن (هـ) فأصبح الجسم على وشك الحركة أثبت أن مقدار هذه القوة يساوى $\frac{\text{و جا ل}}{\text{جتا}\,(هـ - ل)}$

ثم أوجد أصغر مقدار لهذه القوة والشرط اللازم لذلك.

الحل



$\because$ قياس زاوية الاحتكاك = ل

$\therefore$ معامل الاحتكاك $(م_{س}) = \text{طا ل} = \frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$

$\therefore$ مقدار قوة الاحتكاك النهائى $= ح_{س} = م_{س}\,ر = ر\,\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$

وبتحليل القوة $\overleftarrow{ق}$ إلى مركبتين فى اتجاهين متعامدين مقداراهما

ق جتا هـ ، ق جا هـ

$\therefore$ معادلتا الاتزان هما : $ق\,\text{جتا}\,هـ = م_{س}\,ر$

$\therefore ق\,\text{جتا}\,هـ = ر\,\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$ (١)

، $ر + ق\,\text{جا}\,هـ = و$ (٢)

من (١) : $\therefore ر = \frac{ق\,\text{جتا}\,هـ\,\text{جتا ل}}{\text{جا ل}}$

تذكر أن :

$\text{جتا}\,(هـ - ل) = \text{جتا}\,هـ\,\text{جتا ل} + \text{جا}\,هـ\,\text{جا ل}$

، $\text{جتا}\,(هـ + ل) = \text{جتا}\,هـ\,\text{جتا ل} - \text{جا}\,هـ\,\text{جا ل}$

وبالتعويض فى (٢) :

$\therefore \frac{ق\ \text{جتا}\ هـ\ \text{جتا}\ ل}{\text{جا}\ ل} + ق\ \text{جا}\ هـ = و \qquad \therefore ق\ \text{جتا}\ هـ\ \text{جتا}\ ل + ق\ \text{جا}\ هـ\ \text{جا}\ ل = و\ \text{جا}\ ل$

$\therefore ق\ (\text{جتا}\ هـ\ \text{جتا}\ ل + \text{جا}\ هـ\ \text{جا}\ ل) = و\ \text{جا}\ ل$

$\therefore ق\ \text{جتا}\ (هـ - ل) = و\ \text{جا}\ ل \qquad \therefore ق = \frac{و\ \text{جا}\ ل}{\text{جتا}\ (هـ - ل)}$

وحيث أن المطلوب هو إيجاد أصغر مقدار

لهذه القوة فهذا يستلزم أن يكون جتا (هـ − ل)

أكبر ما يمكن أى جتا (هـ − ل) = ١

تذكر أن :

جتا هـ ∋ [−١ ، ١]

أى أن : جتا هـ أكبر ما يمكن إذا كان جتا هـ = ١

∴ أصغر مقدار لهذه القوة هى : ق = و جا ل

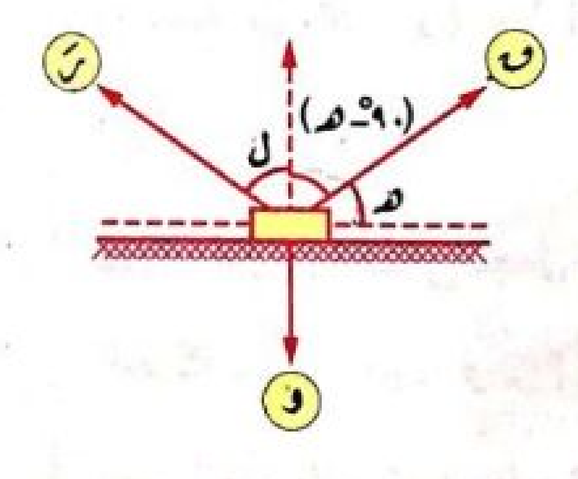
وذلك عندما جتا (هـ − ل) = ١

أى أن : هـ − ل = 0° ∴ هـ = ل

∴ الشرط اللازم هو :

أن يكون قياس زاوية ميل القوة على الأفقى لأعلى يساوى قياس زاوية الاحتكاك.

حل آخر :



الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى هى : $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ر}$

حيث $\overleftarrow{ر}$ هو محصلة رد الفعل العمودى $\overleftarrow{ر}$

، قوة الاحتكاك النهائى $\overleftarrow{ح}_س$

، ∵ الجسم على وشك الحركة

وباستخدام قاعدة لامى :

$$\therefore \frac{ق}{\text{جا}\ (180^\circ - ل)} = \frac{ر}{\text{جا}\ (90^\circ + هـ)} = \frac{و}{\text{جا}\ \left(90^\circ - (هـ - ل)\right)}$$

$$\therefore \frac{ق}{\text{جا}\ ل} = \frac{ر}{\text{جتا}\ هـ} = \frac{و}{\text{جتا}\ (هـ - ل)} \qquad \therefore ق = \frac{و\ \text{جا}\ ل}{\text{جتا}\ (هـ - ل)}$$

جتا (هـ – ل) أكبر ما يمكن

ويكون أصغر مقدار للقوة عندما : جتا (هـ – ل) أكبر ما يمكن

أى أن : جتا (هـ – ل) = ١

∴ أصغر مقدار للقوة ق = و جا ل

وذلك عندما يكون : جتا (هـ – ل) = ١

أى أن : هـ – ل = ٠ ∴ هـ = ل

∴ الشرط اللازم هو :

أن يكون قياس زاوية ميل القوة على الأفقى لأعلى يساوى قياس زاوية الاحتكاك.

ملاحظة

من المثال السابق نجد أن القوة غير معلومة الاتجاه ولذلك فإن لكل اتجاه يجب أن يكون مقدار القوة بقيمة معينة تجعل الجسم على وشك الحركة ولتعدد الاتجاهات تتعدد مقادير هذه القوى التى تجعل الجسم على وشك الحركة [مقدار كل منها ق = $\frac{\text{و جا ل}}{\text{جتا (هـ – ل)}}$ وتميل بزاوية هـ على الأفقى لأعلى].

وبوضع جتا (هـ – ل) = ١ (أكبر ما يمكن) يكون هـ = ل وتكون ق = و جا ل (أقل ما يمكن).

أى أن :

مقدار أقل قوة تكفى لجعل جسم وزنه (و) موضوع على مستوى أفقى خشن على وشك الحركة هى **ق = و جا ل**

وهى القوة التى تميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها يساوى قياس زاوية الاحتكاك (ل).



على مفهوم الاحتكاك
- اتزان جسم على مستوٍ أفقى خشن



من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① زاوية الاحتكاك هى الزاوية المحصورة بين .... عندما يكون الاحتكاك نهائى.

(أ) رد الفعل المحصل وقوة الاحتكاك السكونى النهائى.

(ب) رد الفعل المحصل ورد الفعل العمودى.

(جـ) رد الفعل المحصل ووزن الجسم.

(د) رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك السكونى.

② معامل الاحتكاك السكونى هو ....

(أ) قوة مضادة لاتجاه القوة المؤثرة على الجسم.

(ب) محصلة قوتى رد الفعل العمودى والاحتكاك.

(جـ) نسبة مقدار قوة الاحتكاك النهائى إلى مقدار قوة رد الفعل العمودى.

(د) نسبة مقدار قوة رد الفعل المحصل إلى مقدار قوة الاحتكاك النهائى.

③ رد الفعل المحصل هو محصلة كل من ....

(أ) وزن الجسم ورد الفعل العمودى.

(ب) وزن الجسم وقوة الاحتكاك السكونى النهائى.

(جـ) قوة رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك السكونى النهائى.

(د) قوة الاحتكاك الحركى ورد الفعل العمودى.

④ ظل الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل عندما يكون الاحتكاك نهائى تسمى ....

(أ) زاوية الاحتكاك. (ب) معامل الاحتكاك.

(جـ) قوة الاحتكاك. (د) قوة الاحتكاك النهائى.

⑤ يتوقف معامل الاحتكاك بين جسمين على .... الجسمين المتلامسين.

(أ) شكل (ب) وزن (جـ) حجم (د) طبيعة

⑥ إذا كان : $م_س$ ، $م_ك$ هما معاملى الاحتكاك السكونى والحركى على الترتيب لجسمين متلامسين فإن ....

(أ) $م_س = م_ك$ (ب) $م_س < م_ك$

(جـ) $م_س > م_ك$ (د) $م_س + م_ك = ١$

⑦ إذا كان قياس الزاوية بين رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل = θ عندما يكون الاحتكاك نهائى وقياس الزاوية بين رد الفعل المحصل وقوة الاحتكاك السكونى النهائى = ٢ θ فإن معامل الاحتكاك السكونى = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢}$

⑧ إذا أثرت قوة أفقية مقدارها ٥ ث.كجم على جسم وزنه ١٥ ث.كجم موضوع على مستوى أفقى خشن فجعلته على وشك الحركة فإن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = ... $\frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ١٠

⑨ يدفع وائل صندوقاً ممتلئ بالكتب إلى سيارته على طريق أفقى فإذا كان وزن الصندوق والكتب ٨٠ نيوتن ومعامل الاحتكاك السكونى بين الطريق والصندوق ٠,٢٥ .

فإن مقدار القوة الأفقية التى يدفع بها وائل الصندوق حتى يكون على وشك الحركة تساوى .... نيوتن.

٠,٢٥ × ٨٠ = ٢٠

(أ) ٢٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٨٠ (د) ٣٢٠

⑩ وضع جسم وزنه (و) ث.كجم على مستوى أفقى خشن وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = $\frac{٢}{٥}$ فإذا أثرت قوة أفقية مقدارها ٤٥ ث.كم على الجسم جعلته على وشك الحركة فإن وزن الجسم = ... ث.كجم.

(أ) ٢٢,٥ (ب) ٩٠ (جـ) ١١٢,٥ (د) ٢٢٥

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١١) في الشكل المقابل :

٢٥ كجم

١٥ كجم

البكرة صغيرة ملساء ، المستوى أفقى خشن والمجموعة على وشك الحركة فيكون معامل الاحتكاك السكونى = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

(١٢) وضع جسم وزنه ٣٦٠ نيوتن على مستوى أفقى خشن وكان معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم = $\frac{١}{٦}$ فإن مقدار قوة الاحتكاك = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٣٦٠

---

٢ يدفع فتى حجرًا وزنه ٥٦ نيوتن بقوة أفقية مقدارها ٤٢ نيوتن على رصيف فكان الحجر على وشك الحركة أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الحجر والرصيف. «$\frac{٣}{٤}$»

---

٣ وضع جسم وزنه ٢٧ ثقل كجم على مستوٍ أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم $\frac{١}{٣}$ أوجد مقدار القوة الماسة للمستوى التى توشك أن تحرك الجسم. «٩ ثقل كجم»

---

٤ وضع جسم وزنه ١٣,٥ ث.كجم على مستوٍ أفقى خشن وكان معامل الاحتكاك بينهما = $\frac{٢}{٣}$ أثرت قوة أفقية مقدارها ٧,٥ ث.كجم على الجسم وظل متزنًا. أثبت أن الجسم لا يكون على وشك الحركة عندئذٍ وأن مقدار الاحتكاك عندئذٍ = $\frac{٥}{٦}$ قيمتها النهائية.

---

٥ جسم وزنه ٤٥ ث.كجم موضوع على مستوٍ أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم = $\frac{١}{٣}\sqrt{٣}$ أوجد :

(١) مقدار القوة الأفقية التى تجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى.

(٢) مقدار واتجاه رد الفعل المحصل. «$١٥\sqrt{٣}$ ، $٣٠\sqrt{٣}$ ث.كجم ، ٣٠° مع الرأسى»

---

٦ وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على نضد أفقى وربط بخيط أفقى يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ٤ نيوتن. فإذا كان الجسم متزنًا على النضد فأوجد قوة الاحتكاك. وإذا عُلم أن معامل الاحتكاك السكونى بين الكتلة والنضد يساوى $\frac{١}{٣}$ هل يكون الجسم على وشك الحركة عندئذ ؟ فسر إجابتك. «ح = ٤ نيوتن ، على وشك الحركة»

بكرة ... أفقى يمر على بخيط أفقى وربطت

٧ وضعت كتلة خشبية وزنها ٦ ثقل كجم على نضد أفقى وربطت بخيط أفقى يمر على بكرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ١,٥ ثقل كجم فإذا كانت الكتلة الخشبية متزنة على النضد فعيِّن قوة الاحتكاك وقوة رد الفعل العمودى وإذا عُلم أن معامل الاحتكاك السكونى بين الكتلة والنضد يساوى $\frac{١}{٢}$ فهل كان الجسم على وشك الحركة أم لا ؟

«١,٥ ثقل كجم ، ٦ ثقل كجم ، ليس على وشك الحركة»

٨ وضع جسم وزنه ١٤ ثقل كجم على مستوٍ أفقى خشن ولما شد هذا الجسم بقوة أفقية مقدارها ٧ ثقل كجم أصبح الجسم على وشك الحركة. فإذا وضع فوق الجسم صنجة وزنها ٦ ثقل كجم فما مقدار القوة الأفقية التى توشك أن تحرك الجسم والصنجة فوقه ؟ «١٠ ثقل كجم»

٩ جسم مقدار وزنه ٢٤٠ ث.كجم موضوع على مستوٍ أفقى خشن ويراد شده بحبل يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ فأوجد مقدار الشد الذى يلزم لجعل الجسم على وشك الحركة. «١٢٠ ث.كجم»

١٠ وضع جسم كتلته ٢٤ كجم على مستوٍ أفقى خشن وأثرت عليه قوة أفقية مقدارها ٨ ث.كجم فجعلته على وشك الحركة. أوجد مقدار القوة التى تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° وتكفى لجعل الجسم على وشك الحركة. «$٦\sqrt{٢}$ ث.كجم»

١١ وضع جسم كتلته ٦٠ جم على مستوٍ أفقى خشن قياس زاوية الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم تساوى ٣٠° أوجد :

(١) القوة الأفقية التى تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة.

(٢) القوة التى تميل على المستوى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° وتكفى لجعل الجسم على وشك الحركة.

«$٢٠\sqrt{٣}$ ، ٣٠ ث.جم»

١٢ جسم وزنه ١٦ ث.كجم موضوع على مستوٍ أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم = $\frac{١}{٤}$ أوجد :

(١) مقدار القوة التى تؤثر على الجسم فى اتجاه يميل على الأفقى لأعلى بزاوية جيب تمامها $\frac{٣}{٥}$ وتجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى.

(٢) مقدار واتجاه رد الفعل المحصل.

«٥ ، $٣\sqrt{١٧}$ ث.كجم ، ١٤° ٢َ مع الرأسى»

13 وضع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على مستوٍ أفقى خشن وأثرت فيه قوة مقدارها ١٥ نيوتن فى اتجاه يصنع زاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ لأعلى فظل الجسم متزنًا. أوجد مقدار قوة الاحتكاك. وإذا زيدت هذه القوة حتى أصبح مقدارها ٢٠ نيوتن وأصبح الجسم عندئذٍ على وشك الحركة. فأوجد معامل الاحتكاك السكونى.

«١٢ نيوتن ، $م_س = \frac{٤}{٧}$»

---

14 وضع جسم وزنه ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن على مستوٍ أفقى خشن وأثرت فيه قوة مقدارها ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى اتجاه يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع المستوى لأسفل فجعلت الجسم فى حالة اتزان نهائى.

أوجد : (١) معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى وكذا قياس زاوية الاحتكاك.

(٢) رد الفعل المحصل عندئذٍ.

«$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ٣٠° ، ١٢ نيوتن»

---

15 وضع جسم وزنه ١٠ نيوتن على نضد أفقى خشن. إذا أثرت عليه قوة مقدارها ٨ نيوتن فى اتجاه يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإن الجسم يكون على وشك الحركة على المستوى. أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى ، أما إذا أثرت عليه قوة مقدارها ق نيوتن فى الاتجاه المضاد للقوة السابقة فإنه يصبح على وشك الحركة أيضًا أوجد مقدار ق

«$\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، ٤٠ نيوتن»

---

16 جسم كتلته ٦٠ كجم وضع على مستوٍ أفقى خشن. إذا أثرت عليه قوة مقدارها ٣٠ ث.كجم فى اتجاه يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ لأعلى فإنه يصبح على وشك الحركة وإذا أثرت عليه قوة مقدارها ٦٠ ث.كجم فى الاتجاه المضاد للقوة الأولى فإنه يصبح على وشك الحركة أيضًا. أوجد معامل الاحتكاك السكونى ومقدار الزاوية هـ

«$\frac{١}{٣}\sqrt{٣}$ ، ٣٠°»

---

17 فى الشكل المقابل :

جسم وزنه ١٠ نيوتن إذا كانت ق تصنع زاوية مع الرأسى قياسها ٣٠° لأعلى وتجعل الجسم على وشك الحركة على سقف الحجرة وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والسقف = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

أوجد : قيمة ق

سقف الحجرة

١٠ نيوتن

ق

«٢٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

18 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① وضع جسم وزنه ٨٠ نيوتن على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = $\frac{٣}{٤}$ ، اثرت عليه قوة أفقية مقدارها ٥٠ نيوتن فإن النسبة بين قوة الاحتكاك وقوة الاحتكاك النهائى = ...

(أ) ٣ : ٤ (ب) ٣ : ٥ (جـ) ٥ : ٦ (د) ٦ : ٥

② إذا كانت θ هى قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل المحصل ، فإن معامل الاحتكاك السكونى = ...

(أ) ظا θ (ب) جا θ (جـ) جتا θ (د) ظتا θ

③ إذا كان معامل الاحتكاك بين جسم ما والمستوى = ٢ جا ٣٠°

فإن قياس زاوية الاحتكاك = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

④ جسم وزنه ١٠ ث.كجم موضوع على مستوى أفقى خشن فإذا كان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى $\frac{١}{٤}$ ، وأثرت على الجسم قوة أفقية مقدارها ٢ ث.كجم فإذا رمزنا لمقدار قوة الاحتكاك بالرمز ح فإن ....

ح ← ٢ ث.كجم ، ١٠ ث.كجم

(أ) ح < ٢ ث.كجم (ب) ح = ٢ ث.كجم

(جـ) ٢ < ح < ٢,٥ ث.كجم (د) ح = ٢,٥ ث.كجم

⑤ إذا كانت قوة الاحتكاك النهائى ٦٠ نيوتن ومعامل الاحتكاك السكونى ٠,٧٥ فإن مقدار قوة رد الفعل المحصل يساوى ....

(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٠٠

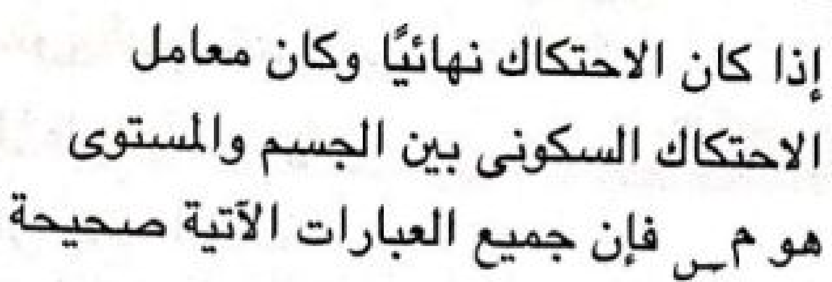
⑥ جسم وزنه ٢ $\sqrt{٣}$ ث.كجم موضوع على مستوى أفقى خشن أثرت عليه قوة أفقية مقدارها ٢ ث.كجم فجعلته على وشك الحركة

فإن مقدار قوة رد الفعل المحصل = ... ث.كجم.

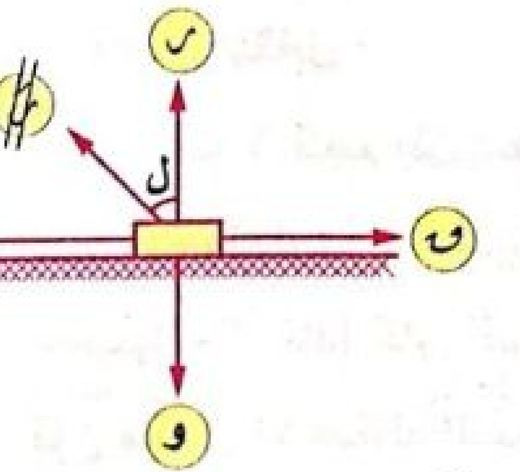
(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢٧٨

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑦ فى الشكل المقابل :



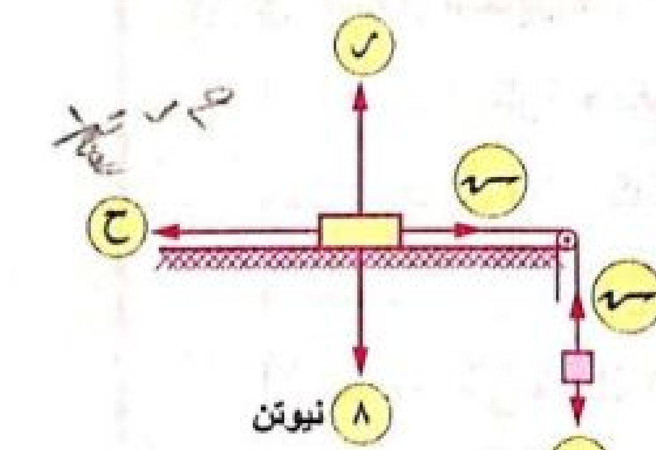
إذا كان الاحتكاك نهائيًا وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى هو $م_س$ فإن جميع العبارات الآتية صحيحة ما عدا ....



(أ) $ر̄ = ر\sqrt{١ + م_س^٢}$ (ب) و = ر̄ حتا ل

(جـ) $م_س$ ر = ر̄ حا ل (د) ر = ر̄ حتا ل

⑧ فى الشكل المقابل :



إذا كان معامل الاحتكاك يساوى $\frac{١}{٤}$ فإن ....

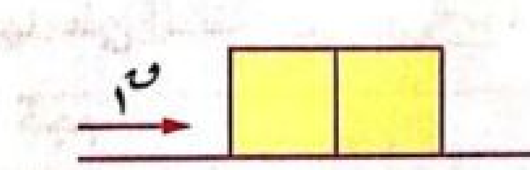
(أ) الاحتكاك = ٢ نيوتن.

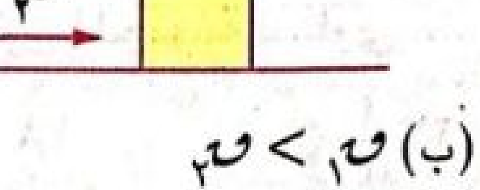
(ب) الجسم يتحرك على المستوى.

(جـ) الاحتكاك بين الجسم والمستوى يكون نهائيًا.

(د) الاحتكاك بين الجسم والمستوى يكون ليس نهائيًا.

⑨ الشكلان الآتيان يوضحان قالبان من نفس المادة متساويان فى الكتلة والحجم موضوعان على مستوى أفقى خشن فى وضعين مختلفين أثرت عليهم قوة لتجعلهم على وشك الحركة كما بالشكل فإن ....

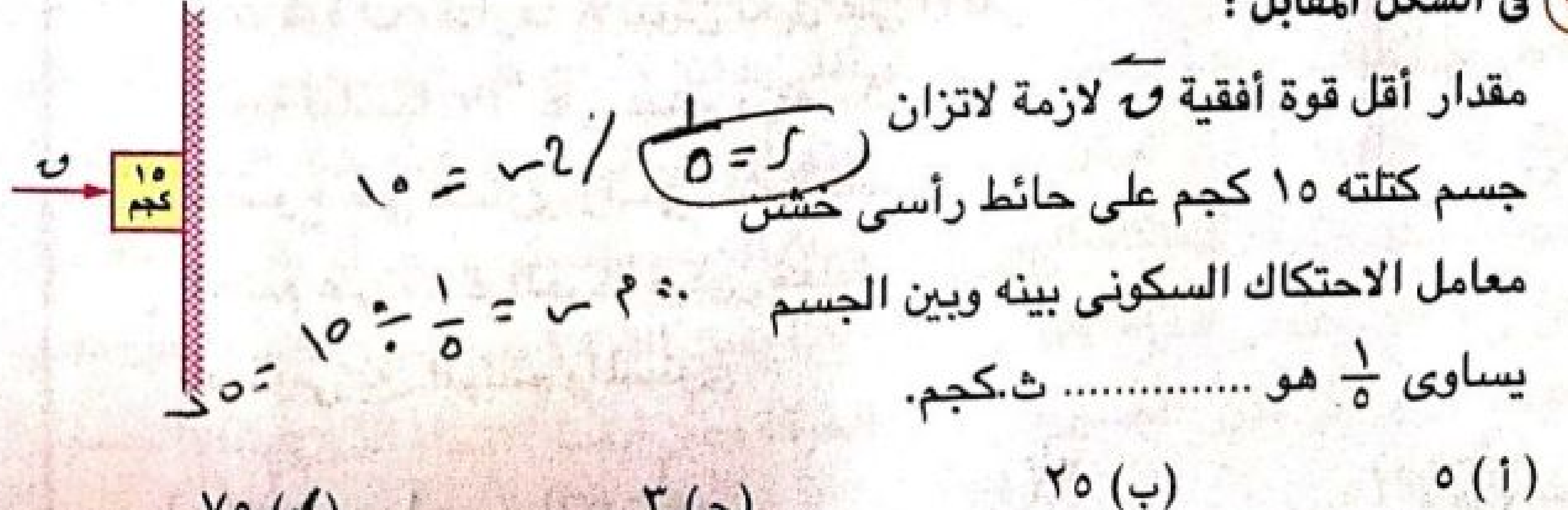




(أ) $ق_١ > ق_٢$ (ب) $ق_١ < ق_٢$

(جـ) $ق_١ = ق_٢$ (د) لايمكن المقارنة بينهما.

⑩ فى الشكل المقابل :



مقدار أقل قوة أفقية ق لازمة لاتزان جسم كتلته ١٥ كجم على حائط رأسى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم يساوى $\frac{١}{٥}$ هو .... ث.كجم.

(أ) ٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٣ (د) ٧٥

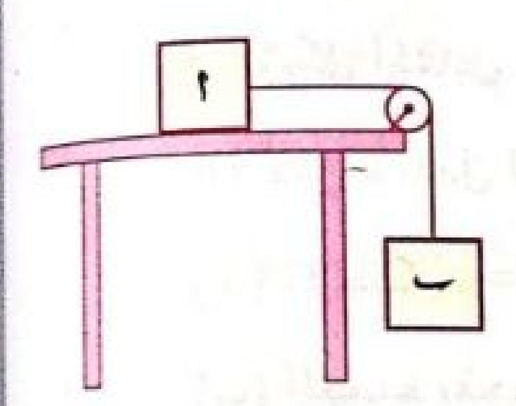
(١١) في الشكل المقابل :

قالب كتلته ١ كجم يتزن على مستوى أفقى خشن وتؤثر عليه قوة مقدارها ١٢ نيوتن تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا كان الجسم على وشك الحركة فإن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = ...

(أ) $\frac{٣٠\sqrt{٣}}{١٩}$ (ب) $\frac{٧}{٦\sqrt{٣}}$ (جـ) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{٥}{٦\sqrt{٢}}$



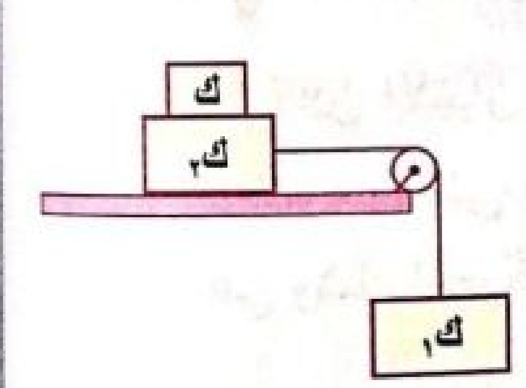
(١٢) في الشكل المقابل :



إذا كانت البكرة صغيرة ملساء والمستوى أفقى خشن وكان معامل الاحتكاك بين الجسم أ الذى كتلته ١٠ كجم والنضد = ٠,٢ فإن أقل قيمة لكتلة الجسم ب حتى تكون المجموعة على وشك الحركة يساوى .... كجم.

(أ) ٢ (ب) ٢,٢ (جـ) ٤,٨ (د) ٠,٢

(١٣) في الشكل المقابل :

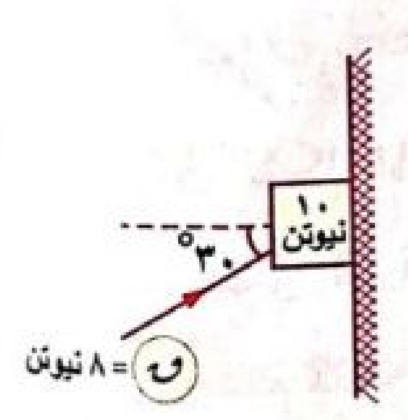


إذا كانت $ك_١$ = ٥ كجم ، $ك_٢$ = ١٠ كجم وكان معامل الاحتكاك بين الجسم $ك_٢$ والمستوى الأفقى = ٠,١٥

فإن أقل قيمة للكتلة ك التى يجب وضعها على الكتلة $ك_٢$ حتى تتزن المجموعة يساوى .... كجم.

(أ) $١٨\frac{١}{٣}$ (ب) $٢٣\frac{١}{٣}$ (جـ) $١٠\frac{١}{٣}$ (د) $٤٣\frac{١}{٣}$

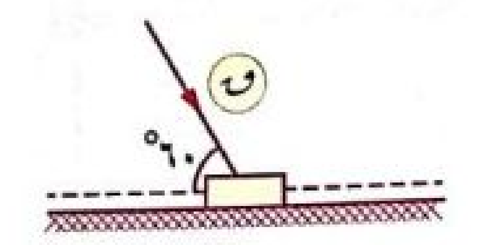
(١٤) في الشكل المقابل :



اثرت قوة ق مقدارها ٨ نيوتن تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° على جسم وزنه ١٠ نيوتن موضوع على مستوى رأسى خشن فأصبح الجسم على وشك الحركة فيكون معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(١٥) فى الشكل المقابل :



إذا كانت كتلة الجسم على المستوى الأفقى $١٠\sqrt{٣}$ كجم ومعامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$ فإن أكبر قيمة للقوة ق يمكن أن تؤثر على الجسم ويظل متزنًا هى .... ث.كجم.

(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٠ (د) ٥

(١٦) إذا كانت ل هى قياس زاوية الاحتكاك فإن رد الفعل المحصل ر = ...

(أ) ر $\sqrt{١ + طا ل}$ (ب) ر $\sqrt{١ + قا ل}$

(جـ) ر طا ل (د) ر قا ل

---

١٩ وضع جسم كتلته ٢٦ جم على مستوٍ أفقى خشن وأصبح الجسم على وشك الحركة عندما أثرت عليه قوتان أفقيتان مقداراهما ٧ ، ٨ ثقل جم تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠°. أوجد قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى. «٢٦° ٣٤َ»

---

٢٠ وضع جسم وزنه ١٢ ثقل كجم على مستوٍ أفقى خشن وأثرت على الجسم قوتان مقداراهما ٤ ، ٤ ثقل كجم ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° بحيث كانت القوتان أفقيتين واقعتين فى نفس المستوى الأفقى مع الجسم فإذا أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى وكذلك قياس زاوية الاحتكاك. «$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ٣٠°»

---

٢١ وضع جسم وزنه ٤٠ ثقل كجم على مستوٍ أفقى خشن وأثرت على الجسم فى نفس المستوى قوتان متعامدتان مقداراهما ٦ ، ٨ ثقل كجم فبقى الجسم متزنًا. أثبت أن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يجب ألا يقل عن $\frac{١}{٤}$

---

٢٢ وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوٍ أفقى خشن وأثرت على الجسم فى نفس المستوى قوتان مقداراهما ٢ ، ٤ نيوتن تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° فظل الجسم ساكنًا. أثبت أن قياس زاوية الاحتكاك السكونى (ل) بين الجسم والمستوى يجب ألا يقل عن ٣٠° وإذا كان ل = ٤٥° ، وبقى اتجاه القوتين ثابتًا ، كما بقيت القوة ٤ نيوتن دون تغيير. فعيِّن مقدار القوة الأخرى لكى يكون الجسم على وشك الحركة وعيِّن أيضًا الاتجاه الذى يوشك الجسم أن يبدأ الحركة فيه. «$٢ + ٢\sqrt{٦}$ ، هـ = ٤٤َ ٨٤° مع القوة ٤ نيوتن»

٢٣ يرتكز جسم كتلته ٧٥ جم على مستوٍ أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم = $\frac{1}{2}$ أثرت على الجسم قوتان أفقيتان متساويتان فى المقدار وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فكان الجسم على وشك الحركة. أوجد مقدار كلٍ من القوتين. «٢٥ ث.جم»

---

٢٤ وضع جسم وزنه ٥ ث.جم على مستوٍ أفقى خشن وأثرت على الجسم فى نفس المستوى قوتان ١٠ ، ق ث.جم تحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠° أوجد قيمة القوة ق لكى تجعل الجسم على وشك الحركة وعيِّن الاتجاه الذى يتحرك فيه الجسم إذا كان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ٤٥° «٥ $\sqrt{3}$ ، ق(د هـ) = ٦٠° مع القوة الأولى»

---

٢٥ 📖 وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوٍ أفقى خشن قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى (ل) شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقى زاوية قياسها (٢ ل) لأعلى جعلت الجسم على وشك الحركة. أثبت أن مقدار هذه القوة يساوى و طا ل

---

٢٦ وضع جسم وزنه و على مستوٍ أفقى خشن زاوية الاحتكاك بينه وبين المستوى قياسها ى ثم شد الجسم بحبل فى اتجاه يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها هـ برهن أن القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة تساوى $\frac{\text{و جا ى}}{\text{جتا (ى - هـ)}}$ ، واستنتج من ذلك مقدار واتجاه أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى.

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جسم وزنه ٣ نيوتن موضوع على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم $\frac{1}{2}$ ، أثرت عليه قوة أفقية تحاول تحريكه فإن قوة الاحتكاك ∈ ....

(أ) [$\frac{1}{2}$ ، ٣] (ب)] ١ ، ∞ [(جـ)] ٠ ، ١] (د)] ٠ ، $\frac{1}{2}$]

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② جسم وزنه ١ نيوتن موضوع على مستوى أفقي خشن معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم $\sqrt{٣}$ ، أثرت عليه قوة أفقية تحاول تحريكه

فإن قوة رد الفعل المحصل ∋ ....

(أ) [٠ ، ١]　(ب)]١ ، ٢]　(جـ) {١ ، ٢}　(د) {٢}

③ وضع جسم وزنه ١٠ ث.كجم على مستوى أفقي خشن وأثرت عليه قوة مقدارها ٢٠ ث.كجم تميل على الأفقي لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإن قوة الاحتكاك المتولدة عندئذٍ = ... ث.كجم.

(أ) صفر　(ب) ١٠　(جـ) ١٠$\sqrt{٣}$　(د) ٢٠



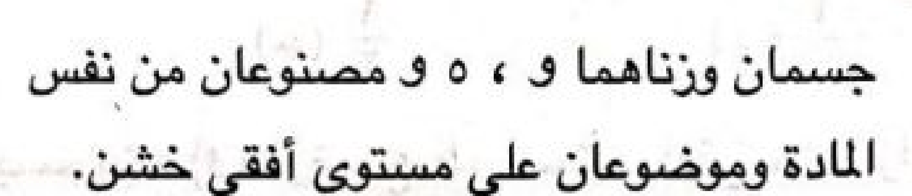
④ في الشكل المقابل :

وضع إناء فارغ وزنه = ٣٠ نيوتن على مستوى أفقي خشن فإذا كانت القوة الأفقية التي تجعله على وشك الحركة = ٢٠ نيوتن وإذا تم ملء الإناء حتى أصبح وزنه = ٥١ نيوتن فإن القوة الأفقية ق التي تجعله على وشك الحركة = ... نيوتن.

(أ) ٢٠　(ب) ٣٤　(جـ) ٤١　(د) ٧٦,٥



⑤ في الشكل المقابل :



جسمان وزناهما و ، ٥ و مصنوعان من نفس المادة وموضوعان على مستوى أفقي خشن.

أولًا : إذا كان معاملا الاحتكاك السكوني بين الجسمين والمستوى هما $م_1$ ، $م_2$ على الترتيب فإن ....

(أ) $م_1 = م_2$　(ب) $م_2 = ٥ م_1$　(جـ) $م_2 = \frac{1}{٥} م_1$　(د) $م_1 + م_2 = ١$

ثانيًا : إذا كانت قوتا الاحتكاك النهائي بين الجسمين والمستوى هما $ق_1$ ، $ق_2$ على الترتيب فإن : ....

(أ) $ق_1 = ق_2$　(ب) $ق_2 = ٥ ق_1$

(جـ) $ق_2 = \frac{1}{٥} ق_1$　(د) $ق_1 + ق_2 = ٦ ك$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى

⑥ جسم وزنه (و) على وشك الحركة على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينهما = م تحت تأثير قوة أفقية مقدارها (ق) فيكون جسم وزنه (و + ٣) من نفس المادة على وشك الحركة على نفس المستوى الأفقى تحت تأثير قوة أفقية مقدارها ....

(أ) ق + ٣ (ب) ٣ ق (جـ) ق٢ (د) ق + ٣ م

⑦ أثرت قوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ على جسم وزنه ($و_1$) موضوع على مستوى أفقى خشن فكان الجسم على وشك الحركة وإذا اثرت نفس القوة $\overleftarrow{ق}$ على جسم أخر وزنه ($و_2$) موضوع على نفس المستوى الأفقى فكان الجسم أيضًا على وشك الحركة فإذا كان معاملا الاحتكاك السكونى بين الجسمين والمستوى هما $م_1$ ، $م_2$ على الترتيب فأى من الجمل الأتية صحيح ؟

(أ) $و_1 = و_2$ (ب) $م_1 = م_2$

(جـ) $\frac{و_1}{و_2} = \frac{م_2}{م_1}$ (د) $و_1 + م_1 = و_2 + م_2$

⑧ إذا وضع جسم وزنه ٨ نيوتن على مستو أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما = $\frac{1}{2}$ ، $ق_1$ هى مقدار القوة الماسة للمستوى وتجعل الجسم على وشك الحركة ، $ق_2$ هى مقدار أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة فإن : $\frac{ق_1}{ق_2}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

⑨ إذا أثرت قوة أفقية (ق) على جسم وزنه (و) موضوع على مستوى أفقى خشن زاوية احتكاكه (ل) وكان الجسم على وشك الحركة فإن رد الفعل المحصل (ر) = ...

(أ) و طا ل (ب) و قتا ل (جـ) ق قتا ل (د) ق حا ل

٢٨ 📖 وضع جسم وزنه ٦٦ $\frac{2}{3}$ نيوتن على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما يساوى $\frac{3}{4}$ أثرت على الجسم قوة مقدارها ٤٠ نيوتن وتميل على الأفقى لأعلى بزاوية حادة قياسها θ فإذا كان الجسم على وشك الحركة فما قيمة θ

«٥٢ َ ٣٦ °»

٢٩ وضع جسم أ وزنه ٢ ك على نضد أفقى خشن وربط بأحد نهايتى خيط خفيف يمر على بكرة ملساء ب مثبتة عند حافة النضد وعند تعليق جسم وزنه ك من الطرف الآخر للخيط كان الجسم أ على وشك الحركة على النضد. أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم أ والنضد وإذا ربط الجسم أ من الجهة الأخرى بأحد نهايتى خيط آخر خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء حـ عند الحافة المقابلة للنضد. أوجد الثقل الواجب تعليقه بالطرف الآخر للخيط حتى يكون الجسم أ على وشك الحركة مع بقاء الجسم المُعلق بالخيط الآخر (الجسم أ والبكرتان ب ، حـ على استقامة واحدة). «$\frac{1}{2}$ ، ٢ ك»

٣٠ وضع جسم على أرض أفقية وأثرت عليه قوة تميل على الأرض بزاوية قياسها ٣٠° وموجهة إلى أسفل فوجد أن الجسم قد أصبح على وشك الحركة ولما زيدت مقدار القوة إلى الضعف وقياس زاوية ميلها إلى الضعف أيضًا وجد أن الجسم على وشك الحركة أيضًا.

أثبت أن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والأرض يساوى ٠,١ تقريبًا.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الدرس 2

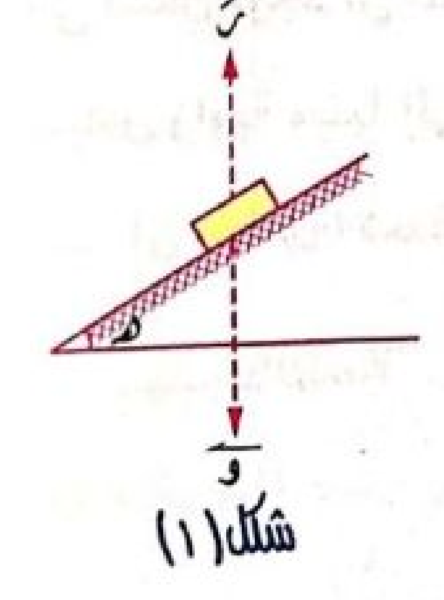
اتزان جسم على مستوٍ مائل خشن

- إذا وضع جسم مقدار وزنه و على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ° واتزن الجسم على المستوى فإنه يكون متزنًا تحت تأثير قوتين هما :

(١) قوة وزن الجسم وَ وتعمل رأسيًا لأسفل.

(٢) قوة رد الفعل المحصل رَ وتعمل فى عكس اتجاه وَ

(كما فى شكل (١)) ويكون رَ = و



شكل (١)

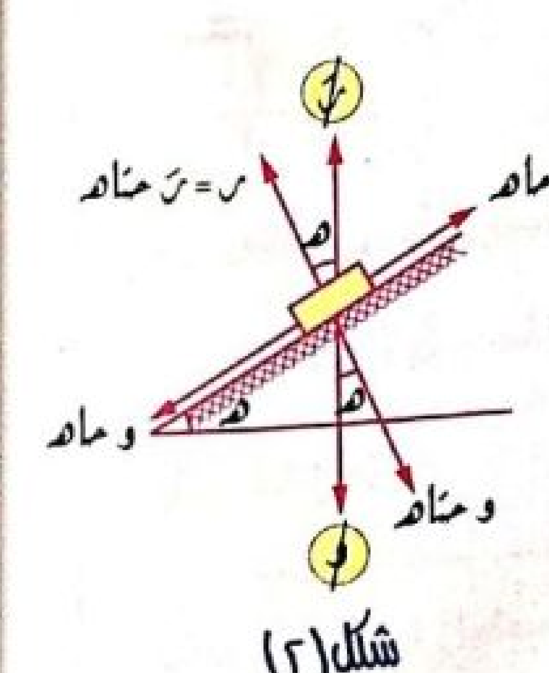
- وبتحليل رَ إلى مركبتين فى اتجاهين متعامدين هما :

(١) قوة الاحتكاك حَ وتعمل فى اتجاه موازى للمستوى لأعلى

حيث : ح = رَ جا هـ

(٢) قوة رد الفعل العمودى رَ وتعمل فى اتجاه عمودى على المستوى لأعلى

حيث : ر = رَ جتا هـ (كما فى شكل (٢))



شكل (٢)

- وبتحليل وَ إلى مركبتين فى اتجاهين متعامدين فإن مقداريهما :

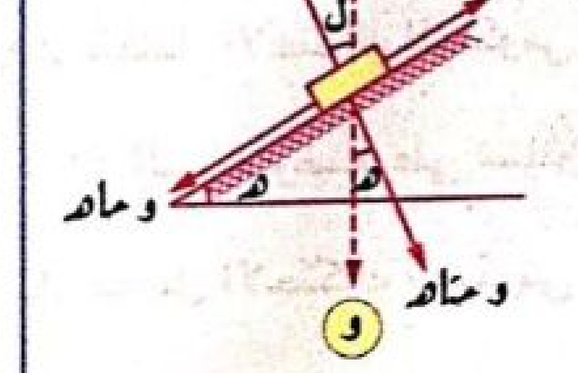
(١) و جتا هـ فى الاتجاه العمودى على المستوى لأسفل.

(٢) و جا هـ فى اتجاه يوازى المستوى لأسفل (كما فى شكل (٢))

فإن : معادلتى اتزان الجسم هما : ر = و جتا هـ ، ح = و جا هـ

ملاحظة

إذا كان الجسم على وشك الانزلاق أى على وشك الحركة لأسفل المستوى بتأثير وزنه فقط فإن الاحتكاك يكون نهائيًا ومقداره $ح_س = م_س ر$ وتصبح معادلتا اتزان الجسم هما :



$ر = و \ حتا \ هـ$ (١) ، $م_س ر = و \ حا \ هـ$ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) ينتج أن :

$م_س = \frac{حا \ هـ}{حتا \ هـ}$ $\therefore م_س = طا \ هـ$

، $\because م_س = طا \ ل$ حيث ل هى قياس زاوية الاحتكاك $\therefore طا \ ل = طا \ هـ$ $\therefore ل = هـ$

أى أن : قياس زاوية الاحتكاك = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

ومن ذلك يمكن استنتاج القاعدة الآتية :

قاعدة

إذا وضع جسم على مستوٍ مائل خشن وكان على وشك الانزلاق بتأثير وزنه فقط فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

فمثلًا : إذا وضع جسم على مستوٍ مائل خشن وكان على وشك الانزلاق بتأثير وزنه فقط عندما كانت زاوية ميل المستوى على الأفقى قياسها ٦٠°

فإن : قياس زاوية الاحتكاك = ٦٠° ويكون معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $م_س = طا \ ٦٠^\circ = \sqrt{٣}$

مثال ①

وضع جسم وزنه ٩٠ ثقل جم على مستوٍ مائل خشن ولوحظ أن الجسم أصبح على وشك الحركة تحت تأثير وزنه فقط عندما كان ظل زاوية ميله على الأفقى $\frac{٢}{٣}$ فإذا وضع نفس الجسم على مستوٍ أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل وأثرت فيه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ وتقع فى مستوٍ رأسى فجعلته على وشك الحركة. **فأوجد :**

① مقدار قوة الشد. ② مقدار قوة رد الفعل العمودى. ③ مقدار قوة رد الفعل المحصل.

الحـــل

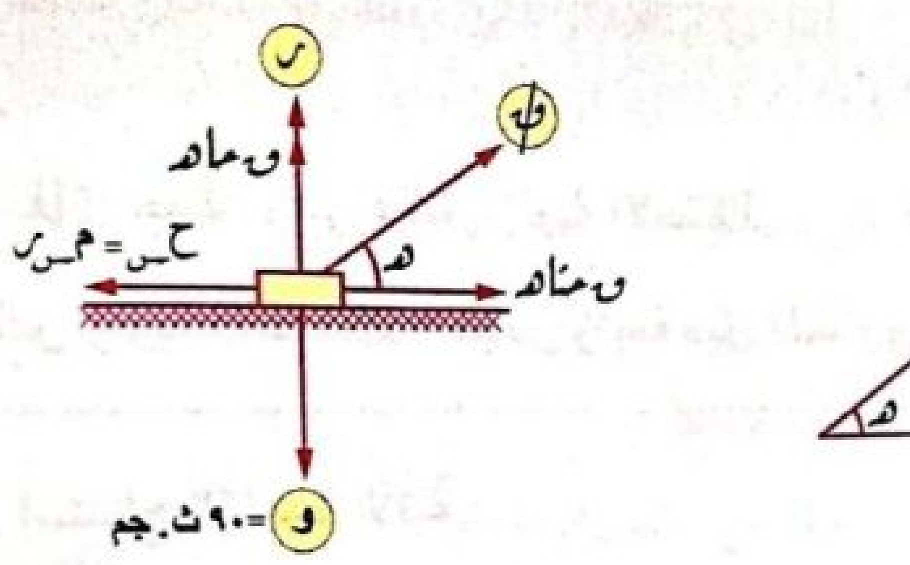
∵ الجسم على وشك الحركة على المستوى المائل تحت تأثير وزنه فقط

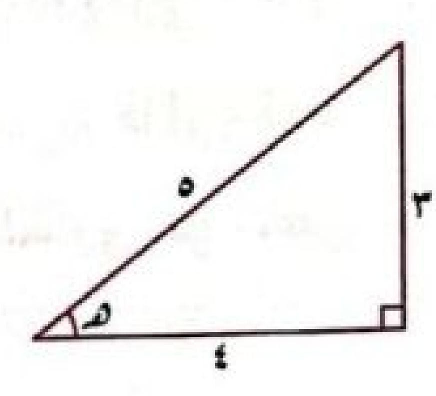
∴ قياس زاوية الاحتكاك = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

∴ معامل الاحتكاك السكونى ($م_س$) = ظل زاوية ميل المستوى المائل على الأفقى = $\frac{٢}{٣}$

، ∵ الجسم وضع على مستوى أفقى له نفس خشونة المستوى المائل

∴ معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى الأفقى ($م_س$) = $\frac{٢}{٣}$





وبتحليل القوة $\overleftarrow{ق}$ (قوة الشد) إلى مركبتين فى اتجاهين متعامدين

، ∵ الجسم على وشك الحركة

∴ معادلتا اتزان الجسم هما : ق جتا هـ = $م_س$ ر ∴ $\frac{٤}{٥}$ ق = $\frac{٢}{٣}$ ر (١)

، ر + ق جا هـ = و ∴ ر + $\frac{٣}{٥}$ ق = ٩٠ (٢)

، من (١) : ر = $\frac{٦}{٥}$ ق

وبالتعويض فى (٢) : ∴ $\frac{٦}{٥}$ ق + $\frac{٣}{٥}$ ق = ٩٠

∴ ق = ٥٠ ث.جم

∴ مقدار قوة الشد = ٥٠ ثقل جرام

، ∵ ر = $\frac{٦}{٥}$ ق = $\frac{٦}{٥}$ × ٥٠ = ٦٠ ث.جم

∴ مقدار قوة رد الفعل العمودى = ٦٠ ثقل جرام

∵ $\bar{ر}$ = ر $\sqrt{١ + م^٢}$ = ٦٠ $\sqrt{١ + \frac{٤}{٩}}$ = ٢٠ $\sqrt{١٣}$ ث.جم

∴ مقدار رد الفعل المحصل = ٢٠ $\sqrt{١٣}$ ثقل جرام.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظة

عند وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) وكان قياس زاوية الاحتكاك (ل) فإننا نقارن بين هـ ، ل لتحديد ما إذا كان الجسم متزنًا أم متحرك بالفعل.

① إذا كانت : هـ < ل فإن الجسم يستقر على المستوى (ساكن)

أى أن : (متزن وليس على وشك الحركة)

② إذا كانت : هـ = ل فإن الجسم يكون على وشك الانزلاق

أى أن : (متزن وعلى وشك الحركة)

③ إذا كانت : هـ > ل فإن الجسم لا يمكن أن يتزن أى يكون متحركًا لأسفل المستوى.

مثال ②

وضع جسم على مستو مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$

وضح مع ذكر السبب أن هذا الجسم لا يمكن أن يبقى متزن على المستوى.

الحـــل

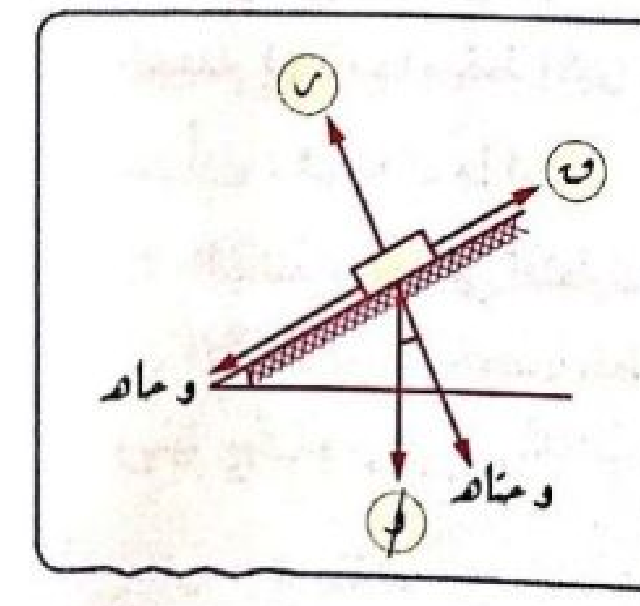
∵ طا هـ = طا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، ∵ م = طا ل = $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$

، ∵ $\frac{\sqrt{٣}}{٣} > \frac{\sqrt{٣}}{٥}$ ∴ هـ > ل

∴ الجسم لا يمكن أن يبقى متزن على المستوى.

ملاحظة

إذا أثرت على الجسم قوة مقدارها ق فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى المستوى ومازال الجسم متزنًا فإننا نقارن بين ق ، و جا هـ لتعيين مقدار واتجاه قوة الاحتكاك.



فإن الجسم يميل للحركة لأعلى المستوى

① إذا كانت : ق > و جا هـ فإن الجسم يميل للحركة لأعلى المستوى ، ق = ح + و جا هـ

∴ اتجاه ح يكون لأسفل المستوى

② إذا كانت : ق < و جا هـ فإن الجسم يميل للحركة لأسفل المستوى ، ق + ح = و جا هـ

∴ اتجاه ح يكون لأعلى المستوى

③ إذا كانت : ق = و جا هـ فإن الجسم يكون متزنًا على المستوى وقوة الاحتكاك (ح) عندئذٍ تكون منعدمة.

مثال ③

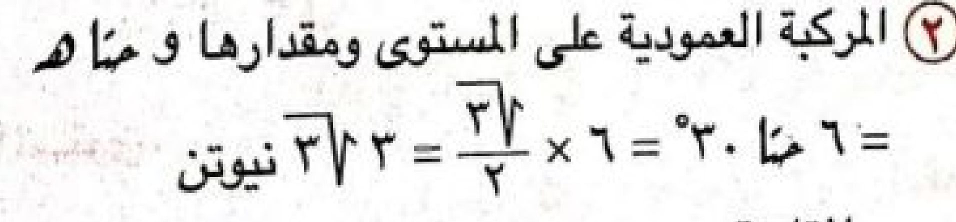
وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، أثرت على الجسم قوة تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى ومقدارها ٤ نيوتن. فإذا كان الجسم متزنًا عيِّن قوة الاحتكاك وبيِّن ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا.

الحــل

بتحليل قوة الوزن و إلى مركبتين هما :

① المركبة المماسية فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أسفل

ومقدارها و جا هـ = ٦ جا ٣٠° = ٦ × $\frac{1}{2}$ = ٣ نيوتن



② المركبة العمودية على المستوى ومقدارها و جتا هـ

= ٦ جتا ٣٠° = ٦ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٣ $\sqrt{3}$ نيوتن

وبالمقارنة بين مقدار المركبة المماسية للوزن و جا هـ = ٣ نيوتن ، مقدار القوة المؤثرة على الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى ق = ٤ نيوتن

نجد أن : ق > و جا هـ

∴ الجسم يميل إلى التحرك لأعلى المستوى ولذلك يجب أن تكون قوة الاحتكاك ح فى عكس الاتجاه أى فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل ويكون معادلتا اتزان الجسم هما :

ق = ح + و جا هـ ∴ ٤ = ح + ٦ جا ٣٠° ∴ ح = ١ نيوتن

، ر = و جتا هـ ∴ ر = ٦ جتا ٣٠° ∴ ر = ٣ $\sqrt{3}$ نيوتن

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ مقدار الاحتكاك = ١ نيوتن ويعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل

وللتعرف على ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا

نوجد مقدار قوة الاحتكاك النهائى

$ح_{س} = م_{س} ر = \frac{\sqrt{٣}}{٣} \times ٣\sqrt{٣} = ٣$ نيوتن

فنجد أن : $ح < ح_{س}$

أى أن : الاحتكاك غير نهائى

∴ الجسم لا يكون على وشك الحركة.

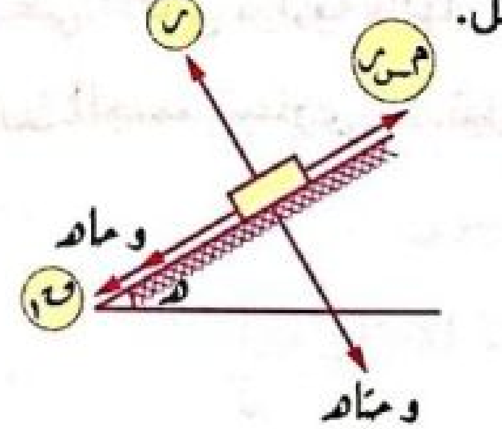
لاحظ أن

* إذا كان : $ح < ح_{س}$ فإن الجسم متزن وليس على وشك الحركة.
* إذا كان : $ح = ح_{س}$ فإن الجسم متزن وعلى وشك الحركة.

ملاحظات

① إذا كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى أصغر من قياس زاوية الاحتكاك فإن الجسم يستقر على المستوى (حيث لا يكون الاحتكاك نهائيًا) ويمكن جعل الاحتكاك نهائيًا بأن تؤثر على الجسم بقوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى كما يلى :

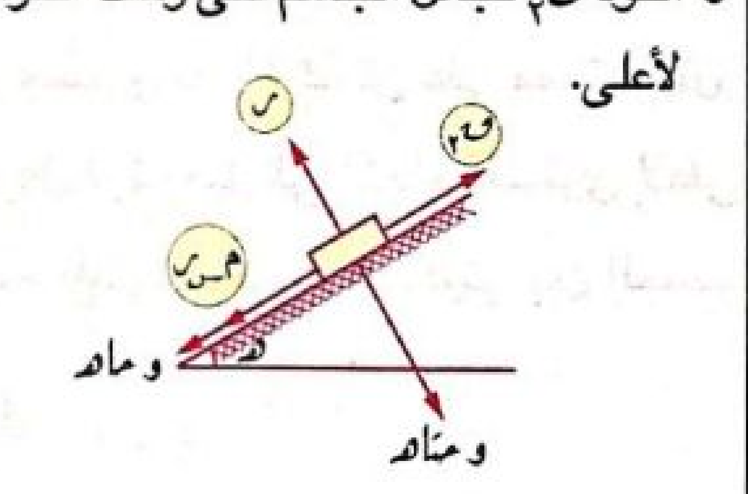
• القوة $\overleftarrow{ق_{١}}$ تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل.



معادلتا الاتزان :

ر = و جتا هـ ، م$_{س}$ ر = ق$_{١}$ + و جا هـ

• القوة $\overleftarrow{ق_{٢}}$ تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى.



معادلتا الاتزان :

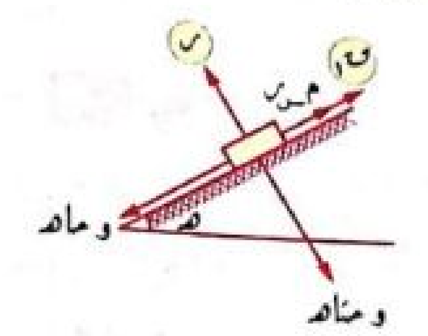
ر = و جتا هـ ، ق$_{٢}$ = م$_{س}$ ر + و جا هـ

* إذا أثرت على الجسم قوة فى اتجاه خط أكبر ميل لأسفل أقل من ق$_{١}$ أو لأعلى أقل من ق$_{٢}$ فإن الجسم يظل ساكنًا.

② إذا كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى أكبر من قياس زاوية الاحتكاك فإن الجسم لا يمكن أن يتزن تحت تأثير وزنه فقط ويمكن جعل الجسم فى حالة اتزان نهائى أى على وشك الحركة لأسفل أو لأعلى المستوى بالتأثير عليه بقوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى كما يلى :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

- القوة $\overleftarrow{ق_١}$ عندها الجسم على وشك الانزلاق وهى أقل قوة تحفظ توازن الجسم.



معادلتا الاتزان :

ر = و جتا هـ ، ق١ + م س ر = و جا هـ

- القوة $\overleftarrow{ق_٢}$ تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى وهى أكبر قوة تحفظ توازن الجسم.

معادلتا الاتزان :

ر = و جتا هـ ، ق٢ = م س ر + و جا هـ

* إذا أثرت على الجسم قوة فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى أكبر من ق١ وأقل من ق٢ فإن الجسم يظل ساكنًا. أى أن : قيم ق التى تجعل الجسم فى حالة اتزان ∈ [ق١ ، ق٢]

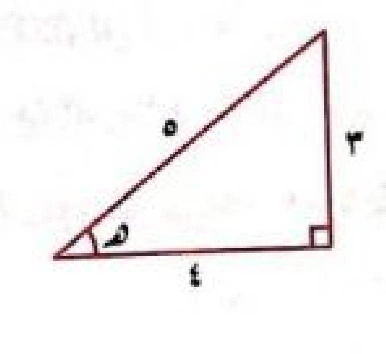
* تنعدم قوة الاحتكاك إذا كانت القوة التى تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى

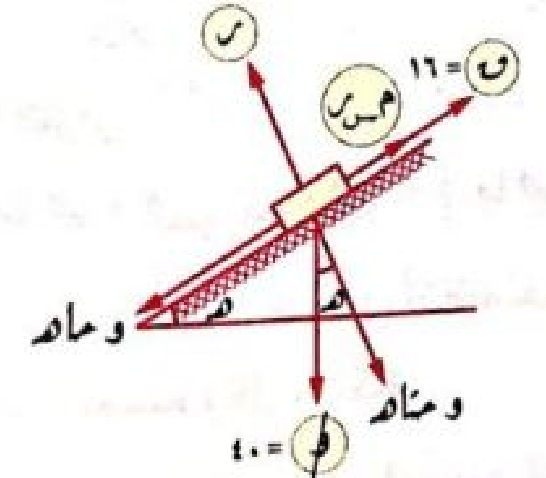
$ق = و جا هـ = \frac{ق_١ + ق_٢}{٢}$

مثال ٤

يرتكز جسم وزنه ٤٠ نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ فإذا كانت أقل قوة تعمل فى اتجاه المستوى لأعلى وتحفظ توازن الجسم تساوى ١٦ نيوتن. فأوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى.

الحل





بفرض أن $\overleftarrow{ق}$ هى أقل قوة تعمل فى اتجاه المستوى لأعلى وتحفظ توازن الجسم

∴ الجسم على وشك الحركة لأسفل المستوى

∴ الاحتكاك يكون نهائيًا ومقداره ح س = م س ر ويعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ معادلتا اتزان الجسم هما :

ر = و جتا هـ **(١)**

∴ ر = ٤٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٣٢ نيوتن ، ق + $م_س$ ر = و جا هـ **(٢)**

∴ ١٦ + ٣٢ $م_س$ = ٤٠ × $\frac{٣}{٥}$ ∴ ٣٢ $م_س$ = ٨

∴ $م_س$ = $\frac{٨}{٣٢}$ = $\frac{١}{٤}$ ∴ معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = $\frac{١}{٤}$

مثال ٥

وضع جسم وزنه ١٠ ثقل كجم على مستوٍ مائل خشن تؤثر عليه قوة فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى. فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما ق = ٦ ثقل كجم ويكون على وشك الحركة إلى أسفل المستوى عندما ق = ٤ ثقل كجم **أوجد :**

(١) قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

(٢) معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى.

الحل

- عندما ق = ٦ ثقل كجم يكون الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى ويكون الاحتكاك نهائيًا ويعمل إلى أسفل المستوى

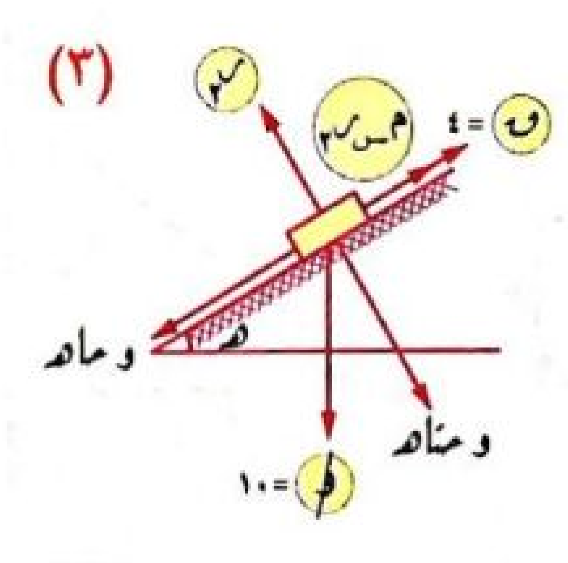
∴ معادلتا الاتزان هما :

$ر_١$ = و جتا هـ ∴ $ر_١$ = ١٠ جتا هـ **(١)**

، ق = $م_س$ $ر_١$ + و جا هـ ∴ ٦ = $م_س$ $ر_١$ + ١٠ جا هـ **(٢)**

بالتعويض من **(١)** فى **(٢)** :

∴ ٦ = ١٠ $م_س$ جتا هـ + ١٠ جا هـ **(٣)**



- عندما ق = ٤ ثقل كجم يكون الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى ويكون الاحتكاك نهائيًا ويعمل فى اتجاه المستوى لأعلى

∴ معادلتا الاتزان هما : $ر_٢$ = و جتا هـ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\therefore$ ر٢ = ١٠ جتا هـ **(٤)**

، ق + م~س~ ر٢ = و جا هـ $\therefore$ ٤ + م~س~ ر٢ = ١٠ جا هـ

$\therefore$ ٤ = ١٠ جا هـ − م~س~ ر٢ **(٥)**

بالتعويض من **(٤)** في **(٥)** : $\therefore$ ٤ = ١٠ جا هـ − ١٠ م~س~ جتا هـ **(٦)**

بجمع **(٣)** ، **(٦)** ينتج أن : ١٠ = ٢٠ جا هـ

$\therefore$ جا هـ = $\frac{١٠}{٢٠}$ = $\frac{١}{٢}$ $\therefore$ هـ = ٣٠°

$\therefore$ قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي = ٣٠°

وبالتعويض في **(٣)** : $\therefore$ ٦ = ١٠ م~س~ جتا ٣٠° + ١٠ جا ٣٠°

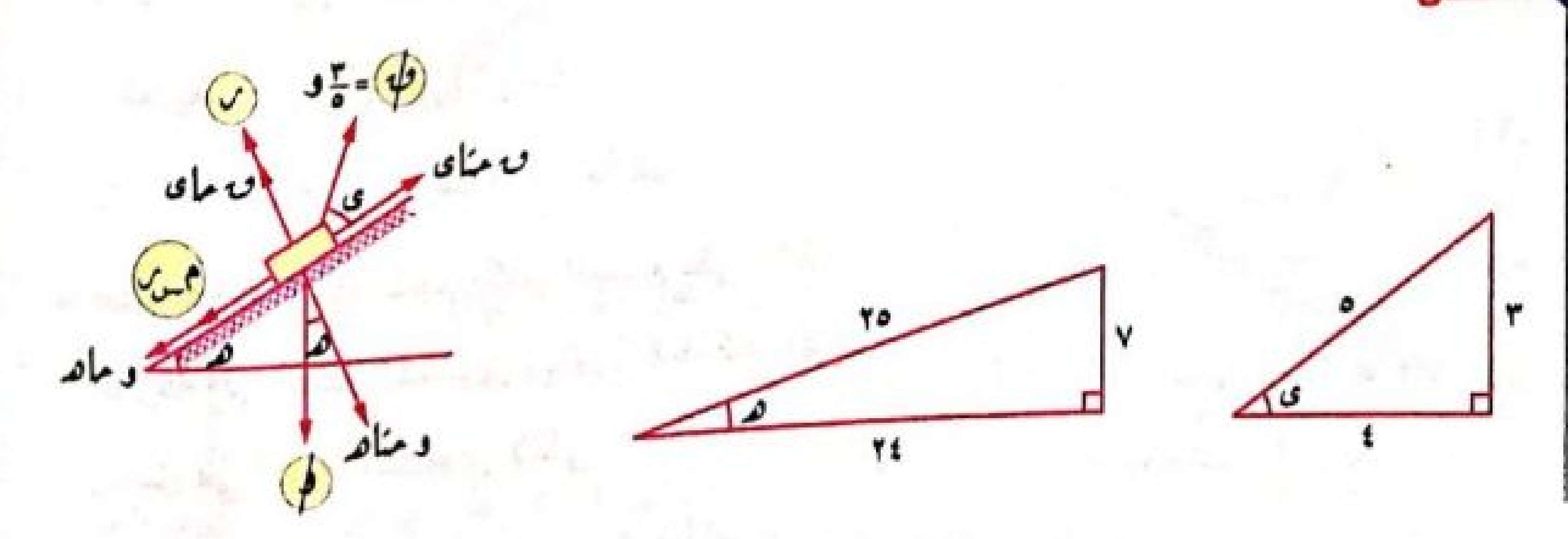
$\therefore$ ٦ = ١٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ م~س~ + ١٠ × $\frac{١}{٢}$ $\therefore$ م~س~ = $\frac{١}{٥\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$

$\therefore$ معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى = $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$

مثال ٦

وضع جسم وزنه (و) على مستوٍ خشن يميل على الأفقي بزاوية ظلها $\frac{٧}{٢٤}$ ربط الجسم في حبل وشد الحبل إلى أعلى بقوة قدرها ($\frac{٣}{٥}$ و) جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى فإذا كان الحبل واقعًا في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل وكانت الزاوية بين الحبل وبين خط أكبر ميل قياسها ى حيث ظا ى = $\frac{٣}{٤}$ احسب معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى وكذا قياس زاوية الاحتكاك.

الحل



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى

∴ الاحتكاك يكون نهائيًا وفى اتجاه لأسفل المستوى

وبتحليل كل من $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{و}$ فى اتجاهين متعامدين

∴ معادلتا الاتزان هما : ر + ق جا ى = و جتا هـ   ∴ ر + $\frac{٣}{٥}$ و × $\frac{٣}{٥}$ = و × $\frac{٢٤}{٢٥}$

∴ ر + $\frac{٩}{٢٥}$ و = $\frac{٢٤}{٢٥}$ و   ∴ ر = $\frac{٣}{٥}$ و   (١)

، ق جتا ى = م$_{س}$ ر + و جا هـ   ∴ $\frac{٣}{٥}$ و × $\frac{٤}{٥}$ = م$_{س}$ ر + و × $\frac{٧}{٢٥}$

∴ $\frac{١٢}{٢٥}$ و = م$_{س}$ ر + $\frac{٧}{٢٥}$ و   ∴ م$_{س}$ ر = $\frac{١}{٥}$ و   (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) : ∴ م$_{س}$ × $\frac{٣}{٥}$ و = $\frac{١}{٥}$ و   ∴ م$_{س}$ = $\frac{١}{٣}$

∴ معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = $\frac{١}{٣}$

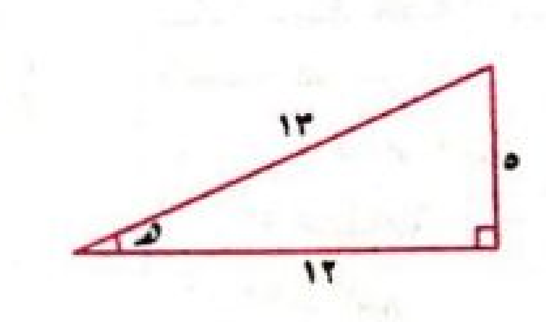
وبفرض أن قياس زاوية الاحتكاك = ل   ∴ ظا ل = $\frac{١}{٣}$

∴ ل = ٢٦َ ١٨°   ∴ قياس زاوية الاحتكاك = ٢٦َ ١٨°

مثال ٧

وضع جسم وزنه ١٩ ثقل كجم. على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{١٢}{١٣}$ شد الجسم بقوة أفقية واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $\frac{١}{٢}$ فأوجد مقدار قوة الشد.

الحــل



∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى

∴ الاحتكاك نهائى ومقداره = $م_س$ ر ويعمل فى اتجاه المستوى إلى أسفل

وبتحليل القوتين $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{و}$ فى اتجاهين متعامدين

∴ معادلتا الاتزان هما : ر = و جتا هـ + ق جا هـ

∴ ر = ١٩ × $\frac{١٢}{١٣}$ + ق × $\frac{٥}{١٣}$

∴ ر = $\frac{٢٢٨}{١٣}$ + $\frac{٥}{١٣}$ ق (١)

، ق جتا هـ = $م_س$ ر + و جا هـ

∴ ق × $\frac{١٢}{١٣}$ = $\frac{١}{٢}$ ر + ١٩ × $\frac{٥}{١٣}$

∴ $\frac{١٢}{١٣}$ ق = $\frac{١}{٢}$ ر + $\frac{٩٥}{١٣}$ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) : ∴ $\frac{١٢}{١٣}$ ق = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٢٢٨}{١٣}$ + $\frac{٥}{١٣}$ ق) + $\frac{٩٥}{١٣}$

∴ $\frac{١٢}{١٣}$ ق = $\frac{١١٤}{١٣}$ + $\frac{٥}{٢٦}$ ق + $\frac{٩٥}{١٣}$ وبالضرب × ٢٦

∴ ٢٤ ق = ٢٢٨ + ٥ ق + ١٩٠

∴ ق = ٢٢ ثقل كجم.

∴ مقدار قوة الشد = ٢٢ ثقل كجم.

حل آخر :

∵ الجسم متزن وعلى وشك الحركة تحت تأثير ثلاثة قوى

هى ق ، رَ ، و

، بتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{ق}{جا [١٨٠° - (هـ + ل)]}$ = $\frac{و}{جا [٩٠° + (هـ + ل)]}$

∴ $\frac{ق}{جا (هـ + ل)}$ = $\frac{١٩}{جتا (هـ + ل)}$

∴ ق = ١٩ × $\frac{جا (هـ + ل)}{جتا (هـ + ل)}$

∴ ق = ١٩ × ظا (هـ + ل) = ١٩ × $\frac{ظا هـ + ظا ل}{١ - ظا هـ ظا ل}$

= ١٩ × $\frac{\frac{٥}{١٢} + \frac{١}{٢}}{١ - \frac{٥}{١٢} \times \frac{١}{٢}}$

= ٢٢ ث.كجم.

لاحظ أن

يمكن إيجاد قيمة ق باستخدام الآلة الحاسبة كما يلى :

ق = ١٩ × ظا [هـ + ل]

= ١٩ × ظا [جتا$^{-1}$ ($\frac{١٢}{١٣}$) + ظا$^{-1}$ ($\frac{١}{٢}$)]

= ٢٢ ث.كجم

مثال ٨

جسمان وزناهما ٣ و ، ٤ و متصلان بخيط خفيف ينطبق على خط أكبر ميل لمستوٍ مائل خشن ومعاملا الاحتكاك السكونى بينهما والمستوى $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٨}$ على الترتيب فإذا كانت هـ قياس الزاوية التى يصنعها المستوى مع الأفقى تزداد بالتدريج فأى الجسمين يوضع أسفل الآخر لكى يتحركا معًا والخيط بينهما مشدود مع ذكر السبب ثم أثبت أن : ظا هـ = $\frac{١}{٧}$ عندما يكون الجسمان على وشك الانزلاق.

الحـــل

الجسم ذو معامل الاحتكاك الأصغر يوضع أسفل الجسم ذو معامل الاحتكاك الأكبر حتى يتحرك الجسمان معًا والخيط مشدود بينهما

- بالنسبة للجسم الذى وزنه ٤ و :

∵ الجسم على وشك الحركة لأسفل

∴ ش + $\frac{١}{٨}$ ر٢ = ٤ و جا هـ ، ر٢ = ٤ و جتا هـ

∴ ش = ٤ و جا هـ − $\frac{١}{٨}$ × ٤ و جتا هـ

= ٤ و جا هـ − $\frac{١}{٢}$ و جتا هـ (١)

- بالنسبة للجسم الذى وزنه ٣ و :

∵ الجسم على وشك الحركة لأسفل :

∴ $\frac{١}{٦}$ ر١ = ش + ٣ و جا هـ ، ر١ = ٣ و جتا هـ

∴ ش = $\frac{١}{٦}$ × ٣ و جتا هـ − ٣ و جا هـ

= $\frac{١}{٢}$ و جتا هـ − ٣ و جا هـ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ٤ و جا هـ − $\frac{١}{٢}$ و جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ و جتا هـ − ٣ و جا هـ ∴ ٧ و جا هـ = و جتا هـ

∴ $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{١}{٧}$ ∴ ظا هـ = $\frac{١}{٧}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٩

وضع جسم وزنه (و) على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فإذا كانت زاوية الاحتكاك قياسها (ل) فأوجد مقدار واتجاه أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى.

الحـــل

بفرض أن القوة $\overleftarrow{ق}$ تصنع مع المستوى زاوية قياسها ى



، ∵ الجسم على وشك الحركة

∴ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى هى $\overleftarrow{ق}$

، $\overleftarrow{ر}$ (رد الفعل المحصل) ، $\overleftarrow{و}$

، ∵ قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين $\overleftarrow{ر}$ ، $\overleftarrow{و}$ = ١٨٠° − (هـ + ل)

، قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{و}$ = ٩٠° + (ى + هـ)

، قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$ = ٩٠° − ى + ل = ٩٠° − (ى − ل)

وباستخدام قاعدة لامى :

$$∴ \frac{ق}{\text{جا}\left(١٨٠° - (هـ + ل)\right)} = \frac{و}{\text{جا}\left(٩٠° - (ى - ل)\right)} = \frac{ر}{\text{جا}\left(٩٠° + (ى + هـ)\right)}$$

$$∴ \frac{ق}{\text{جا}(هـ + ل)} = \frac{و}{\text{جتا}(ى - ل)} = \frac{ر}{\text{جتا}(هـ + ى)}$$

$$∴ ق = \frac{و \ \text{جا}(هـ + ل)}{\text{جتا}(ى - ل)}$$

ويكون مقدار $\overleftarrow{ق}$ أقل ما يمكن عندما جتا (ى − ل) أكبر ما يمكن

أى : جتا (ى − ل) = ١ ∴ ى − ل = ٠ ∴ ى = ل

∴ مقدار أقل قوة = و جا (هـ + ل) وتصنع مع المستوى لأعلى زاوية قياسها ل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين 2 على اتزان جسم على مستوٍ مائل خشن

اختبار تفاعلي



من أسئلة الكتاب المدرسي

١ وضع جسم على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° وكان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{3}}{6}$ وضح مع ذكر السبب أن هذا الجسم لا يمكن أن يكون متزنًا.

---

٢ 📖 جسم وزنه ٣٨ ث.كجم يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية ظلها $\frac{1}{4}$ فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقي في نفس خشونة المستوى المائل وأثرت فيه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقي زاوية ظلها $\frac{3}{4}$ وتقع في مستوى رأسي فجعلته على وشك الحركة.

أوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد الفعل العمودي. «١٠ ، ٣٢ ث.كجم»

---

٣ وضع جسم وزنه ٤ نيوتن على مستوٍ يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم يساوي $\frac{\sqrt{3}}{4}$ أثرت على الجسم قوة تعمل في خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ومقدارها $\frac{1}{2}$ نيوتن فإذا كان الجسم متزنًا. فعيِّن قوة الاحتكاك وبيِّن ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا.

«ح = ١,٥ نيوتن لأعلى ، يكون الجسم على وشك الحركة»

---

٤ 📖 وضع جسم مقدار وزنه ٣ نيوتن على مستوٍ يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم يساوي $\frac{2}{3}$ أثرت على الجسم قوة تعمل في خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ومقدارها ٢ نيوتن. فإذا كان الجسم متزنًا ، عيِّن قوة الاحتكاك وبيِّن ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا.

« $\frac{1}{2}$ نيوتن لأسفل ، لا يكون الجسم على وشك الحركة»

---

٥ وضع جسم وزنه ٦٠ ثقل كجم على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° شد الجسم لأعلى المستوى بقوة موازية لخط أكبر ميل جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى يساوي $\frac{1}{\sqrt{3}}$

فأوجد مقدار قوة الشد. «٦٠ ثقل كجم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦ وضع جسم وزنه ١٥ نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$ ، شد الجسم بقوة لأعلى المستوى وموازية لخط أكبر ميل فجعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى فإذا كان مقدار هذه القوة يساوى ١٣ نيوتن.
فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى. « $\frac{١}{٣}$ »

---

٧ يرتكز جسم وزنه ٢٠ ثقل كجم على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ فإذا كانت أقل قوة تعمل فى اتجاه المستوى لأعلى لتحفظ توازن الجسم مقدارها يساوى ٨ ثقل كجم. فأوجد قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى. «$١٤^\circ ٢'$»

---

٨ جسم وزنه ٢٥ ث.كجم موضوع على مستوٍ مائل خشن يصنع مع الأفقى زاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$ فإذا علم أن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = $\frac{١}{٥}$ فأوجد أقل قوة تؤثر فى اتجاه يوازى المستوى وتمنع الجسم من الانزلاق. «١١ ث.كجم»

---

٩ وضع جسم وزنه ١٥ نيوتن على مستوٍ يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{٤}{٥}$ وكان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ٤٥° بيّن أن الجسم يبقى متزنًا ثم أوجد مقدار القوة التى تؤثر فى الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أسفل وتجعل الجسم على وشك الحركة. «٣ نيوتن»

---

١٠ جسم وزنه ١٨ ث.كجم موضوع على مستوٍ مائل خشن لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° فإذا نقص قياس زاوية ميل المستوى إلى ٣٠° فأوجد مقدار قوة الاحتكاك ثم أوجد مقدار القوة التى تؤثر فى الجسم عندئذٍ فى اتجاه خط أكبر ميل فى المستوى وتجعله على وشك الانزلاق. «٩ ، ١٨ ث.كجم»

---

١١ وضع جسم مقدار وزنه ٣٠ نيوتن على مستوٍ مائل خشن. لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا زيد قياس زاوية ميل المستوى إلى ٦٠° **فأوجد مقدار :**

(١) أقل قوة تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل فى المستوى وتمنعه من الانزلاق.

(٢) القوة التى تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل فى المستوى وتجعله على وشك الحركة إلى أعلى المستوى.

«$١٠\sqrt{٣}$ نيوتن ، $٢٠\sqrt{٣}$ نيوتن»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٢ وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك السكونى بينه وبين المستوى $\frac{\sqrt{3}}{2}$ بين ما إذا كان الجسم ينزلق على المستوى أو يكون على وشك الانزلاق أو أن الاحتكاك غير نهائى ، ثم أوجد مقدار واتجاه قوة الاحتكاك عندئذٍ. وإذا أثرت على الجسم قوة موازية لخط أكبر ميل للمستوى.

فأوجد مقدار واتجاه هذه القوة :

① ليكون الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى.

② ليكون الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى. «٢ ، ٥ ، ١ ث.كجم»

---

١٣ وضع جسم وزنه ٦٥ نيوتن على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{5}{12}$ ومعامل الاحتكاك السكونى بينه وبين المستوى = $\frac{1}{3}$ أثرت على الجسم قوة مقدارها ٩ نيوتن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى بحيث ظل الجسم متزنًا. عيِّن مقدار واتجاه قوة الاحتكاك وبيِّن ما إذا كانت نهائية أم لا واذكر التغيير الذى يجب أن يحدث لمقدار القوة حتى يصبح الجسم على وشك الحركة إلى أسفل. «١٦ نيوتن لأعلى ، لا ، نقص مقدار $\overrightarrow{ق}$ إلى ٥ نيوتن»

---

١٤ وضع جسم وزنه ٦٠ ثقل كجم على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{3}}{3}$ شد الجسم لأعلى بقوة تصنع مع المستوى زاوية قياسها ٣٠° فجعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى.

أوجد مقدار هذه القوة. «$٣٠\sqrt{3}$ ثقل كجم»

---

١٥ وضع جسم وزنه ١٠ ث.كجم على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ، ربط الجسم فى حبل وشد الحبل لأعلى بقوة مقدارها $٤\sqrt{3}$ ث.كجم فإذا علم أن الحبل واقع فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل للمستوى وكان قياس الزاوية بين الحبل وبين خط أكبر ميل = ٣٠° وكان الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى. فاحسب معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى. «$\frac{1}{9}\sqrt{3}$»

---

١٦ وضع جسم وزنه ٣٠ نيوتن على مستوٍ يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{12}{5}$ ومعامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{2}{3}$ أوجد مقدار القوة الأفقية التى تؤثر فى الجسم والواقعة فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل والتى عندها يصبح الجسم على وشك الانزلاق. «٢٠ نيوتن»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٧ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٥}{١٣}$ شد الجسم بقوة أفقية مقدارها ٢٢ نيوتن واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل للمستوى جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى هو $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد مقدار وزن الجسم (و) «١٩٠ نيوتن»

١٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى مائل خشن فكان على وشك الانزلاق ، فإذا كانت قوة الاحتكاك النهائى $٣\sqrt{٣}$ نيوتن فإن قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى يساوى ....°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

② وضع جسم على مستوى خشن مائل وكانت زاوية احتكاك الجسم مع المستوى ل وكان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإن الجسم يظل متزنًا إذا وفقط إذا كان ....

(أ) هـ > ل (ب) هـ ≤ ل (جـ) هـ ≥ ل (د) هـ = ٢ ل

③ وضع جسم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ وكان الجسم متزنًا على المستوى فإن ....

(أ) θ = ٣٠° (ب) θ > ٣٠° (جـ) θ ≥ ٣٠° (د) θ ≤ ٣٠°

④ إذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين جسم ومستوى مائل خشن يساوى $\sqrt{٣}$ فإن قياس زاوية ميل هذا المستوى على الأفقى عندما يكون الجسم على وشك الانزلاق بتأثير وزنه فقط = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٧٥°

⑤ إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها $جا^{-١} \frac{٥}{١٣}$ وكان على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط فإن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يساوى ....

(أ) $\frac{٥}{١٣}$ (ب) $\frac{٥}{١٢}$ (جـ) $\frac{١٢}{١٣}$ (د) $\frac{١٢}{٥}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑥ فى الشكل المقابل :

الجسم على وشك الانزلاق إلى أسفل المستوى فيكون معامل الاحتكاك السكونى = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

⑦ إذا وضع جسم على مستوى خشن وكان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى تساوى قياس زاوية الاحتكاك فإن الجسم ....

(أ) يستقر على المستوى. (ب) يتحرك على المستوى.

(جـ) يكون على وشك الحركة أسفل المستوى.

(د) يكون على وشك الحركة أعلى المستوى.

⑧ وضع جسم على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ فإن هذا الجسم ....

(أ) على وشك الحركة لأعلى المستوى. (ب) على وشك الحركة لأسفل المستوى.

(جـ) يتحرك على المستوى. (د) يبقى ساكنًا.

⑨ وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين المستوى $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن الجسم ....

(أ) يكون على وشك الحركة لأعلى المستوى.

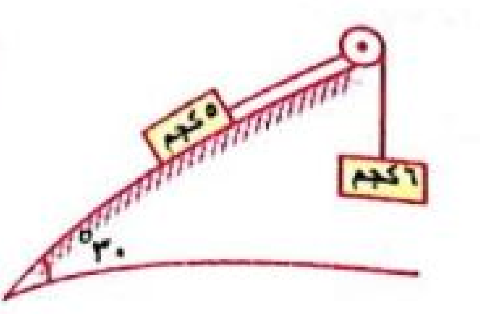
(ب) يكون على وشك الحركة لأسفل المستوى.

(جـ) يتحرك على المستوى. (د) يبقى ساكنًا.

⑩ وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق وعندما ازدادت زاوية ميل المستوى على الأفقى تحرك الجسم لأسفل المستوى فإن قوة الاحتكاك عندئذٍ ....

(أ) انعدمت. (ب) نقصت. (جـ) زادت. (د) أصبحت لا نهائية.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



(١١) فى الشكل المقابل :
جسم كتلته ٥ كجم موضوع على مستوى مائل خشن ومتصل بخيط خفيف يمر على بكرة ملساء عند حافة المستوى ويتدلى من الطرف الآخر للخيط جسم كتلته ٦ كجم إذا كانت المجموعة متزنة فإن مقدار واتجاه قوة الاحتكاك تكون ....

(أ) ٣,٥ ث.كجم. لأعلى المستوى.
(ب) ٣,٥ ث.كجم. لأسفل المستوى.
(جـ) ٨,٥ ث.كجم. لأعلى المستوى.
(د) ٨,٥ ث.كجم. لأسفل المستوى.

(١٢) وضع جسم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فانزلق مباشرة لأسفل المستوى فإن ....

(أ) قياس زاوية الاحتكاك = ٣٠°
(ب) معامل الاحتكاك السكونى $م_س < \frac{\sqrt{٣}}{٣}$
(جـ) معامل الاحتكاك الحركى $م_ك < \frac{\sqrt{٣}}{٣}$
(د) وزن الجسم يساوى قوة الاحتكاك الحركى.

(١٣) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق فإن ظل زاوية الاحتكاك يساوى كلاً مما يأتى ما عدا ....

(أ) معامل الاحتكاك.
(ب) النسبة بين مقدار رد الفعل العمودى ومقدار رد الفعل المحصل.
(جـ) ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى.
(د) النسبة بين مقدار الاحتكاك النهائى ومقدار رد الفعل العمودى.

(١٤) وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (θ) ومعامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوى (م) فإن القوة المماسية التى تؤثر على الجسم وتجعل الاحتكاك منعدم تساوى .... نيوتن.

(أ) م و
(ب) م جا θ
(جـ) م و جا θ
(د) و جا θ

---

١٩ مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها يساوى $\frac{٥}{١٣}$ ، وضع عليه جسم مقداره وزنه ١٣٠ نيوتن وأثرت عليه قوة فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى. فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{٢}{٥}$ فأوجد النهايتين اللتين ينحصر بينهما مقدار القوة التى تجعل الجسم فى حالة اتزان على المستوى.

«١٤٠ ، ١٠٠ نيوتن»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٠ وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ فإذا كان أقل وأكبر قوة موازية لخط أكبر ميل وتجعل الجسم متزنًا على المستوى هما ١٠ ، ٤٠ نيوتن على الترتيب. أوجد معامل الاحتكاك وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

«$\frac{\sqrt{٣}}{٥}$ ، ٣٠°»

---

٢١ جسم موضوع على مستوٍ مائل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° تؤثر فيه قوة $\overleftarrow{ق}$ موازية للمستوى وفى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى وقد وجد أنه إذا كان مقدار $\overleftarrow{ق}$ = ١ ث.كجم كان الجسم على وشك الحركة إلى أسفل وإذا كان مقدار $\overleftarrow{ق}$ = ٣ ث.كجم كان الجسم على وشك الحركة إلى أعلى. أوجد وزن الجسم ومعامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى.

«٤ ث.كجم ، $\frac{١}{٦}\sqrt{٣}$»

---

٢٢ وضع جسم وزنه ١٥٠ ث.جم على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ ثم ربط بخيط يمر على بكرة ملساء عند قمة المستوى. فإذا كان مقدار أقل ثقل يمكن تعليقه فى الطرف الآخر للخيط هو ٢٥ $\sqrt{٢}$ ث.جم ومقدار أكبر ثقل يمكن تعليقه هو ١٢٥ $\sqrt{٢}$ ث.جم دون أن يختل التوازن. فأوجد هـ وكذا معامل الاحتكاك السكونى.

«٤٥° ، $\frac{٢}{٣}$»

---

٢٣ وضع جسم وزنه ٥٠٠ ث.جم على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث ظا هـ = $\frac{٤}{٣}$ ثم ربط الجسم بخيط يمر على بكرة ملساء عند قمة المستوى ويتدلى من طرفه كفة ميزان كتلتها ٢٥ جم فإذا كان أقل ثقل يلزم وضعه فى الكفة حتى يظل الجسم متزنًا هو ١٧٥ جم. فأوجد معامل الاحتكاك السكونى ثم أثبت أن أكبر ثقل يمكن وضعه فى الكفة دون أن يختل التوازن هو ٥٧٥ جم.

«$\frac{٢}{٣}$»

---

٢٤ وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها يساوى $\frac{٤}{٣}$ فإذا كان $ق_١$ هو مقدار أقل قوة موازية لخط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى وتمنع الجسم من الانزلاق لأسفل ، $ق_٢$ هو مقدار أقل قوة أفقية تمنعه أيضًا من الانزلاق لأسفل وكان $ق_١ = ق_٢$ فأوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى ومقدار أى من القوتين.

«$\frac{١}{٢}$ ، ١٠ نيوتن»

---

٢٥ وضع جسم وزنه ٣ ث.كجم على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فوجد أنه على وشك الانزلاق. فإذا أدير المستوى إلى أن أصبح ميله على الأفقى ٦٠° فأوجد مقدار القوة التى تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى وتجعل الجسم على وشك

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحركة إلى أسفل. وإذا استعضنا عن هذه القوة بقوة أخرى أفقية.

فأثبت أن مقدارها يساوى مقدار القوة الأولى. «$\sqrt{3}$ ث.كجم»

٢٦ وضع جسم وزنه ٨ ث.كجم على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° لوحظ أن مقدار أقل قوة أفقية تؤثر على الجسم وتجعله فى حالة توازن هى ٤ ث.كجم.

أوجد : (١) معامل الاحتكاك السكونى. «$\frac{1}{3}$ ، ١٦ ث.كجم»

(٢) أكبر مقدار لهذه القوة.

٢٧ وضع جسم وزنه ٨ $\sqrt{3}$ ث.كجم على مستوٍ أفقى خشن ثم أميل المستوى بالتدريج فأصبح على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميل المستوى = ٣٠°

أوجد مقدار أكبر قوة تؤثر فى الجسم لحفظ التوازن :

(١) إذا كانت القوة أفقية.

(٢) إذا كانت القوة تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° «٢٤ ث.كجم ، ١٢ ث.كجم»

٢٨ وضع جسم وزنه ٢ ثقل كجم على مستوٍ أفقى خشن ثم أميل المستوى تدريجيًا حتى أصبح الجسم على وشك الانزلاق أسفل المستوى عندما كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى ٣٠° أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى. وإذا ربط الجسم عندئذٍ بخيط ثم شد الخيط فى اتجاه يميل بزاوية قياسها ٦٠° على الأفقى حتى أصبح الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى. **فأوجد :**

(١) مقدار قوة الشد. (٢) مقدار قوة الاحتكاك. «$\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\sqrt{3}$ ثقل كجم ، $\frac{1}{2}$ ثقل كجم»

٢٩ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) وضع جسم وزنه ٤ ث.كجم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° ومعامل الاحتكاك السكونى بينهما $م_س = \frac{1}{2}$ فإن مقدار أكبر قوة تحفظ توازن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى هى .... ث.كجم.

(أ) ٣ $\sqrt{2}$ (ب) ٢ $\sqrt{2}$ (جـ) $\sqrt{2}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(٢) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ وأثرت عليه قوة مقدارها (و) فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى مستوى وأصبح الجسم على وشك الحركة لأعلى فإن : $م_س$ + ظا هـ = ...

(أ) قا هـ (ب) قتا هـ (جـ) جا هـ (د) جتا هـ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

③ وضع جسم مقدار وزنه ٥٠ نيوتن على مستوٍ مائل خشن تؤثر عليه قوة ق فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما ق = ٣٠ نيوتن ويكون على وشك الحركة إلى أسفل عندما ق = ٢٠ نيوتن فإن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = ...

(أ) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{15}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{1}{3}$

④ جسم وزنه (و) ث.جم إذا وضع على مستوى أفقى خشن واثرت عليه قوة أفقية مقدارها ١٠٠ ث.جم لأصبح على وشك الحركة وإذا أميل المستوى بزاوية قياسها ٤٥° على الأفقى واثرت على الجسم قوة مقدارها ١٥٠ $\sqrt{2}$ ث.جم لأعلى المستوى لجعلت الجسم على وشك الانزلاق فإن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = ...

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

⑤ فى الشكل المقابل :

جسم وزنه ١٢ ث.كجم موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{3}}{9}$ فإن أقل قوة عمودية على المستوى وتحفظ الجسم فى حالة اتزان = ... ث.كجم.

(أ) ٤ $\sqrt{3}$ (ب) ٩ $\sqrt{3}$ (جـ) ١٢ $\sqrt{3}$ (د) ١٨ $\sqrt{3}$

---

٣٠ يجر حصان حجرًا بحبل صاعدًا على طريق يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ بينما يميل الحبل على الطريق بزاوية قياسها ى فإذا علم أن قياس زاوية الاحتكاك بين الطريق والحجر تساوى ل وأن الحصان يوشك أن يحرك الحجر فأثبت أن مقدار الشد فى الحبل يكون أصغر ما يمكن عندما ى = ل ، احسب هذا المقدار عندما كتلة الحجر = ١٠٠٠ كجم ، هـ + ل = ٣٠°

«٥٠٠ ث.كجم.»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣١ وضع جسم مقدار وزنه (و) نيوتن على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ وزاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ل حيث هـ > ل فإذا كان مقدار أقل قوة أفقية تكفى لمنع الجسم من الانزلاق تساوى ($\frac{1}{2}$ و) نيوتن ومقدار القوة الأفقية التى تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى تساوى (٢ و) نيوتن.

فأوجد قياس كلٍ من : هـ ، ل

«٤٥° ، ٦َ ٢٦ً ١٨°»

---

٣٢ كتلتان ٣ ، ٥ كجم متصلان بخيط خفيف وموضوعتان على مستوى مائل خشن وكان معامل الاحتكاك السكونى بين المستوى والجسمين $\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{5}$ على الترتيب. بين أى الجسمين يوضع أسفل الجسم الآخر حتى يتحرك الجسمان معًا ، ثم أثبت أن ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى عندما يكون الجسمان على وشك الحركة $\frac{3}{4}$

---

٣٣ جسمان وزناهما ٢ و ، ٣ و متصلان بخيط خفيف ينطبق على خط أكبر ميل لمستوٍ مائل خشن ومعاملا الاحتكاك السكونى بينهما والمستوى $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{6}$ على الترتيب فإذا كانت هـ قياس الزاوية التى يصنعها المستوى مع الأفقى تزداد بالتدريج فأى الجسمين يوضع أسفل الآخر لكى يتحركا معًا والخيط بينهما مشدود مع ذكر السبب ثم أثبت أن : ظا هـ = $\frac{1}{5}$ عندما يكون الجسمان على وشك الانزلاق.

---

٣٤ وضع جسم مقدار وزنه و على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فوجد أنه على وشك الانزلاق. أثبت أن القوة التى توازى خط أكبر ميل للمستوى وتجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى تساوى ٢ و جا هـ أثبت أيضًا أن مقدار رد الفعل المحصل يساوى و

---

٣٥ وضع جسم مقدار وزنه (و) نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ ، وقياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ل حيث هـ > ل وأثرت قوة (ق) على الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى. أثبت أن قيم ق التى تجعل الجسم متزنًا تحقق المتباينة : $\frac{\text{و جا}(هـ - ل)}{\text{جتا ل}} \leq ق \leq \frac{\text{و جا}(هـ + ل)}{\text{جتا ل}}$ وإذا كانت : و = ٣ $\sqrt{3}$ ، ق (د هـ) = ٢ ق (د ل) = ٦٠° أوجد الفترة التى تنتمى إليها ق

«[٢ ، ٦]»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٣٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① وضع جسمان من مادتين مختلفتين وزنيهما $و_١$ ، $و_٢$ على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها = θ ومعامل الاحتكاك بين المستوى والجسمين هما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب فإذا كان الجسمان على وشك الحركة فإن : ....

(أ) $و_١ = و_٢$ (ب) $م_١ = م_٢$

(جـ) $و_١ م_١ = و_٢ م_٢$ (د) $و_١ \text{ جا } \theta = و_٢ \text{ جتا } \theta$

② جسم وزنه ٨ ث.كجم موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى $(م_س) = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$

أثرت عليه قوة $ق$ فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى فإن :

أولًا : $ق$ بالثقل كيلو جرام التى تجعل الجسم على وشك الحركة $\in$ ....

(أ) {٢} (ب) {٦} (جـ) {٢ ، ٦} (د) [٢ ، ٦]

ثانيًا : $ق$ بالثقل كيلو جرام التى تجعل الجسم متزن $\in$ ....

(أ) {٢} (ب) {٦} (جـ) {٢ ، ٦} (د) [٢ ، ٦]

③ جسم وزنه ١٢ نيوتن موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى $(م_س) = \sqrt{٣}$ اثرت عليه قوة $ق$ فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى فجعلته على وشك الحركة فأى مما يأتى يكون صحيحًا لتحديد مقدار واتجاه $ق$ ؟

(I) ١٢ نيوتن لأعلى. **(II)** ١٢ نيوتن لأسفل. **(III)** ٢٤ نيوتن لأعلى.

(أ) **II** فقط (ب) **III** فقط (جـ) **I** ، **II** (د) **II** ، **III**

④ إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ° وكانت $ق_١$ ، $ق_٢$ هما أكبر وأقل قوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى وتحافظان على توازن الجسم وكانت $ح_س$ هى قوة الاحتكاك السكونى النهائى فإن :

أولًا : $ق_١ + ق_٢ =$ ....

(أ) ٢ و جا هـ (ب) و جا هـ (جـ) ٢ و جتا هـ (د) ٢ $م_س$ ر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثانيًا : $ق_1 - ق_2$ = ...

(أ) ٢ و جا هـ

(ب) و جا هـ + ح س

(جـ) ٢ ح س

(د) و جا هـ − ح س

⑤ وضع جسم مقدار وزنه ٥٠ نيوتن على مستوٍ مائل خشن تؤثر عليه قوة ق فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى إذا علم أن قيمة ق بالنيوتن التى تجعل الجسم فى حالة اتزان تنتمى للفترة [٢٠ ، ٣٠] فإن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١٥}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{١}{٣}$

⑥ فى الشكل المقابل :

جسم وزنه ٥ ث.كجم موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ حيث جا θ = $\frac{٣}{٥}$ مربوط بأحد طرفى خيط خفيف غير مرن والطرف الأخر للخيط مثبت فى حاجز عمودى على المستوى بحيث كان الحبل يوازى خط أكبر ميل للمستوى فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى المائل هو ٠,٨ .

فإن الشد فى الحبل = ... ث.كجم.

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٣,٢ (د) ٤

⑦ فى الشكل المقابل :

مستويان مائلان الأول أملس ويميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° والثانى خشن ويميل على الأفقى بزاوية قياسها θ حيث جا θ = $\frac{٣}{٥}$ وضع جسمان أ ، ب كتلتيهما ٣٠ كجم ، ١٠ كجم على المستويان الخشن والأملس على الترتيب ويتصل الجسمان بخيط خفيف غير مرن يمر على بكرة ملساء عند نقطة تلاقى المستويين فإذا كانت المجموعة على وشك الحركة فإن معامل الاحتكاك بين الجسم أ والمستوى = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٢٣}{٢٤}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣٧ مستويان مائلان متساويا الخشونة ارتفاعهما مشترك ويساوى ٦٠ سم وطول أحد المستويين ٧٥ سم وطول الآخر ١٠٠ سم وضع جسمان متساويا الكتلة كل منهم على مستوى ويتصل الجسمان بخيط يمر على بكرة ملساء مثبتة عند قمة المستويين فإذا كانت المجموعة على وشك الحركة. فأوجد معامل الاحتكاك السكونى. «$\frac{1}{7}$»

---

٣٨ سطح أفقى خشن على شكل مربع أ ب حـ ء فيه م نقطة تقاطع قطريه. وضع جسم وزنه ٢ ث.كجم عند م وأثرت عليه قوتان كل منهما تساوى ٥ ث.كجم فى اتجاه $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{م حـ}$. أوجد قوة الاحتكاك. وإذا دار السطح حول $\overleftrightarrow{ب حـ}$ بزاوية قياسها 30° لأعلى فأصبح الجسم على وشك الحركة. أوجد معامل الاحتكاك السكونى.

«٥ $\sqrt{2}$ ث.كجم ، $\frac{5\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$»

---

٣٩ وضع جسم مقدار وزنه (و) على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ ومعامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يساوى $م_س$ فإذا كانت ق هى أقل قوة تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى وكانت ق َ هى أقل قوة موازية للمستوى تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى ، **فأثبت أن :** $ق َ = ق \sqrt{1 + م_س^2}$

---

٤٠ وضع جسم مقدار وزنه (و) على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإذا كانت زاوية الاحتكاك قياسها ل

① أوجد اتجاه ومقدار أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى.

② إذا كانت هـ > ل فأوجد مقدار واتجاه أقل قوة واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل تكفى لمنع انزلاق الجسم إلى أسفل.

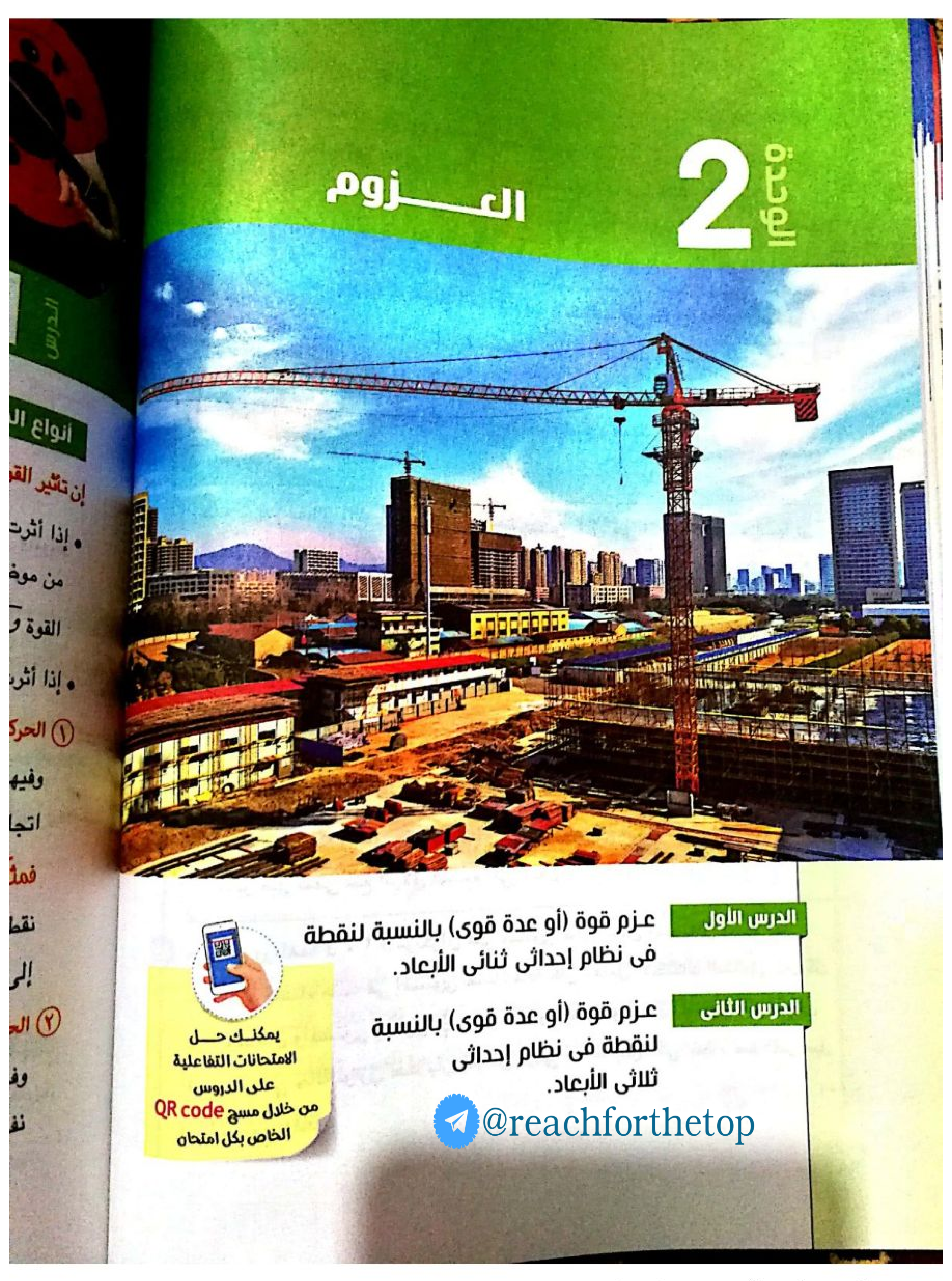
«و جا (هـ + ل) ، و جا (هـ − ل)»

---

٤١ جسمان وزناهما و ، ٣ و مرتكزان على مستوى مائل خشن ومتصلان بخيط يمر على بكرة ملساء مثبته فى المستوى نفسه. فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين كل من الجسمين والمستوى يساوى $\frac{1}{2}$ فأوجد أكبر قيمة لزاوية ميل المستوى بحيث يظل الجسمان فى حالة توازن علمًا بأن كلًا من فرعى الخيط يكونا فى اتجاه خط أكبر ميل فى المستوى المائل.

«45°»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الوحدة 2 العـــزوم

الدرس الأول عـزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثنائى الأبعاد.

الدرس الثانى عـزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثلاثى الأبعاد.

يمكنك حـل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

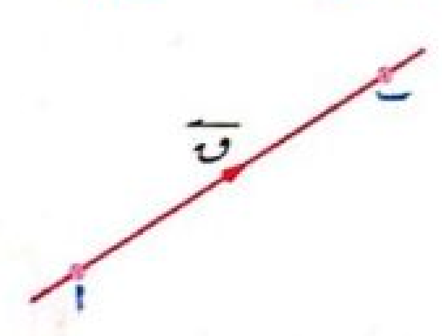


الدرس **1**

عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة في نظام إحداثي ثنائي الأبعاد

أنواع الحركة

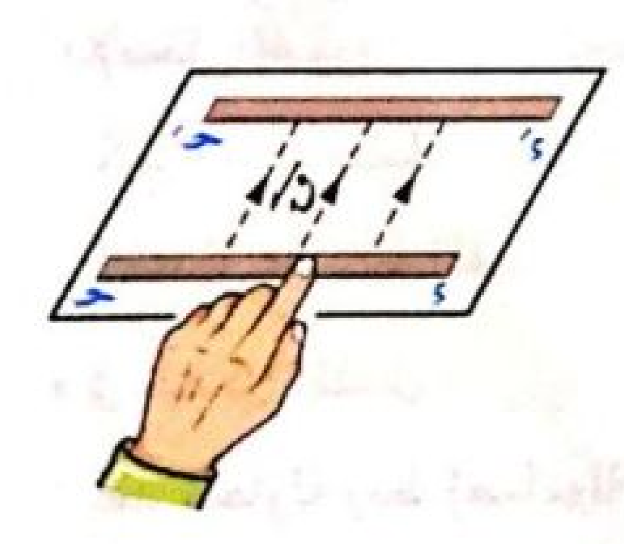
إن تأثير القوة على النقط المادية يختلف عن تأثيرها على الأجسام المتماسكة ونوضح ذلك كما يلي :



- إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ على نقطة مادية (أو جسيم) فإنها تنتقل من موضعها وليكن أ إلى موضع آخر وليكن ب في اتجاه القوة $\overleftarrow{ق}$ ويسمى هذا النوع من الحركة بالحركة الانتقالية.
- إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ على جسم متماسك فإن حركة الجسم تكون إحدى ثلاثة أنواع من الحركة :

(١) الحركة الانتقالية :

وفيها تتحرك جميع أجزاء الجسم مسافات متساوية في اتجاه $\overleftarrow{ق}$



فمثلًا : عند دفع مسطرة موضوعة على نضد أفقي من نقطة منتصفها فإن المسطرة تنتقل من موضعها $\overline{ءحـ}$ مثلاً إلى موضع آخر $\overline{ء'حـ'}$ بحيث $\overline{ء'حـ'} // \overline{ءحـ}$



(٢) الحركة الدورانية :

وفيها تتحرك جميع أجزاء الجسم على أقواس دائرية لها نفس المركز.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

فمثلًا : عند دفع مسطرة موضوعة على نضد أفقى من أحد طرفيها بعد تثبيتها من الطرف الآخر فإنها تدور حول نقطة التثبيت أى تتحرك جميع أجزائها على أقواس دائرية مركزها نقطة التثبيت.

وهناك العديد من الأمثلة على الأجسام التى تتحرك حركة دورانية فى حياتنا مثل حركة الأبواب والشبابيك وعقارب الساعة.

③ الحركة التى تجمع بين الحركة الانتقالية والدورانية :

ويتضح لنا عند دفع مسطرة موضوعة على نضد أفقى من نقطة تبعد عن منتصفها دون تثبيت أحد طرفيها فنجد أن حركتها تكون مزيجًا من الحركتين الانتقالية والدورانية.

عزم قوة بالنسبة لنقطة

هو كمية متجهة تحدد لنا مقدرة القوة على إحداث دوران للجسم حول نقطة أو محور وتتوقف على عاملين :

① معيار (أى مقدار) القوة. ② بُعد خط عملها عن مركز أو محور الدوران.

فمثلًا :

• فى الشكل المقابل :



عند محاولة فتح أو غلق الباب من نقطة تقترب من خط المفصلات (محور الدوران) فإننا نجد صعوبة فى ذلك أى أننا نحتاج قوة كبيرة لذلك بينما لا نحتاج سوى لقوة صغيرة لدوران الباب كلما ابتعدنا عن خط المفصلات (محور الدوران).

• فى الشكل المقابل :



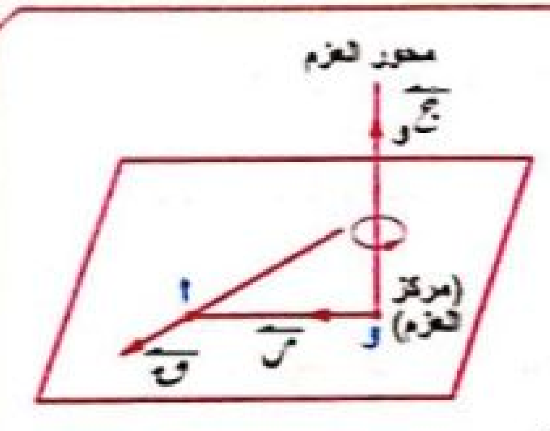
عند محاولة ربط (صامولة) باستخدام (مفتاح إنجليزى) فإننا نجد صعوبة فى ذلك إذا كان ذراع المفتاح قصيرًا بينما لا نحتاج سوى لقوة صغيرة لدوران (الصامولة) كلما كان ذراع المفتاح طويلًا.



• **في الشكل المقابل :**

لكى يحافظ الأب وابنه على اتزان الأرجوحة لابد أن يكون الأب (الأثقل وزنًا) أكثر قربًا من مركز الدوران من ابنه (الأخف وزنًا) ثم بعد ذلك يمكن للأب أن يبتعد أكثر من مركز الدوران فيعمل على دوران الأرجوحة حيث يرتفع الابن لأعلى أو يقترب أكثر من مركز الدوران فيعمل على دوران الأرجوحة حيث ينخفض الابن لأسفل.

تعريف



يعرف متجه عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة (و) ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$ على أنه الكمية المتجهة $\overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$

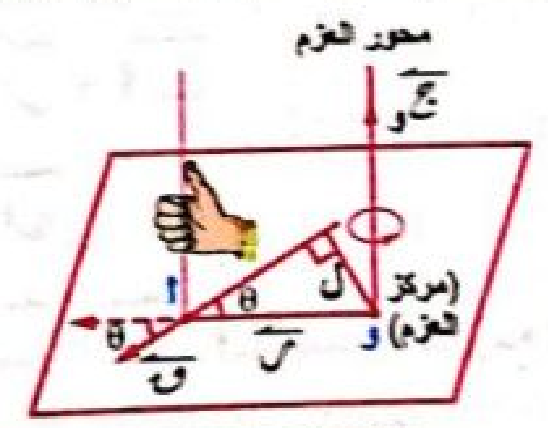
أي أن : $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$

حيث $\overrightarrow{\text{ر}}$ هو متجه الموضع لأى نقطة أ على خط عمل القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة (و)

وتسمى النقطة (و) مركز العزوم ويسمى المستقيم المار بالنقطة (و) عموديًا على المستوى الذى يحتوى القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ والنقطة (و) بمحور العزم.

• **اتجاه متجه العزم :**

إذا كانت θ الزاوية الصغرى بين $\overrightarrow{\text{ر}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ عند رسمهما خارجين من نفس النقطة أو داخلين إلى نفس النقطة يكون متجه العزم $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$ عموديًا على المستوى الذى يجمع $\overrightarrow{\text{ر}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ ويتحدد اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمنى عند دوران المتجه $\overrightarrow{\text{ر}}$ نحو $\overrightarrow{\text{ق}}$ عبر الزاوية θ كالتالى :



، من تعريف الضرب الاتجاهى يكون ، $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = (\text{ر}\ \text{ق}\ \text{جا}\ \theta)\ \overrightarrow{\text{ى}}$

حيث $\text{ر} = |\overrightarrow{\text{ر}}|$ ، $\text{ق} = |\overrightarrow{\text{ق}}|$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يحوى $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$ فى اتجاه متجه العزم $\overleftarrow{ج}_و$

* معيار متجه العزم $\| \overleftarrow{ج}_و \| = \| \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} \| = ر\, ق\, جا\, \theta$

$\therefore$ $\| \overleftarrow{ج}_و \| = ر\, ق\, جا\, \theta$ حيث $ر = \| \overleftarrow{ر} \|$ ، $ق = \| \overleftarrow{ق} \|$

* وإذا كان ل هو طول العمود الساقط من و على خط عمل $\overleftarrow{ق}$ فإن : $ل = ر\, جا\, \theta$

$\because \| \overleftarrow{ج}_و \| = ق\, (ر\, جا\, \theta)$ $\therefore$ $\| \overleftarrow{ج}_و \| = ق\, ل$ أى أن : $\overleftarrow{ج}_و = (ق\, ل)\, \overleftarrow{ى}$

ملاحظتان

① $\because$ معيار عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة إلى و $= ق \times ل$

$\therefore$ وحدة معيار العزم = وحدة معيار القوة × وحدة الطول

مثل : نيوتن. متر ، داين. سم ، .....

② $ل = \dfrac{\| \overleftarrow{ج}_و \|}{ق}$

أى أن : طول العمود الساقط من و على خط عمل $\overleftarrow{ق} = \dfrac{\text{معيار متجه العزم } \overleftarrow{ج}_و}{\text{معيار القوة } \overleftarrow{ق}}$

ملاحظة

عزم قوة بالنسبة لنقطة ثابت لا يتوقف على موضع نقطة تأثير القوة على خط عمل $\overleftarrow{ق}$

الإثبات : بفرض أن ا ، ب نقطتان على خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$ هو متجه موضع النقطة ا بالنسبة إلى النقطة و ، $\overleftarrow{ر}_1$ هو متجه موضع النقطة ب بالنسبة إلى النقطة و

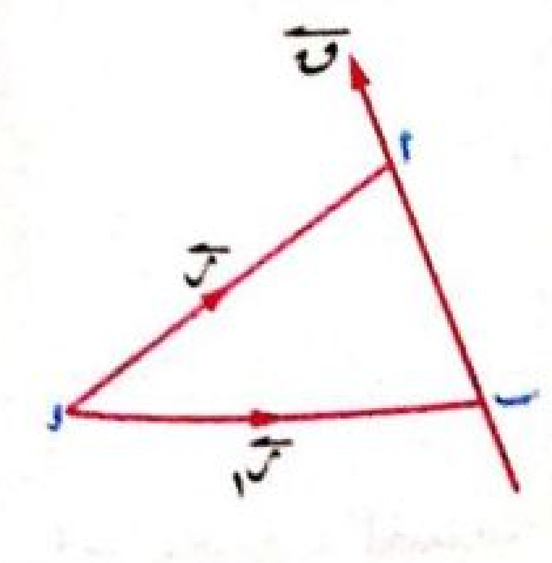
$\therefore \overleftarrow{ر}_1 = \overleftarrow{و ب} = \overleftarrow{و ا} + \overleftarrow{ا ب} = \overleftarrow{ر} + \overleftarrow{ا ب}$

$\therefore \overleftarrow{ر}_1 \times \overleftarrow{ق} = (\overleftarrow{ر} + \overleftarrow{ا ب}) \times \overleftarrow{ق}$

$= \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} + \overleftarrow{ا ب} \times \overleftarrow{ق}$ (خاصية التوزيع)

$= \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} + \overleftarrow{0}$ (لأن $\overleftarrow{ا ب}$ يوازى $\overleftarrow{ق}$)

$\therefore \overleftarrow{ر}_1 \times \overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ج}_و$



(وهو المطلوب)

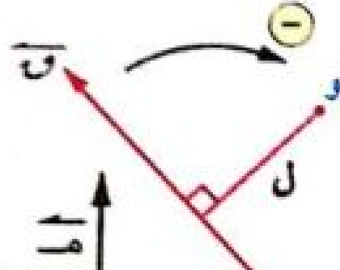
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

القياس الجبرى لمتجه العزم

إذا حددنا متجه وحدة ثابت $\overrightarrow{م}$ عمودى على المستوى الذى تعيناه خط عمل $\overrightarrow{ق}$ والنقطة «و»

فإنه يمكن التعبير عن متجه العزم $\overrightarrow{ج}_و$ منسوبًا لمتجه $\overrightarrow{م}$ كالآتى :

$\overrightarrow{ج}_و = ج_و \overrightarrow{م}$ حيث $ج_و$ يسمى القياس الجبرى لمتجة العزم $\overrightarrow{ج}_و$ ويكون



① $ج_و = ق ل$ «موجب» أى أن : $\overrightarrow{ج}_و = (ق ل) \overrightarrow{م}$

إذا كان : • $\overrightarrow{ج}_و$ فى اتجاه $\overrightarrow{م}$

• القوة $\overrightarrow{ق}$ تعمل على الدوران حول «و» فى اتجاه ضد اتجاه حركة عقارب الساعة

② $ج_و = - ق ل$ «سالب» أى أن : $\overrightarrow{ج}_و = (- ق ل) \overrightarrow{م}$

إذا كان : • $\overrightarrow{ج}_و$ فى عكس اتجاه $\overrightarrow{م}$

• القوة $\overrightarrow{ق}$ تعمل على الدوران حول «و» فى اتجاه مع اتجاه حركة عقارب الساعة

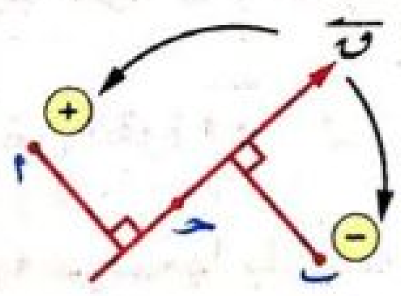
③ $ج_و =$ صفر أى أن : $\overrightarrow{ج}_و = \overrightarrow{0}$

إذا كان خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يمر بالنقطة «و»

ملاحظات

① يطلق اسم «ذراع العزم» على طول العمود (ل) الساقط من النقطة و على خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$

② القياس الجبرى لعزم القوة الواحدة قد يكون موجبًا حول نقطة وسالبًا حول نقطة أخرى وصفرًا حول نقطة ثالثة.



فى الشكل المقابل : $ج_أ$ (موجب) ، $ج_ب$ (سالب) ، $ج_{جـ} =$ صفر

③ لاحظ الفرق بين : $\overrightarrow{ج}_و$ ، $ج_و$ ، $\|\overrightarrow{ج}_و\|$

• $\overrightarrow{ج}_و$: متجه العزم حيث

$\overrightarrow{ج}_و = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} =$ { $(ق ل) \overrightarrow{م}$ إذا كان الدوران فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة
$(- ق ل) \overrightarrow{م}$ إذا كان الدوران فى نفس اتجاه دوران عقارب الساعة }

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

! أو صفر كما ذكرنا سابقًا

- $ج_و$: القياس الجبرى لمتجه العزم حيث $ج_و = ق \times ل$ أو $-ق \times ل$ أو صفر كما ذكرنا سابقًا
- $\| \overline{ج_و} \|$: معيار متجه العزم وهو كمية موجبة دائمًا

حيث $\| \overline{ج_و} \| = \| \overline{ر} \times \overline{ق} \|$ أو $\| \overline{ج_و} \| = | ج_و |$

④ إذا كانت $\{ \overline{س} ، \overline{ص} ، \overline{ع} \}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة ، «و» نقطة الأصل وإذا أثرت قوة $\overline{ق} = أ_١ \overline{س} + ب_١ \overline{ص}$ عند النقطة حـ $(أ_٢ ، ب_٢)$

فإن : $\overline{ج_و} = \overline{وحـ} \times \overline{ق}$

$$= (أ_٢ \overline{س} + ب_٢ \overline{ص}) \times (أ_١ \overline{س} + ب_١ \overline{ص})$$

$$= (أ_٢ ب_١ - أ_١ ب_٢) \overline{ع}$$

ويكون : $ج_و$ (القياس الجبرى لعزم $\overline{ق}$ حول و) $= أ_٢ ب_١ - أ_١ ب_٢$

فمثلًا : إذا كانت : $\overline{ق} = ٣ \overline{س} - ٤ \overline{ص}$ تؤثر فى أ $(٢ ، ٣)$

فإن : $\overline{ج_و} = \overline{وأ} \times \overline{ق} = (٢ \overline{س} + ٣ \overline{ص}) \times (٣ \overline{س} - ٤ \overline{ص})$

$$= (٢ \times (-٤) - ٣ \times ٣) \overline{ع} = -١٧ \overline{ع}$$

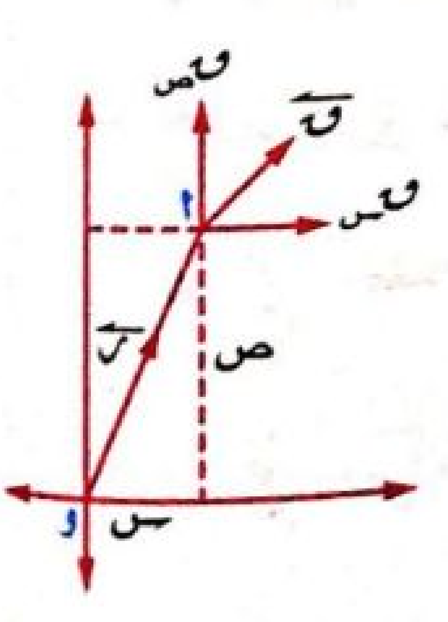
∴ $ج_و$ (القياس الجبرى لعزم $\overline{ق}$ حول و) $= -١٧$

مبدأ العزوم (نظرية فارينون)

عزم القوة $\overline{ق}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة.

بفرض القوة $\overline{ق} = ق_س \overline{س} + ق_ص \overline{ص}$ تؤثر فى نقطة أ

متجه موضعها بالنسبة للنقطة و هو $\overline{ر} = (س ، ص)$ فإن :



$$\overline{ج_و} = \overline{ر} \times \overline{ق}$$

$$= (س ، ص) \times (ق_س ، ق_ص)$$

$$= (س ق_ص) \overline{ع} + (-ص ق_س) \overline{ع}$$

$$= \text{عزم } ق_ص \text{ حول و} + \text{عزم } ق_س \text{ حول و}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

القوى المستوية

القوى المستوية هى القوى التى خطوط عملها تقع جميعًا فى مستوى واحد وبالتالى فإن متجهات عزوم هذه القوى تكون متوازية وفى اتجاه عمودى على مستوى هذه القوى.

نظرية العزوم

مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأية نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة.



البرهان :

نفرض أن $\overleftarrow{ق}_{1}$ ، $\overleftarrow{ق}_{2}$ ، $\overleftarrow{ق}_{3}$ ، ..... ، $\overleftarrow{ق}_{ن}$ مجموعة من القوى

وأن خطوط عملها تتلاقى جميعًا فى نقطة أ

وأن (و) أية نقطة أخرى فى الفراغ

∴ $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{وأ}$ هو متجه موضع للنقطة أ بالنسبة إلى (و) لجميع القوى

∴ $\overleftarrow{ج}_{و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}_{1} + \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}_{2} + \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}_{3} + ... + \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}_{ن}$

$= \overleftarrow{ر} \times (\overleftarrow{ق}_{1} + \overleftarrow{ق}_{2} + \overleftarrow{ق}_{3} + ... + \overleftarrow{ق}_{ن})$ (خاصية التوزيع)

$= \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ح}$ حيث $\overleftarrow{ح}$ متجه المحصلة لمجموعة القوى

، ∵ خط عمل المحصلة يمر بالنقطة أ أيضًا

∴ $\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ح}$ هو عزم المحصلة بالنسبة للنقطة (و)

∴ مجموع عزوم القوى حول (و) = عزم محصلة هذه القوى حول (و) **(وهو المطلوب)**

النظرية العامة للعزوم

المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة.

نتيجتان

① المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول أى نقطة على خط عمل المحصلة = صفر

أى أن : إذا كانت أ ∈ خط عمل المحصلة ($\overleftarrow{ح}$)

فإن : $ج_{أ}$ = صفر

② إذا كان المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة يساوى صفر

فإما أن يكون مقدار المحصلة يساوى صفر أو خط عملها يمر بهذه النقطة.

أى أن : إذا كان $ج_{أ}$ = صفر

فإما مقدار المحصلة (ح) = صفر أو أ ∈ خط عمل المحصلة ($\overleftarrow{ح}$)

ملاحظات

① إذا كان عزم قوة $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة أ = عزمها حول نقطة ب

أى : $ج_{أ} = ج_{ب}$ فإن : خط عمل $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{أب}$

وبصفة عامة : إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية

حول أ = مجموع عزوم هذه القوى حول ب فإن خط عمل المحصلة // $\overleftrightarrow{أب}$

أى أن : إذا كان : $ج_{أ} = ج_{ب}$ فإن : خط عمل $\overleftarrow{ح}$ (المحصلة) // $\overleftrightarrow{أب}$

② إذا كان عزم قوة $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة أ = − (عزمها حول نقطة ب)

أى : $ج_{أ} = -ج_{ب}$ فإن : خط عمل $\overleftarrow{ق}$ ينصف $\overline{أب}$

وبصفة عامة : إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية

حول أ = − مجموع عزوم هذه القوى حول ب فإن خط عمل المحصلة ينصف $\overline{أب}$

أى أن : إذا كان : $ج_{أ} = -ج_{ب}$ فإن : خط عمل $\overleftarrow{ح}$ (المحصلة) ينصف $\overline{أب}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١

إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = 4\,\overrightarrow{\text{س}} - 3\,\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة أ = (٢ ، ٣)

فأوجد متجه عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة إلى :

① نقطة الأصل (و) ② النقطة ب = (–١ ، ٢)

الحل

① ∵ $\overrightarrow{\text{و أ}} = 2\,\overrightarrow{\text{س}} + 3\,\overrightarrow{\text{ص}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{و أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = (2\,\overrightarrow{\text{س}} + 3\,\overrightarrow{\text{ص}}) \times (4\,\overrightarrow{\text{س}} - 3\,\overrightarrow{\text{ص}})$

$= (2 \times (-3) - 3 \times 4)\,\overrightarrow{\text{ع}} = -18\,\overrightarrow{\text{ع}}$

② ∵ $\overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} = (2\,\overrightarrow{\text{س}} + 3\,\overrightarrow{\text{ص}}) - (-\overrightarrow{\text{س}} + 2\,\overrightarrow{\text{ص}}) = (3\,\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}})$

، ∵ $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ب}} = (3\,\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}) \times (4\,\overrightarrow{\text{س}} - 3\,\overrightarrow{\text{ص}})$

$= (3 \times (-3) - 1 \times 4)\,\overrightarrow{\text{ع}} = -13\,\overrightarrow{\text{ع}}$

مثال ٢

إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = 3\,\overrightarrow{\text{س}} - 4\,\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى نقطة أ = (٢ ، –١)

فأوجد باستخدام العزوم طول العمود الساقط من النقطة ب = (٨ ، –٤) على خط عمل هذه القوة.

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$

$= (2\,\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}}) - (8\,\overrightarrow{\text{س}} - 4\,\overrightarrow{\text{ص}}) = (-6\,\overrightarrow{\text{س}} + 3\,\overrightarrow{\text{ص}})$

∴ $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = (-6\,\overrightarrow{\text{س}} + 3\,\overrightarrow{\text{ص}}) \times (3\,\overrightarrow{\text{س}} - 4\,\overrightarrow{\text{ص}})$

$= [(-6) \times (-4) - 3 \times 3]\,\overrightarrow{\text{ع}} = 15\,\overrightarrow{\text{ع}}$ ∴ $\|\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ب}}\| = 15$

، ∵ $\|\overrightarrow{\text{ق}}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$

∴ ل (طول العمود الساقط من ب على خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$) $= \dfrac{\|\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ب}}\|}{\|\overrightarrow{\text{ق}}\|} = \dfrac{15}{5} = 3$ وحدات طول.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٣

تؤثر القوة: $\vec{\text{ق}}_1 = \vec{\text{س}} - \vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ق}}_2 = ٤\vec{\text{س}} + \vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ق}}_3 = -٢\vec{\text{س}} - ٢\vec{\text{ص}}$

في النقطة أ = (−٤ ، ١) فإذا كانت: ب = (−١ ، ٢) ، حـ = (٢ ، ٠) ، ء = (−٤ ، −٢)

فأثبت باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة:

(١) يوازي $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ (٢) يمر بمنتصف $\overline{\text{حـء}}$

الحل

(١) ∵ $\vec{\text{ح}} = \vec{\text{ق}}_1 + \vec{\text{ق}}_2 + \vec{\text{ق}}_3 = (\vec{\text{س}} - \vec{\text{ص}}) + (٤\vec{\text{س}} + \vec{\text{ص}}) + (-٢\vec{\text{س}} - ٢\vec{\text{ص}})$

$= ٣\vec{\text{س}} - ٢\vec{\text{ص}}$

∵ $\vec{\text{بأ}} = \vec{\text{أ}} - \vec{\text{ب}} = (-٤\vec{\text{س}} + \vec{\text{ص}}) - (-\vec{\text{س}} + ٢\vec{\text{ص}}) = -٣\vec{\text{س}} - \vec{\text{ص}}$

∴ $\vec{\text{ج}}_{\text{ب}}$ (عزم المحصلة بالنسبة إلى ب)

$= \vec{\text{بأ}} \times \vec{\text{ح}} = (-٣\vec{\text{س}} - \vec{\text{ص}}) \times (٣\vec{\text{س}} - ٢\vec{\text{ص}}) = (٦ + ٣)\,\vec{\text{ع}} = ٩\,\vec{\text{ع}}$

، ∵ $\vec{\text{حـأ}} = \vec{\text{أ}} - \vec{\text{حـ}} = (-٤\vec{\text{س}} + \vec{\text{ص}}) - (٢\vec{\text{س}}) = -٦\vec{\text{س}} + \vec{\text{ص}}$

∴ $\vec{\text{ج}}_{\text{حـ}}$ (عزم المحصلة بالنسبة إلى حـ)

$= \vec{\text{حـأ}} \times \vec{\text{ح}} = (-٦\vec{\text{س}} + \vec{\text{ص}}) \times (٣\vec{\text{س}} - ٢\vec{\text{ص}}) = (١٢ - ٣)\,\vec{\text{ع}} = ٩\,\vec{\text{ع}}$

∵ $\vec{\text{ج}}_{\text{ب}} = \vec{\text{ج}}_{\text{حـ}}$

∴ خط عمل المحصلة يوازي $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$

(٢) ∵ $\vec{\text{ج}}_{\text{حـ}}$ (عزم المحصلة بالنسبة إلى حـ) $= ٩\,\vec{\text{ع}}$

، $\vec{\text{ءأ}} = \vec{\text{أ}} - \vec{\text{ء}} = (-٤\vec{\text{س}} + \vec{\text{ص}}) - (-٤\vec{\text{س}} - ٢\vec{\text{ص}}) = ٣\vec{\text{ص}}$

∴ $\vec{\text{ج}}_{\text{ء}}$ (عزم المحصلة بالنسبة إلى ء) $= \vec{\text{ءأ}} \times \vec{\text{ح}} = ٣\vec{\text{ص}} \times (٣\vec{\text{س}} - ٢\vec{\text{ص}})$

$= (٠ - ٩)\,\vec{\text{ع}} = -٩\,\vec{\text{ع}}$

∵ $\vec{\text{ج}}_{\text{حـ}} = -\vec{\text{ج}}_{\text{ء}}$

∴ خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $\overline{\text{حـء}}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل آخر :

بفرض هـ منتصف $\overline{حء}$ ∴ هـ $= \left(\frac{٢ + (-٤)}{٢} ، \frac{٠ + (-٢)}{٢}\right) = (-١ ، -١)$

∴ $\overrightarrow{هـ أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{هـ} = (-٤ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}) - (-\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}) = -٣ \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص}$

، ∵ $\overrightarrow{ج}_{هـ} = \overrightarrow{هـ أ} \times \overrightarrow{ح} = (-٣ \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص}) \times (٣ \overrightarrow{س} - ٢ \overrightarrow{ص}) = (٦ - ٦) \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{٠}$

∴ هـ ∋ خط عمل المحصلة ∴ خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $\overline{حء}$

مثال ٤

قوة $\overrightarrow{ق}$ معيارها $١٠\sqrt{٢}$ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$ حيث : أ (٤ ، ٤) ، ب (٥ ، ٣)

أوجد متجه القوة $\overrightarrow{ق}$ ومتجه عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل.

الحــل

∵ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٥ ، ٣) - (٤ ، ٤) = (١ ، -١)$ ∴ $\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$

، ∵ $\overrightarrow{ق} = \|\overrightarrow{ق}\| \times$ متجه وحدة فى اتجاه القوة

∴ $\overrightarrow{ق} = ق \times \frac{\overrightarrow{أب}}{\|\overrightarrow{أب}\|} = ١٠\sqrt{٢} \times \frac{(١ ، -١)}{\sqrt{٢}} = (١٠ ، -١٠)$ ∴ $\overrightarrow{ق} = ١٠ \overrightarrow{س} - ١٠ \overrightarrow{ص}$

∴ $\overrightarrow{ج}_{و} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ق} = (٤ ، ٤) \times (١٠ ، -١٠) = (٤ \times -١٠ - ٤ \times ١٠) \overrightarrow{ع} = -٨٠ \overrightarrow{ع}$

مثال ٥

تؤثر القوتان : $\overrightarrow{ق}_{١} = ٧ \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_{٢} = ل \overrightarrow{س} + م \overrightarrow{ص}$ فى النقطة أ (١ ، ٤) وكان متجه عزم محصلتهما بالنسبة للنقطة و (٠ ، ٠) يساوى $-٤٢ \overrightarrow{ع}$ ومتجه عزم محصلتهما بالنسبة للنقطة ب (١ ، ٥) يساوى $١٠ \overrightarrow{ع}$ أوجد قيمتى ل ، م ثم عيِّن معيار المحصلة وطول العمود النازل من ب على خط عمل المحصلة.

الحــل

∵ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق}_{١} + \overrightarrow{ق}_{٢} = (٧ ، ٢) + (ل ، م) = (٧ + ل ، ٢ + م)$

، ∵ $\overrightarrow{ج}_{و}$ (متجه عزم المحصلة بالنسبة إلى و) $= \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ح} = (١ ، ٤) \times (٧ + ل ، ٢ + م)$

$= \left((٢ + م) - ٤ (٧ + ل)\right) \overrightarrow{ع} = (م - ٤ ل - ٢٦) \overrightarrow{ع}$

، ∵ $\overleftarrow{ج_و} = -٤٢ \overleftarrow{ع}$ ∴ م − ٤ ل − ٢٦ = −٤٢ ∴ م − ٤ ل = −١٦ (١)

، ∵ $\overleftarrow{ب أ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}$ = (١ ، ٤) − (١ ، ٥) = (٠ ، −١)

∴ $\overleftarrow{ج_ب}$ (متجه عزم المحصلة بالنسبة لنقطة ب) = $\overleftarrow{ب أ} \times \overleftarrow{ح}$ = (٠ ، −١) × (٧ + ل ، ٢ + م)

= (٧ + ل) $\overleftarrow{ع}$

، ∵ $\overleftarrow{ج_ب} = ١٠ \overleftarrow{ع}$ ∴ ٧ + ل = ١٠ ∴ ل = ٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ م = −٤ ∴ $\overleftarrow{ح} = ١٠ \overleftarrow{س} - ٢ \overleftarrow{ص}$

∴ $\|\overleftarrow{ح}\| = \sqrt{١٠٠ + ٤} = \sqrt{١٠٤} = ٢\sqrt{٢٦}$ وحدة قوة

، طول العمود = $\frac{\|\overleftarrow{ج_ب}\|}{\|\overleftarrow{ح}\|} = \frac{١٠}{٢\sqrt{٢٦}} = \frac{٥\sqrt{٢٦}}{٢٦}$ وحدة طول.

مثال ٦

إذا كانت $\overleftarrow{ق} = ٣ \overleftarrow{س} + ٤ \overleftarrow{ص}$ وكان عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة الأصل = ١٦ $\overleftarrow{ع}$

أوجد عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول النقطة ب حيث ب = (−١ ، ٥)

الحل

نفرض أن أ (س ، ص) هى نقطة تأثير القوة $\overleftarrow{ق}$

$\overleftarrow{ج_و} = \overleftarrow{و أ} \times \overleftarrow{ق}$ = (س ، ص) × (٣ ، ٤)

= (٤ س − ٣ ص) $\overleftarrow{ع}$

، ∵ $\overleftarrow{ج_و} = ١٦ \overleftarrow{ع}$

∴ ٤ س − ٣ ص = ١٦ (١)

، ∵ $\overleftarrow{ج_ب} = \overleftarrow{ب أ} \times \overleftarrow{ق} = (\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}) \times \overleftarrow{ق}$

= (س + ١ ، ص − ٥) × (٣ ، ٤)

= (٤ س + ٤ − ٣ ص + ١٥) $\overleftarrow{ع}$

= (٤ س − ٣ ص + ١٩) $\overleftarrow{ع}$

وبالتعويض من (١) : ∴ $\overleftarrow{ج_ب}$ = (١٦ + ١٩) $\overleftarrow{ع}$ = ٣٥ $\overleftarrow{ع}$

لاحظ أن

عندما تكون نقطة تأثير القوة مجهولة :

نفرض أن خط عمل القوة يقطع محور السينات فى أ (س ، ٠) ما لم تكن القوة موازية لمحور السينات

أو

نفرض أن خط عمل القوة يقطع محور الصادات فى أ (٠ ، ص) ما لم تكن القوة موازية لمحور الصادات

أو

نفرض أن نقطة تأثير القوة هى أ (س ، ص)

لاحظ أن

المعادلة (١) تسمى معادلة خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



شكل(٣) : نرسم $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$

∴ ل (ذراع القوة) = أء

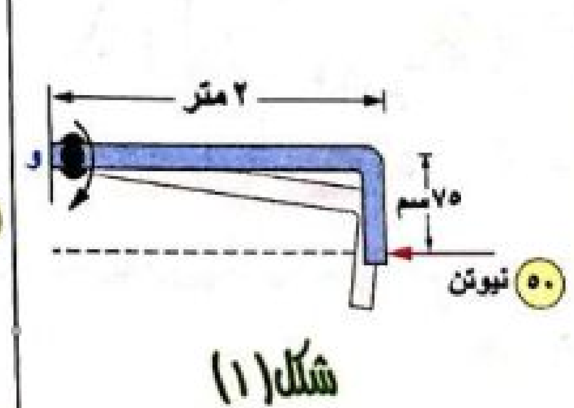
، ∵ ب حـ = $\sqrt{81 + 144}$ = ١٥ سم

∴ ل = $\frac{أب \times أحـ}{ب حـ} = \frac{9 \times 12}{15}$ = ٧,٢ سم

∴ $جـ_و$ = − ق × ل = −١٥ × ٧,٢ = −١٠٨ نيوتن.سم.

مثال ٨

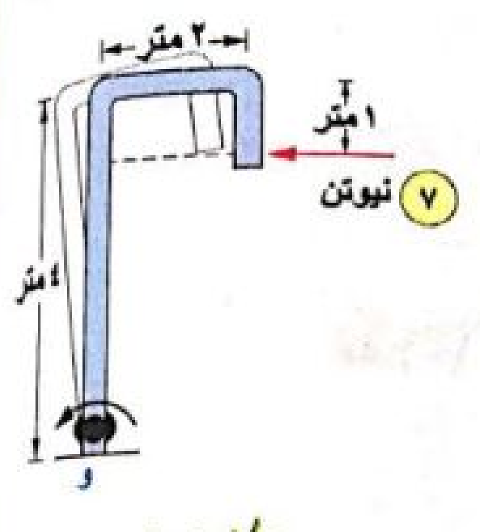
فى كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لعزم القوة حول النقطة (و) مقدار بالنيوتن . متر



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

الحل

(١) $جـ_و$ = − ق ل = − ٥٠ × ٠,٧٥ = − ٣٧,٥ نيوتن . متر

(٢) $جـ_و$ = − ق ل = − ٤٠ × (٤ + ٢ جتا ٣٠°) ≈ − ٢٢٩ نيوتن . متر

(٣) $جـ_و$ = ق ل = ٧ × (٤ − ١) = ٢١ نيوتن . متر

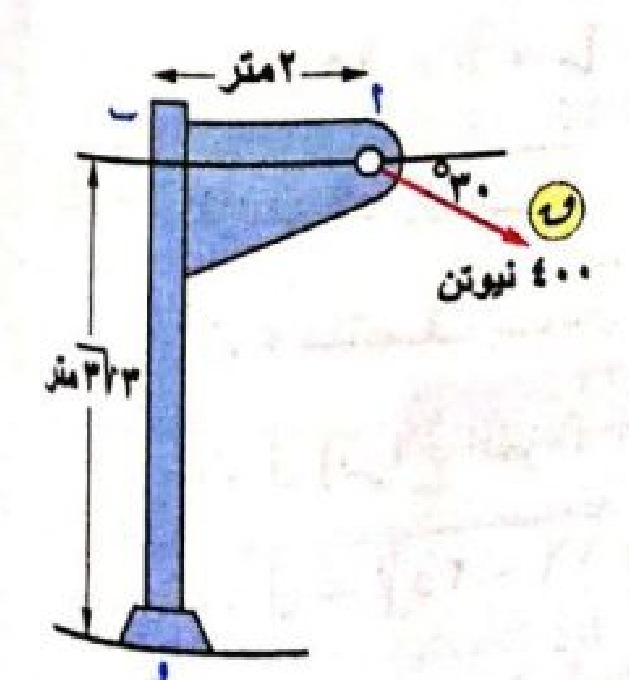
مثال ٩

فى الشكل المقابل :

إذا كانت ق = ٤٠٠ نيوتن

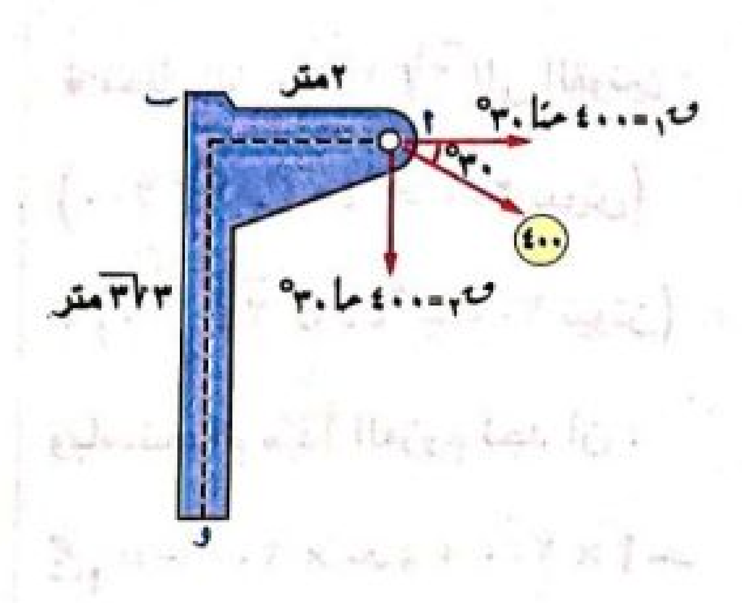
أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ($\overrightarrow{ق}$)

بالنسبة للنقطة (و)



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحــل



* بتحليل القوة ٤٠٠ نيوتن إلى مركبتين

$ق_1 = ٤٠٠$ حتا $٣٠° = ٢٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن

، $ق_2 = ٤٠٠$ حا $٣٠° = ٢٠٠$ نيوتن

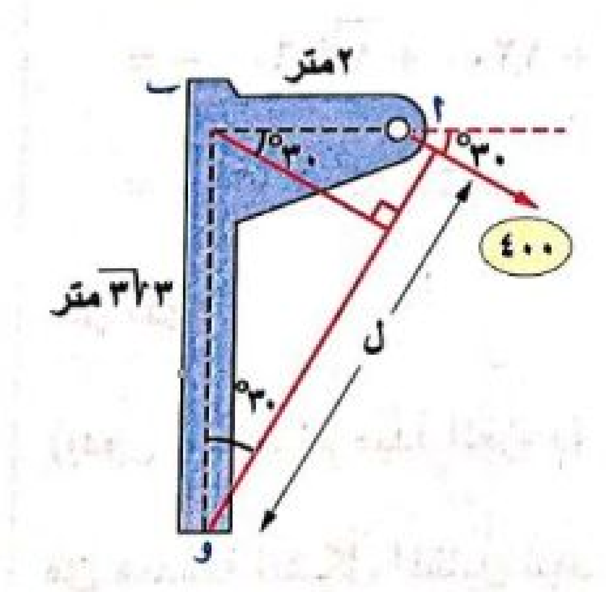
وباستخدام مبدأ العزوم نجد أن :

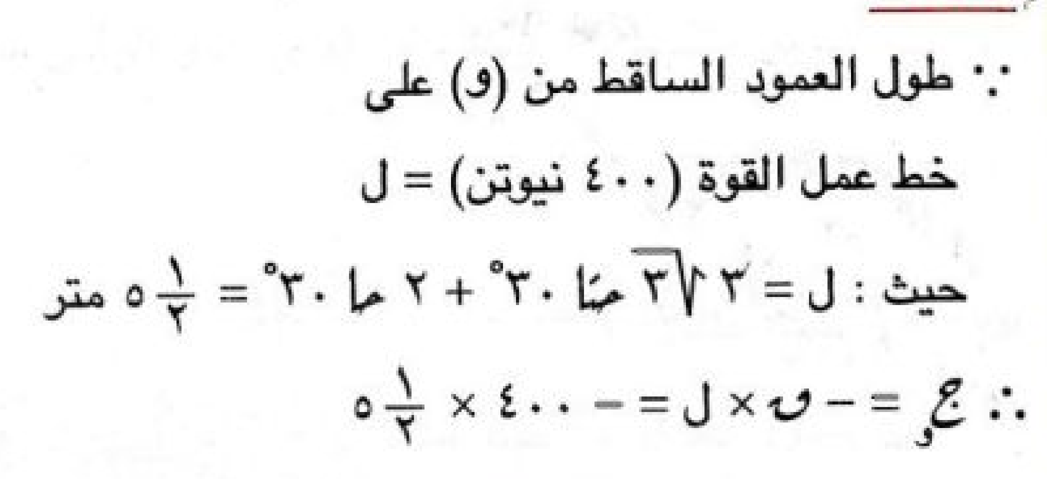
$ج_و = - ق_1 \times و ب - ق_2 \times أ ب$

$= - ٢٠٠\sqrt{٣} \times ٣\sqrt{٣} - ٢٠٠ \times ٢$

$= - ٢٢٠٠$ نيوتن . متر

حل آخر :





∵ طول العمود الساقط من (و) على

خط عمل القوة (٤٠٠ نيوتن) = ل

حيث : ل $= ٣\sqrt{٣}$ حتا $٣٠° + ٢$ حا $٣٠° = ٥\frac{١}{٢}$ متر

∴ $ج_و = - ق \times ل = - ٤٠٠ \times ٥\frac{١}{٢}$

$= - ٢٢٠٠$ نيوتن. متر

ملاحظة

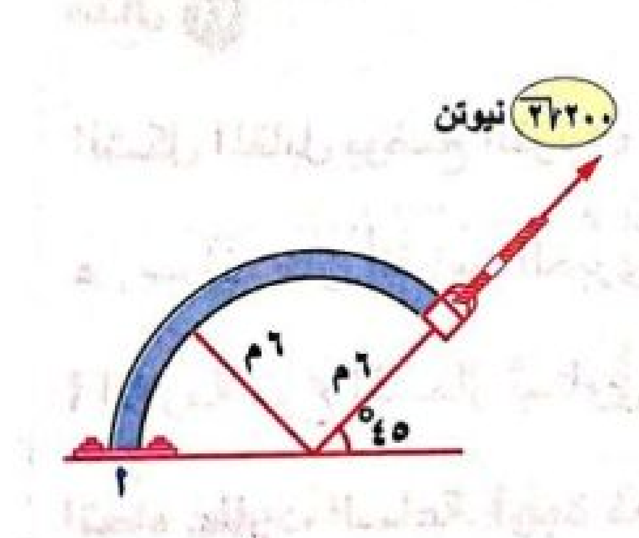
الحل باستخدام مبدأ العزوم أسهل.

مثال ١٠

فى الشكل المقابل :

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة $٢٠٠\sqrt{٢}$ نيوتن

حول النقطة أ

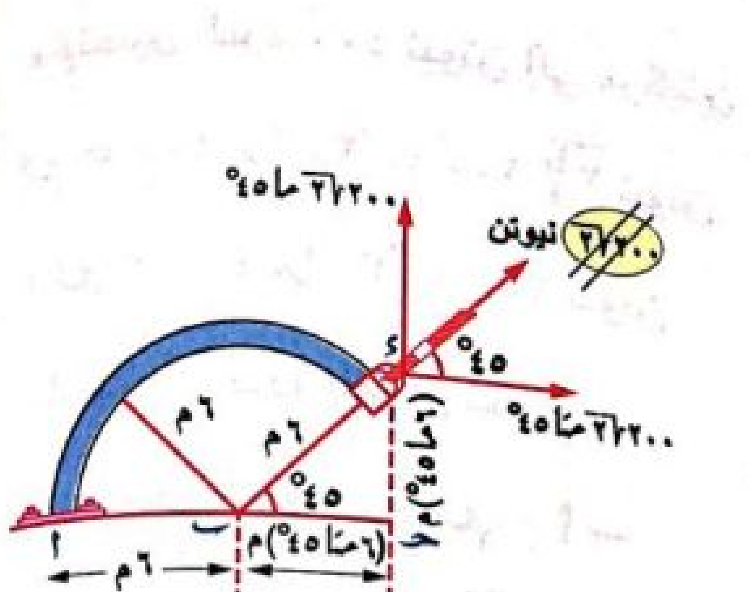


الحـــل

* نحلل القوة ٢٠٠ $\sqrt{2}$ إلى القوتين :

(٢٠٠ $\sqrt{2}$ جتا ٤٥° = ٢٠٠ نيوتن)

، (٢٠٠ $\sqrt{2}$ جا ٤٥° = ٢٠٠ نيوتن)



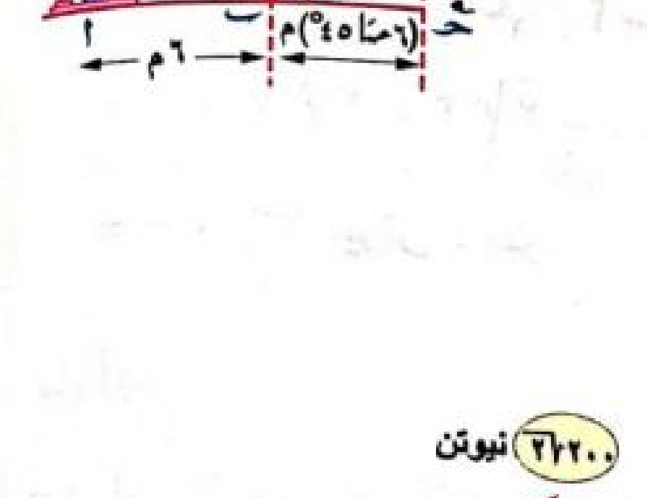
وباستخدام مبدأ العزوم نجد أن :

جـ$_م$ = − ٢٠٠ × حـ ء + ٢٠٠ × أ حـ

= − ٢٠٠ × [٦ جا ٤٥°] + ٢٠٠ [٦ + ٦ جتا ٤٥°]

= − ٦٠٠ $\sqrt{2}$ + ١٢٠٠ + ٦٠٠ $\sqrt{2}$

= ١٢٠٠ نيوتن.متر.





حل آخر :

(بدون استخدام مبدأ العزوم)

من هندسة الشكل المقابل نجد أن :

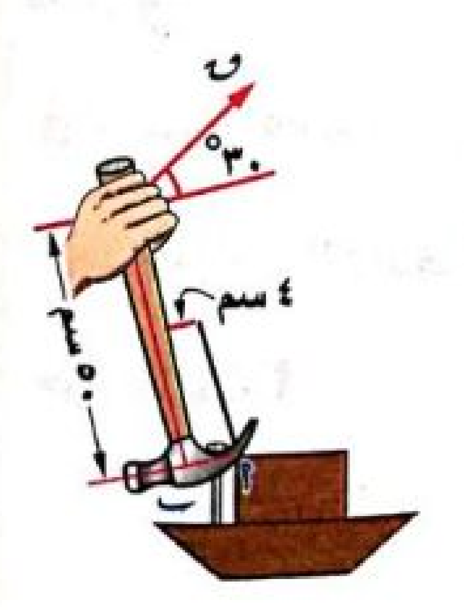
جـ$_م$ = ٢٠٠ $\sqrt{2}$ × ٦ جا ٤٥° = ١٢٠٠ نيوتن.متر.

ملاحظة

الحل بدون استخدام مبدأ العزوم أقصر.

مثال ⑪

الشكل المقابل يوضح القوة ق اللازمة لنزع مسمار عن ب إذا كان القياس الجبرى لعزم القوة حول نقطة أ اللازمة لنزع المسمار يساوى ٧٠ نيوتن.متر. مع اتجاه عقارب الساعة. أوجد معيار القوة ق



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل

بتحليل القوة ق إلى مركبتين ق جتا ٣٠° ، ق جا ٣٠°

، ∵ $ج_م$ = −٧٠

∴ − ق جتا ٣٠° × ٠,٠٥ − ق جا ٣٠° × ٠,٠٤ = −٧٠

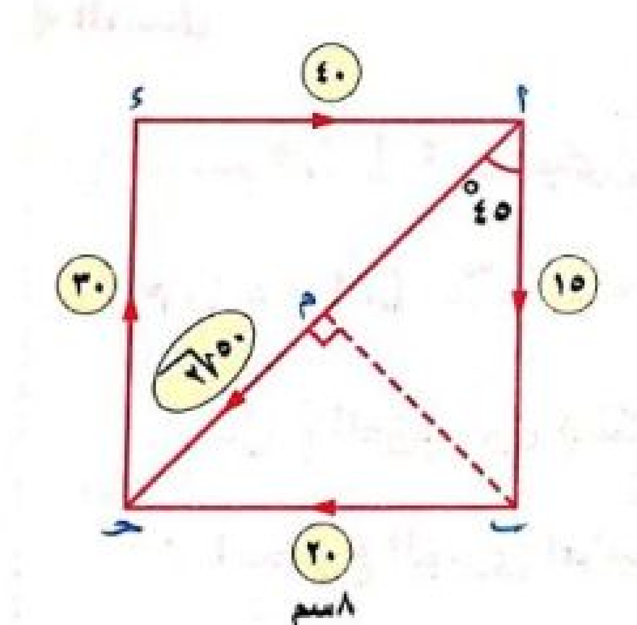
∴ ق = $\frac{٧٠}{٠,٠٥ \text{ جتا } ٣٠° + ٠,٠٤ \text{ جا } ٣٠°}$ ≃ ١٥٥ نيوتن.

مثال ١٢

أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٨ سم تؤثر قوى مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{حـء}$ ، $\overleftarrow{ءأ}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ على الترتيب.

احسب المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول الرأس ب

الحـــل



∵ القوتان اللتان مقداراهما ١٥ ، ٢٠ نيوتن

خطا عملهما يمران بالنقطة ب

∴ القياس الجبرى لعزم كل منهما بالنسبة للنقطة ب = صفر

∵ ذراع القوة التى مقدارها ٣٠ نيوتن = ب حـ = ٨ سم

∴ القياس الجبرى لعزم القوة التى مقدارها ٣٠ نيوتن = −٣٠ × ٨ = −٢٤٠ نيوتن.سم

∵ ذراع القوة التى مقدارها ٤٠ نيوتن = ب أ = ٨ سم

∴ القياس الجبرى لعزم القوة التى مقدارها ٤٠ نيوتن = −٤٠ × ٨ = −٣٢٠ نيوتن.سم

∵ ذراع القوة التى مقدارها ٥٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن = ب م = ب أ جا ٤٥° = ٨ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ سم

∴ القياس الجبرى لعزم القوة التى مقدارها ٥٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن = ٥٠ $\sqrt{٢}$ × ٤ $\sqrt{٢}$ = ٤٠٠ نيوتن.سم

∴ المجموع الجبرى لعزوم القوى حول ب ($ج_ب$) = −٢٤٠ − ٣٢٠ + ٤٠٠ = −١٦٠ نيوتن.سم.

ملاحظة

فى المثال السابق :

رسم المربع أ ب حـ ء بحيث كان الاتجاه الدورانى لرءوسه فى اتجاه دوران عقارب الساعة فإذا رسم المربع بحيث كان الاتجاه الدورانى لرؤوسه فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة لكان المجموع الجبرى لعزوم القوى حول ب ($ج_ب$) = ١٦٠ نيوتن.سم أى تتغير إشارة العزم فقط.

مثال ١٣

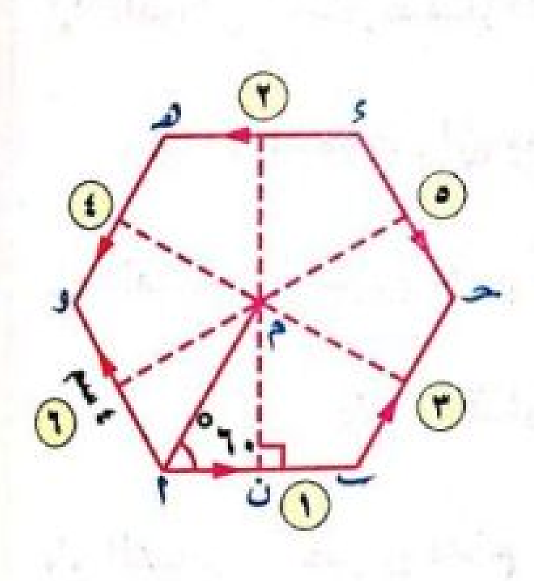
أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ٤ سم ورءوسه مرتبة فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة ، أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٣ ، ٥ ، ٢ ، ٤ ، ٦ نيوتن

فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{ءحـ}$ ، $\overleftarrow{ءهـ}$ ، $\overleftarrow{هـو}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب.

أوجد المجموع الجبرى لعزوم القوى حول كل من م (مركز السداسى) ، الرأس أ

الحل

① نرسم $\overline{من} \perp \overline{أب}$ فيكون :



م ن = م أ جا ٦٠° = ٤ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٢ $\sqrt{3}$ سم

∴ ذراع العزم حول م لكل قوة = ٢ $\sqrt{3}$ سم

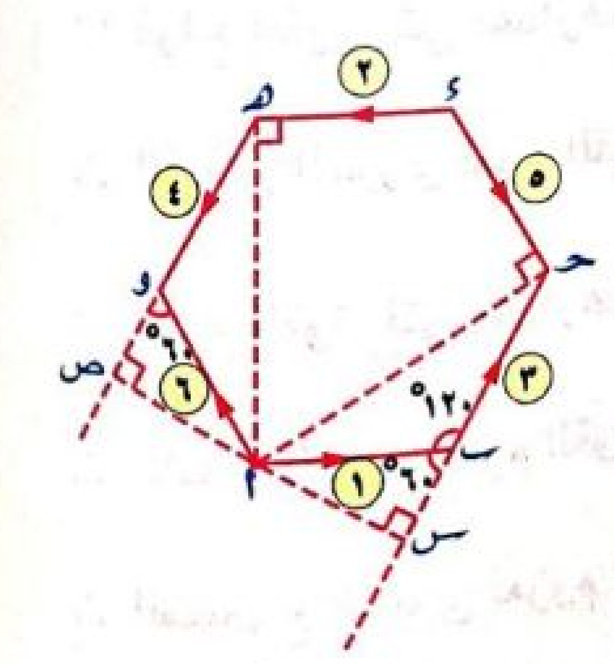
∴ المجموع الجبرى لعزوم القوى حول م

= (١ + ٣ − ٥ + ٢ + ٤ − ٦) × ٢ $\sqrt{3}$

= −٢ ٢ $\sqrt{3}$ نيوتن.سم

② نرسم $\overleftarrow{أس} \perp \overleftarrow{حـب}$ ، $\overleftarrow{أص} \perp \overleftarrow{هـو}$

ونصل $\overline{أحـ}$ ، $\overline{أهـ}$



∴ ق (∠ أ ب س) = ق (∠ أ و ص) = ٦٠°

∴ أ س = أ ص = أ ب جا ٦٠° = ٤ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٢ $\sqrt{3}$ سم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

، $أحـ = أهـ$

$= \sqrt{3} \times$ طول ضلع السداسى *(خواص السداسى المنتظم)*

$\therefore$ $أحـ = أهـ = 4\sqrt{3}$ سم ، $\overline{أحـ} \perp \overline{حـ ء}$ ، $\overline{أهـ} \perp \overline{ءهـ}$

$\therefore$ المجموع الجبرى لعزوم القوى حول أ

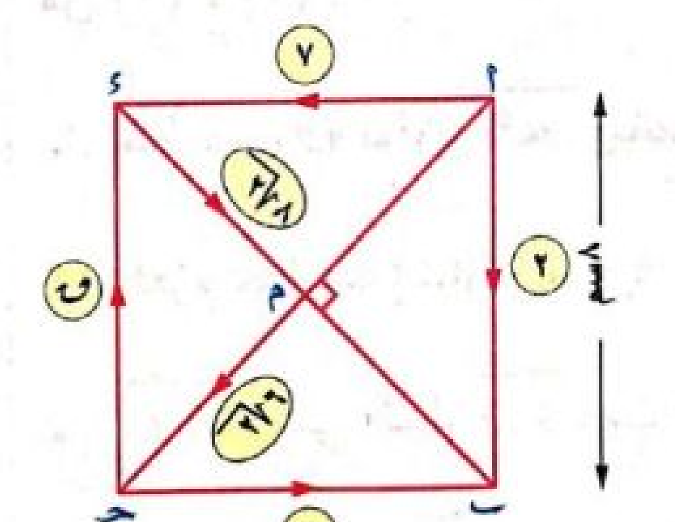
$= 1 \times 0 + 3 \times 2\sqrt{3} - 5 \times 4\sqrt{3} + 2 \times 4\sqrt{3} + 4 \times 2\sqrt{3} + 6 \times 0$

$= 6\sqrt{3} - 20\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ نيوتن.سم.

مثال ١٤

أ ب حـ ء مربع طول ضلعه = ٨ سم أثرت القوى ٢ ، ٥ ، ق ، ٧ ، $6\sqrt{2}$ ، $8\sqrt{2}$ ثقل جرام فى $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{حـب}$ ، $\overrightarrow{حـء}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{ءب}$ على الترتيب فإذا كان خط عمل محصلة هذه القوى يوازى $\overleftrightarrow{أحـ}$ فأوجد قيمة : ق

الحـل



$\because$ أ ب حـ ء مربع

$\therefore$ $أحـ = بء = 8\sqrt{2}$ سم

$\therefore$ $أم = مـحـ = 4\sqrt{2}$ سم

، $\because$ خط عمل محصلة القوى // $\overleftrightarrow{أحـ}$ $\therefore$ $ج_م = ج_{حـ}$

، $\because$ $ج_م = 2 \times 0 + 5 \times 8 - ق \times 8 + 7 \times 0 + 6\sqrt{2} \times 0 + 8\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$

$= 40 - 8ق + 64 = 104 - 8ق$

، $ج_{حـ} = -2 \times 8 + 5 \times 0 + ق \times 0 + 7 \times 8 + 6\sqrt{2} \times 0 - 8\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$

$= -16 + 56 - 64 = -24$

$\therefore$ $104 - 8ق = -24$ $\therefore$ ق = ١٦ ث.جم.

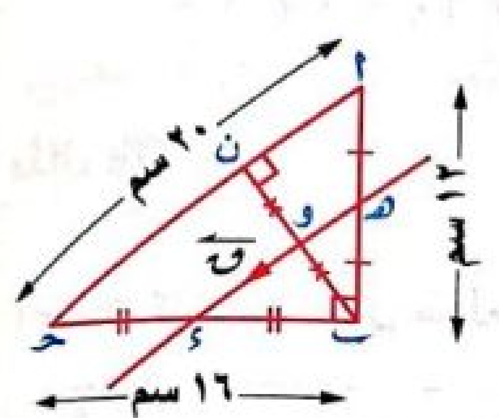
مثال ١٥

$أبحـ$ مثلث قائم الزاوية فى $ب$ فيه : $أب = ١٢$ سم ، $بحـ = ١٦$ سم

، أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ فى مستوى المثلث وكان عزم $\overrightarrow{ق}$ حول $أ$ = عزمها حول $حـ$ = -٧٢ نيوتن.سم

وكان عزم $\overrightarrow{ق}$ حول $ب$ = ٧٢ نيوتن.سم عيِّن مقدار واتجاه وخط عمل $\overrightarrow{ق}$

الحـــل



$أحـ = \sqrt{١٤٤ + ٢٥٦} = \sqrt{٤٠٠} = ٢٠$ سم

∵ عزم $\overrightarrow{ق}$ حول $أ$ = عزم $\overrightarrow{ق}$ حول $حـ$

∴ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يوازى $\overleftrightarrow{أحـ}$ (١)

، ∵ عزم $\overrightarrow{ق}$ حول $ب$ = − (عزم $\overrightarrow{ق}$ حول $حـ$)

∴ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يمر بمنتصف $\overline{بحـ}$ وليكن ء (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يوازى $\overleftrightarrow{أحـ}$ وينصف $\overline{بحـ}$ وأيضاً ينصف $\overline{أب}$

∵ العزم حول $ب$ إشارته موجبة

∴ $\overrightarrow{ق}$ تعمل فى اتجاه $\overrightarrow{هـ ء}$ حيث هـ منتصف $\overline{أب}$

ولحساب $ق$ (معيار $\overrightarrow{ق}$) فإن :

∵ عزم $\overrightarrow{ق}$ حول $ب$ = ٧٢ نيوتن.سم

∴ $ق \times ب و = ٧٢$

لكن : $ب و = \frac{١}{٢} ب ن = \frac{١}{٢} \times \frac{أب \times بحـ}{أحـ} = \frac{١}{٢} \times \frac{١٢ \times ١٦}{٢٠} = ٤,٨$ سم

∴ $ق \times ٤,٨ = ٧٢$ ∴ $ق = \frac{٧٢}{٤,٨}$

∴ $ق = ١٥$ نيوتن.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظات

فى كل من الأشكال الهندسية التالية نجد أنه :

① إذا كان Δ أ ب حـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين

فإن : أ حـ = ل $\sqrt{2}$

② إذا كان : Δ أ ب حـ ثلاثينيًا ستينيًا :

فإن : أ ب = $\frac{1}{2}$ ل ، ب حـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

③ إذا كان Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

فإن : أ ء = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

④ إذا كان Δ أ ب حـ متساوى الساقين ، ق (∠ب) = ١٢٠°

فإن : أ حـ = ل $\sqrt{3}$

⑤ إذا كان : أ ب حـ ء هـ و سداسيًا منتظمًا

فإن : ب ء = ل $\sqrt{3}$ ، ب هـ = ٢ ل

معلومة إثرائية

① إذا اثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى النقطة ىه وكان $\overline{أ ب}$ ينتمى لمستوى $\overleftarrow{ق}$ وكانت م منتصف $\overline{أ ب}$ وكان $ج_أ$ ، $ج_ب$ ، $ج_م$ هى القياسات الجبرية لعزم القوة حول النقط أ ، ب ، م على الترتيب

فإن : $ج_أ + ج_ب = ٢ ج_م$

* **الاثبات :**

∵ $ج_أ + ج_ب = \overleftarrow{أ ىه} \times \overleftarrow{ق} + \overleftarrow{ب ىه} \times \overleftarrow{ق}$

$= (\overleftarrow{أ ىه} + \overleftarrow{ب ىه}) \times \overleftarrow{ق}$

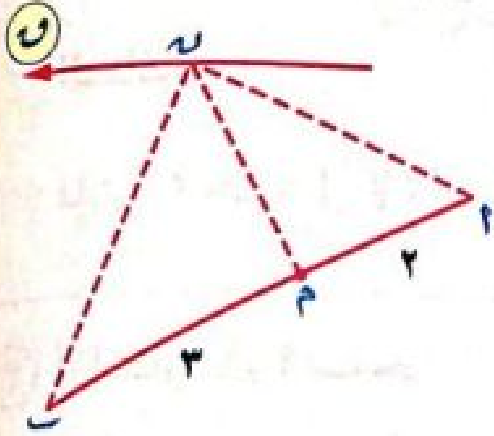
$= ٢ \overleftarrow{م ىه} \times \overleftarrow{ق} = ٢ \overleftarrow{ج_م}$

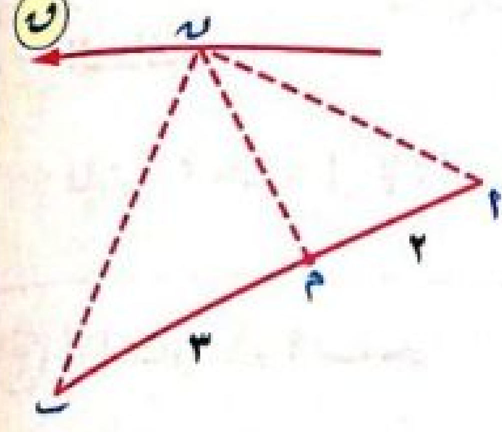
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

● **فمثلًا :** إذا كانت $\overleftarrow{ق}$ قوة تؤثر فى مستوى Δ أ ب حـ وكانت ء منتصف $\overline{ب حـ}$

وكان $ج_{ب}$ = ٢٠ نيوتن.سم ، $ج_{حـ}$ = ١٢ نيوتن.سم

∴ $ج_{ء} = \frac{١}{٢} (ج_{ب} + ج_{حـ})$ = ١٦ نيوتن.سم





تعميم : إذا كانت م تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣

وباستخدام تقسيم قطعة مستقيمة نجد أن :

$٣ \overleftarrow{ن أ} + ٢ \overleftarrow{ن ب} = ٥ \overleftarrow{ن م}$

∴ $٣ \overleftarrow{ن أ} \times \overleftarrow{ق} + ٢ \overleftarrow{ن ب} \times \overleftarrow{ق} = ٥ \overleftarrow{ن م} \times \overleftarrow{ق}$

أى أن : $٣ ج_{أ} + ٢ ج_{ب} = ٥ ج_{م}$

(٢) إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى متوازى أضلاع أ ب حـ ء وكان $ج_{أ}$ ، $ج_{ب}$ ، $ج_{حـ}$ ، $ج_{ء}$ هى القياسات الجبرية لعزم القوة حول رؤوس متوازى الأضلاع الأربعة على الترتيب

فإن : $ج_{أ} + ج_{حـ} = ج_{ب} + ج_{ء}$

* **الاثبات :**

نفرض أن $\overleftarrow{ق}$ تؤثر فى مستوى متوازى أضلاع أ ب حـ ء

∵ م منتصف $\overline{أ حـ}$

∴ $ج_{أ} + ج_{حـ} = ٢ ج_{م}$ (١)

، ∵ م منتصف $\overline{ب ء}$

∴ $ج_{ب} + ج_{ء} = ٢ ج_{م}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ج_{أ} + ج_{حـ} = ج_{ب} + ج_{ء}$

● **فمثلًا :** إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى متوازى أضلاع أ ب حـ ء وكان $ج_{أ}$ = −١٨ نيوتن.متر

، $ج_{ب}$ = ٢٤ نيوتن.متر ، $ج_{ء}$ = ٣٠ نيوتن.متر

، ∵ $ج_{أ} + ج_{حـ} = ج_{ب} + ج_{ء}$ ∴ $−١٨ + ج_{حـ} = ٢٤ + ٣٠$

∴ $ج_{حـ}$ = ٧٢ نيوتن.متر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



على عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثنائى الأبعاد



من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا تمارين على إيجاد العزم باستخدام الضرب الاتجاهى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ تؤثر فى نقطة (أ) ، $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$ هو متجه عزم $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول نقطة (و) فإن ....

(أ) $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{وأ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{وأ}} \cdot \overrightarrow{\text{ق}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{وأ}}$ (د) $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{ق}} \times \overrightarrow{\text{وأ}}$

② إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}} = ٢\,\overrightarrow{\text{س}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، أ(٢ ، ١) ∈ خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، و نقطة الأصل

فإن : $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$ = ... $\overrightarrow{\text{ع}}$

(أ) –٨ (ب) ٨ (جـ) ١ (د) ٧

③ إذا أثرت القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٢\,\overrightarrow{\text{س}} + ٥\,\overrightarrow{\text{ص}}$ فى النقطة أ = (–٣ ، ١)

فإن متجه عزم $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة ه(٢ ، –٤) يساوى ....

(أ) ١٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$ (ب) ٣٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$ (جـ) – $\overrightarrow{\text{ع}}$ (د) –٣٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$

④ فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}} = ٢٠\,\overrightarrow{\text{س}} + ٣٠\,\overrightarrow{\text{ص}}$ وتؤثر فى نقطة أ (١ ، ١) فإن عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة ب (٤ ، ٠) = ... $\overrightarrow{\text{ع}}$

(أ) –١١٠ (ب) ١١٠

(جـ) ٧٠ (د) –٩٠

⑤ إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}} = ٧\,\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة (–٣ ، ٠) فإن عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة (١ ، –٢) هو ....

(أ) –٢٨ $\overrightarrow{\text{ع}}$ (ب) ٢٨ $\overrightarrow{\text{ع}}$ (جـ) ١٤ $\overrightarrow{\text{ع}}$ (د) –١٤ $\overrightarrow{\text{ع}}$

⑥ إذا كانت : $\overrightarrow{ق} = ٦ \overrightarrow{س} - ٨ \overrightarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ = (٣ ، −٢) فإن طول العمود الساقط من النقطة ب (٢ ، ٤) على خط عمل $\overrightarrow{ق}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٥,٤ (ب) ٢,٨ (جـ) ٢٨ (د) ٤,٤

⑦ إذا كان خط عمل $\overrightarrow{ق}$ // $\overline{أب}$ ، $\overrightarrow{جـ_أ} = ١٢ \overrightarrow{ع}$ فإن : $\overrightarrow{جـ_ب}$ = ... $\overrightarrow{ع}$

(أ) ١٢ (ب) −١٢ (جـ) ٦ (د) ٢٤

⑧ إذا كان مجموع عزوم القوى حول أ = مجموع عزوم القوى حول ب فإن خط عمل المحصلة يكون ....

(أ) عمودى على $\overline{أب}$ (ب) موازيًا $\overline{أب}$

(جـ) مارًا بمنتصف $\overline{أب}$ (د) ينطبق على $\overline{أب}$

⑨ إذا انعدم مجموع عزمى قوة $\overrightarrow{ق}$ حول النقطتين أ ، ب فإن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ ....

(أ) يوازى $\overline{أب}$ (ب) عمودى على $\overline{أب}$

(جـ) يمر بالنقطة أ أو النقطة ب (د) يمر بمنتصف $\overline{أب}$

⑩ إذا كانت : $\overrightarrow{ق} \neq \overrightarrow{٠}$ فإن جميع ما يلى صحيح ما عدا ....

(أ) خط عمل $\overrightarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{أب}$ فإن : $\overrightarrow{جـ_أ} - \overrightarrow{جـ_ب} = \overrightarrow{٠}$

(ب) خط عمل $\overrightarrow{ق}$ ينصف $\overline{أب}$ فإن : $\overrightarrow{جـ_أ} + \overrightarrow{جـ_ب} = \overrightarrow{٠}$

(جـ) إذا كانت : أ $\in$ لخط عمل $\overrightarrow{ق}$ فإن : $\overrightarrow{جـ_أ} \neq \overrightarrow{٠}$

(د) إذا كان خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يعمل فى $\overleftrightarrow{أب}$ فإن : $\overrightarrow{جـ_أ} = \overrightarrow{جـ_ب} = \overrightarrow{٠}$

⑪ إذا كان القوة $\overrightarrow{ق}$ = (ل ، م) تؤثر فى نقطة أ (٤ ، ٨) وكان عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب (٣ ، ٩) يساوى ٤٠ $\overrightarrow{ع}$ فإن : ل + م = ...

(أ) ٤٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) ٨٠

⑫ إذا كانت : $\overrightarrow{ق} = ٥ \overrightarrow{س} + ١٢ \overrightarrow{ص}$ ومعادلة خط عملها −١٢ س + ٥ ص = صفر فإن عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب (−٣ ، ١) يساوى .... $\overrightarrow{ع}$

(أ) صفر (ب) −١١ (جـ) ٣١ (د) ٤١

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٣) إذا كانت : ق = ٥ س + ٤ ص وكانت النقطتان أ ، ب فى مستوى ق حيث أ (٢ ، ٣) وكان : ج_أ = ج_ب فإن معادلة المستقيم أب هى ....

(أ) ٤ س − ٥ ص + ٧ = ٠ (ب) ٥ س − ٤ ص + ٧ = ٠

(جـ) ٤ س − ٥ ص = ٠ (د) ٥ س + ٤ ص + ٧ = ٠

(١٤) إذا كان عزم القوة ق = ٤ س + ٦ ص بالنسبة لنقطة الأصل يساوى ٨٠ ع فإن معادلة خط عمل ق هى ....

(أ) ٢ س + ٣ ص = ٤٠ (ب) ٤ س + ٣ ص = ١٠

(جـ) ٣ س − ٢ ص = ٤٠ (د) ٣ س − ٢ ص = ٨٠

(١٥) قوة ق متجه عزمها بالنسبة للنقطة (٣ ، ٥) هو ٦ ع ومتجه عزمها بالنسبة للنقطة (١ ، −١) هو −٦ ع فإن متجه عزمها بالنسبة للنقطة .... = صفر

(أ) (−١ ، −٣) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (٢ ، ٦) (د) (١ ، ٣)

(١٦) إذا كان خط عمل ق = س + ص ينصف أب حيث أ (٣ ، −١) وكانت ء (١ ، ٤) منتصف أب فإن : ج_ب = ... ع

(أ) −٧ (ب) ٧ (جـ) ٣ (د) −١٤

(١٧) (دور أول ٢٠٢٠) إذا كان : ق = ٣ س − ٢ ص ، أ (−١ ، ٢) ، عزم ق حول أ هو ج_أ = ٩ ع ، عزم ق حول ب هو ج_ب = ٩ ع فإن إحداثيات النقطة ب يمكن أن يمثلها جميع الأزواج المرتبة الآتية ماعدا ....

(أ) (٥ ، −٢) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (−٨ ، ٤) (د) (٨ ، −٤)

---

(٢) إذا كانت : ق = ٣ س + ٤ ص تؤثر فى النقطة أ (−١ ، ٣) من جسم أوجد :

(١) عزم القوة ق بالنسبة لنقطة الأصل و (٠ ، ٠)

(٢) طول العمود الساقط من النقطة (و) على خط عمل القوة ق «−١٣ ع ، ٢,٦ وحدة طول»

---

(٣) إذا كانت : ق = س − ٢ ص تؤثر فى النقطة أ (٢ ، ٣) أوجد :

(١) عزم القوة ق بالنسبة للنقطة ب (٢ ، ١)

(٢) طول العمود الساقط من النقطة ب على خط عمل القوة. «−٢ ع ، $\frac{٢\sqrt{٥}}{٥}$»

---

(٤) إذا كانت : ق = ل س − ٢ ص تؤثر فى نقطة أ (٥ ، ٢) وكان متجه عزم ق بالنسبة لنقطة ب (٧ ، −٤) يساوى ٢٠ ع فأوجد قيمة : ل «$-\frac{٨}{٣}$»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥ إذا كانت : $\overleftarrow{ق} = ٣ \overleftarrow{س} - ٤ \overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة أ (٠ ، ٢) وكانت :
ب (٣ ، −٢) ، حـ (٢ ، ٣) ، ء (−٢ ، ١) ، هـ (٥ ، −١)
فأثبت باستخدام العزوم أن خط عمل $\overleftarrow{ق}$:
(١) يمر بنقطة ب (٢) ينصف $\overline{حـ ء}$ (٣) يوازى $\overleftrightarrow{حـ هـ}$

٦ أثرت القوتان $\overleftarrow{ق}_١ = ٥ \overleftarrow{س} - ٤ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٢ = \overleftarrow{س} - ٤ \overleftarrow{ص}$ فى نقطة الأصل ، أثبت أن خط عمل محصلتهما يمر بالنقطة أ (−٣ ، ٤) ثم أوجد طول العمود الساقط من النقطة ب (٢ ، −٥) على خط عمل المحصلة.
«−١٤ $\overleftarrow{ع}$ ، ١,٤ وحدة طول»

٧ القوى : $\overleftarrow{ق}_١ = ٢ \overleftarrow{س} - ٣ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٢ = ٥ \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٣ = -٤ \overleftarrow{س} + ٧ \overleftarrow{ص}$
تؤثر فى النقط أ (١ ، ١) ، ب (−٢ ، ٢) ، حـ (٣ ، ١) على الترتيب.
أوجد متجه عزم المحصلة بالنسبة لنقطة الأصل (٠ ، ٠)
«٨ $\overleftarrow{ع}$»

٨ 📖 تؤثر القوتان : $\overleftarrow{ق}_١ = \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٢ = ٣ \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ (−٢ ، ٣)
برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة ينصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين ب (−١ ، ٥) ، حـ (١ ، ٢)

٩ 📖 القوى : $\overleftarrow{ق}_١ = ٢ \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٢ = ٥ \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٣ = -٣ \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص}$
تؤثر فى النقطة أ (١ ، ١) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ١) ، (٦ ، ٤)

١٠ قوة : $\overleftarrow{ق} = ١٢ \overleftarrow{س} + ك \overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ = (−٥ ، ٣) ، خط عملها ينصف القطعة المستقيمة $\overline{ب حـ}$ حيث : ب = (١ ، ٢) ، حـ = (١ ، ٩)
أوجد : قيمة ك ، بُعد النقطة ب عن خط عمل $\overleftarrow{ق}$
«٥ ، $\frac{٤٢}{١٣}$ وحدة طول»

١١ 📖 تؤثر القوتان : $\overleftarrow{ق}_١ = م \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_٢ = ل \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ عند النقطتين $أ_١ = (١ ، ١)$ ، $أ_٢ = (−١ ، −٢)$ على الترتيب. عيِّن قيمة كل من الثابتين م ، ل بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين بالنسبة لنقطة الأصل «و» ، بالنسبة للنقطة ب = (٢ ، ٣)
«$\frac{١٣}{٩}$ ، $\frac{-٧}{٩}$»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٢ تؤثر القوة $\overrightarrow{ق}$ فى النقطة أ (−٣ ، ٢) فإذا كان عزم $\overrightarrow{ق}$ حول كل من النقطتين ب (٣ ، ١) ، حـ (−١ ، ٤) يساوى ٢٨ $\overrightarrow{ع}$ أوجد : $\overrightarrow{ق}$ «٨ $\overrightarrow{س}$ − ٦ $\overrightarrow{ص}$»

---

١٣ قوة : $\overrightarrow{ق}$ = ل $\overrightarrow{س}$ + م $\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ = (١ ، −٣) ، القياس الجبرى لعزم هذه القوة بالنسبة للنقطة (−٥ ، ٠) يساوى −٢١ وحدة عزم وينعدم عزمها بالنسبة للنقطة (٢ ، −٧) أوجد مقدار $\overrightarrow{ق}$ ومعادلة خط عملها.

«$\overrightarrow{ق}$ = $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، ‖$\overrightarrow{ق}$‖ = $\sqrt{١٧}$ وحدة قوة ، ٤ س + ص − ١ = صفر»

---

١٤ (دور أول ٢٠٠٨) أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ فى مستوى المثلث أ ب حـ حيث : أ (٣ ، ٢) ، ب (١ ، −٤) ، حـ (−١ ، ٠) بحيث كان : $\overrightarrow{ج}_{أ}$ = $\overrightarrow{ج}_{ب}$ = ٦٠ $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ج}_{حـ}$ = −٦٠ $\overrightarrow{ع}$

أوجد : $\overrightarrow{ق}$ وعيِّن مقدارها. «−١٢ $\overrightarrow{س}$ − ٣٦ $\overrightarrow{ص}$ ، ١٢ $\sqrt{١٠}$ وحدة قوة»

---

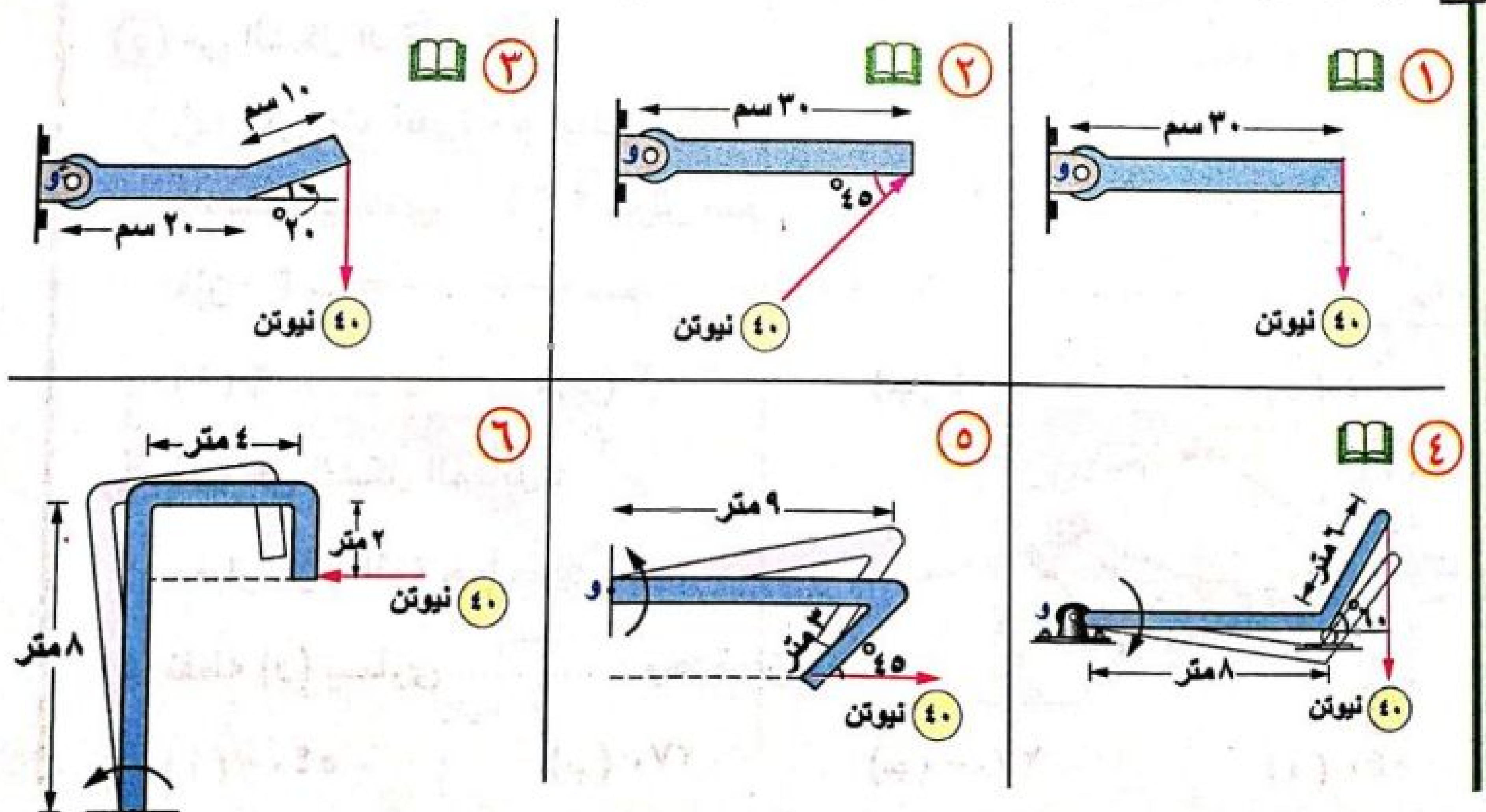
١٥ قوة $\overrightarrow{ق}$ معيارها يساوى ١٥ ث.جم وتعمل فى $\overrightarrow{أب}$ حيث : أ = (−٣ ، ١) ، ب = (١ ، ٤) أوجد متجه عزم هذه القوة بالنسبة لنقطة الأصل. «−٣٩ $\overrightarrow{ع}$»

---

١٦ إذا كان القياس الجبرى لعزم قوة $\overrightarrow{ق}$ حول كل من النقط و (٠ ، ٠) ، ء (١ ، ٠) ، هـ (٠ ، ٢) يساوى ٢٧ ، ١٨ ، ٤٠$\frac{١}{٢}$ وحدة عزم أوجد : $\overrightarrow{ق}$ «$\frac{٢٧}{٤}$ $\overrightarrow{س}$ + ٩ $\overrightarrow{ص}$»

ثانيًا تمارين على إيجاد عزم قوة باستخدام طول العمود

١ فى كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لعزم القوة حول النقطة (و) :



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① قوة مقدارها ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن نقطة أ مسافة ٨ سم فإن معيار عزمها حول أ يساوى .... نيوتن. سم.

(أ) ٤٠ (ب) صفر (جـ) ٢٠٠ (د) ٤٠٠

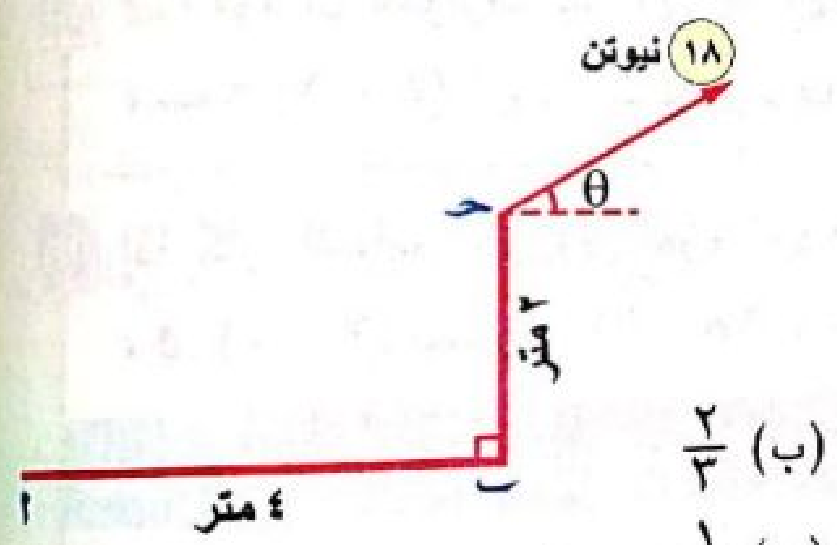
② أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ سم أثرت قوة مقدارها ١٥ نيوتن فى $\overleftarrow{ب حـ}$ فإن معيار عزم القوة بالنسبة للنقطة أ هو .... وحدة عزم.

(أ) $٤٠\sqrt{٣}$ (ب) ٦٠ (جـ) $٦٠\sqrt{٣}$ (د) ١٢٠

③ قوة مقدارها ٧٠ نيوتن تؤثر فى $\overleftarrow{أ ب}$ حيث أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن معيار عزم القوة بالنسبة لمركز المربع يساوى .... نيوتن.سم.

(أ) $١٧٥\sqrt{٢}$ (ب) ٣٥٠ (جـ) $٣٥٠\sqrt{٢}$ (د) ٧٠٠

④ **فى الشكل المقابل :**



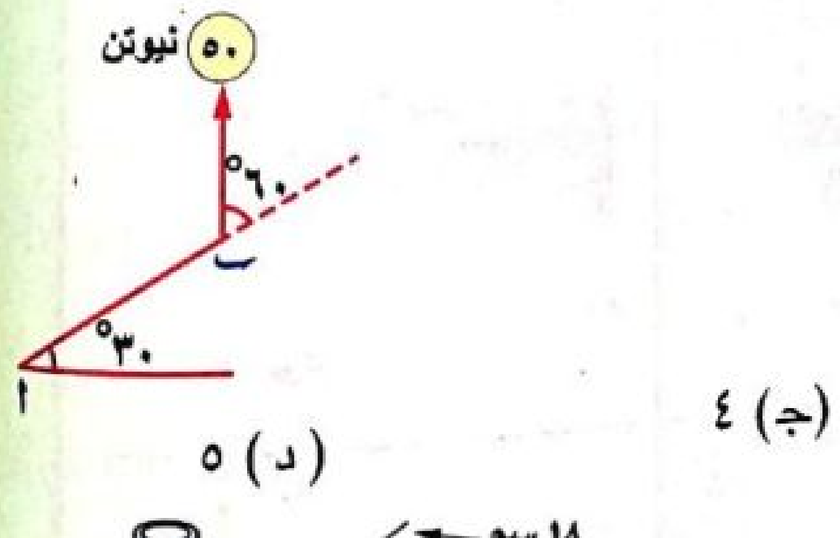
إذا كان عزم القوة ١٨ نيوتن حول النقطة أ يساوى صفر

فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٣}$

⑤ **فى الشكل المقابل :**

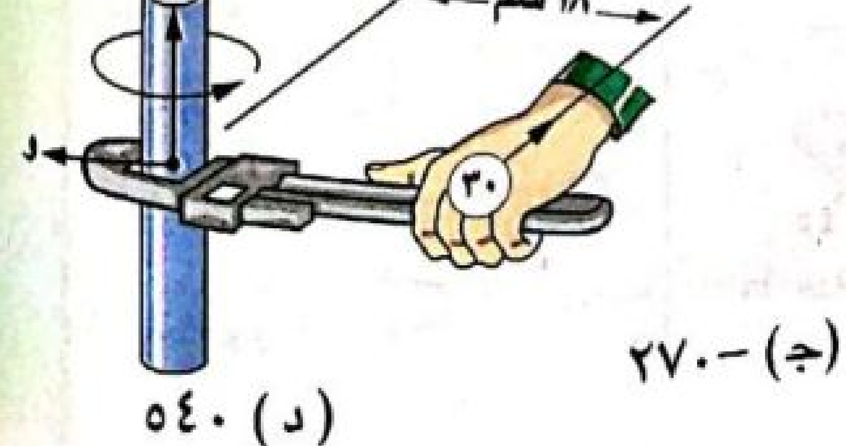


إذا كان عزم القوة ٥٠ نيوتن حول النقطة أ يساوى $١٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

فإن : أ ب = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

⑥ **فى الشكل المقابل :**

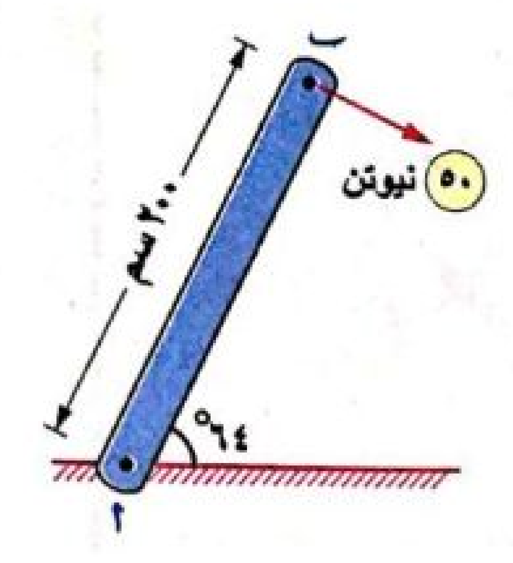


معيار عزم القوة حول نقطة (و) يساوى .... وحدة عزم.

(أ) ‎-٥٤٠ (ب) ٢٧٠ (جـ) ‎-٢٧٠ (د) ٥٤٠

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

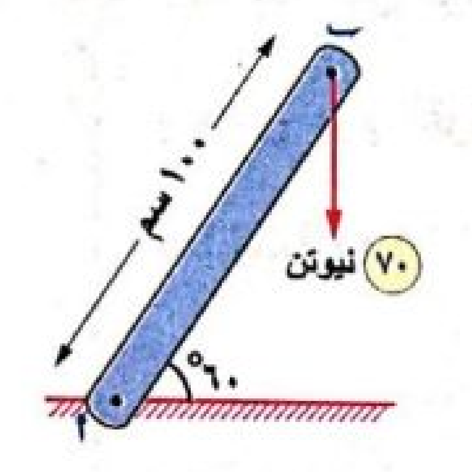
⑦ في الشكل المقابل :



قضيب مثبت بمفصل عند أ أثرت على الطرف ب قوة مقدارها ٥٠ نيوتن فى اتجاه عمودى على القضيب فإن عزم القوة حول نقطة أ يساوى .... نيوتن. متر.

(أ) $١٠^{٤}$ (ب) $١٠^{٢}$ (ج) ١٠٠٠٠ جا ٦٤° (د) ١٠٠ جتا ٦٤°

⑧ في الشكل المقابل :



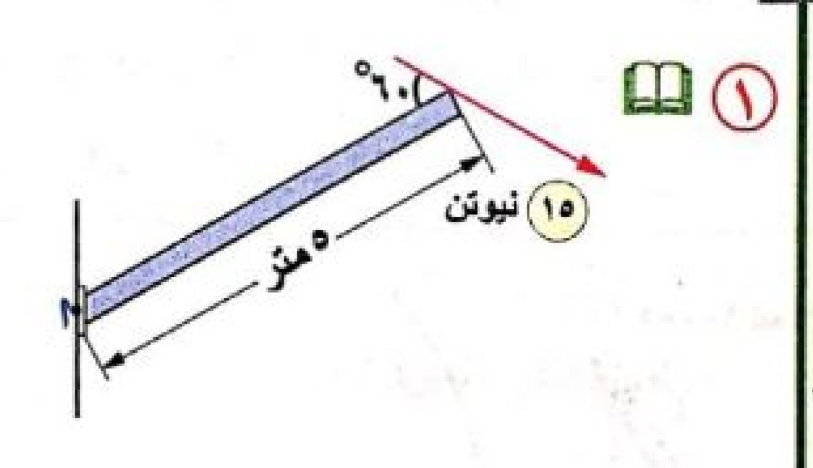
قضيب مثبت بمفصل عند أ أثرت على الطرف ب قوة رأسية لأسفل مقدارها ٧٠ نيوتن. فإن معيار عزم القوة حول نقطة أ يساوى .... نيوتن. متر.

(أ) ٣٥ (ب) ٣٥ $\sqrt{٣}$ (ج) ٧٠ (د) ٧٠ $\sqrt{٣}$

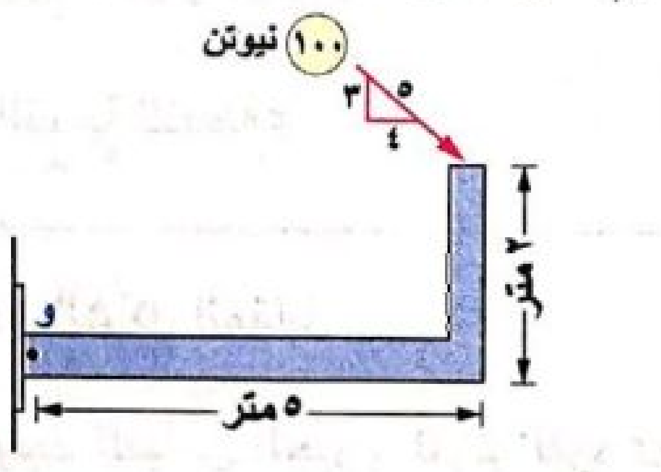
---

٣ في كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لعزم القوة حول النقطة (و) :

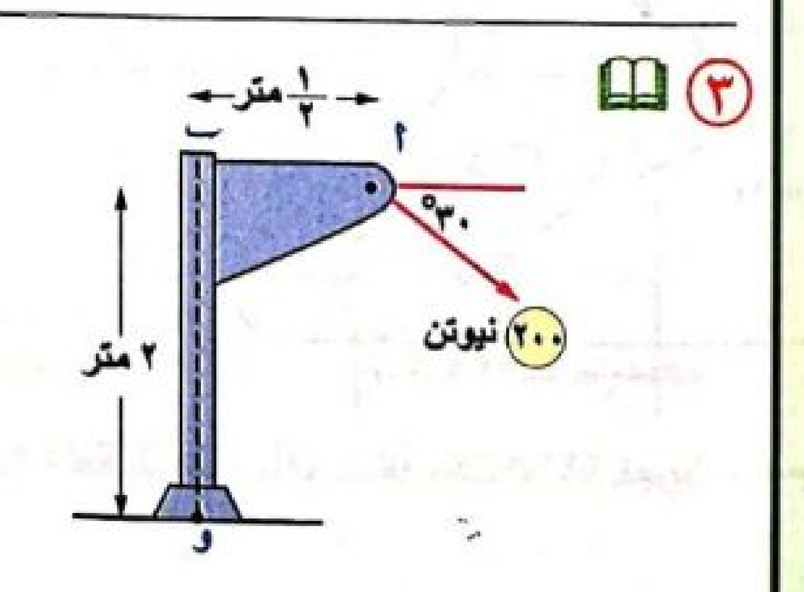
①



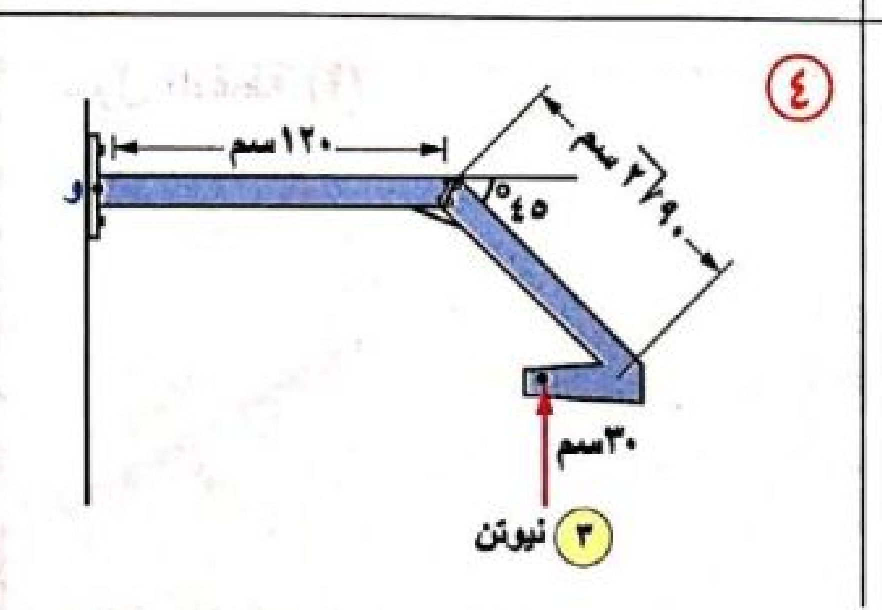
②



③

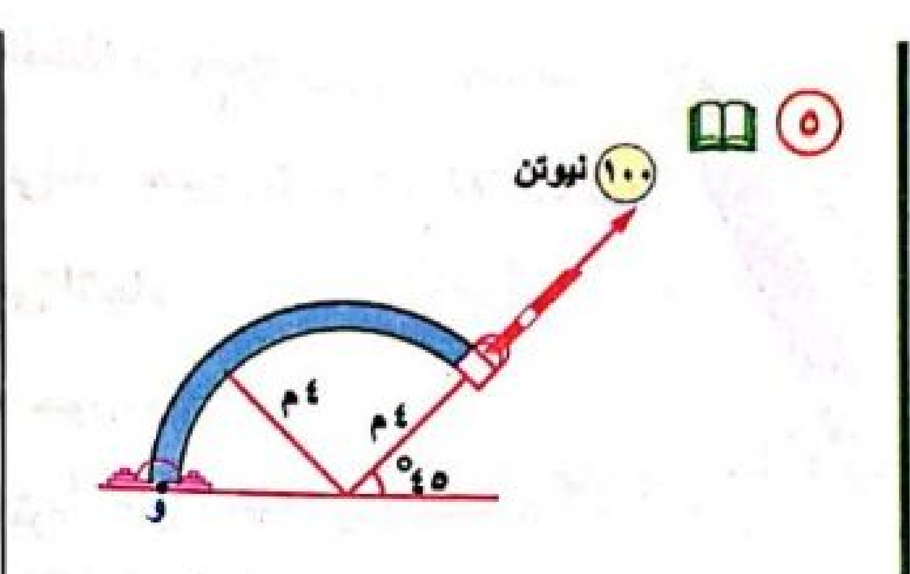


④

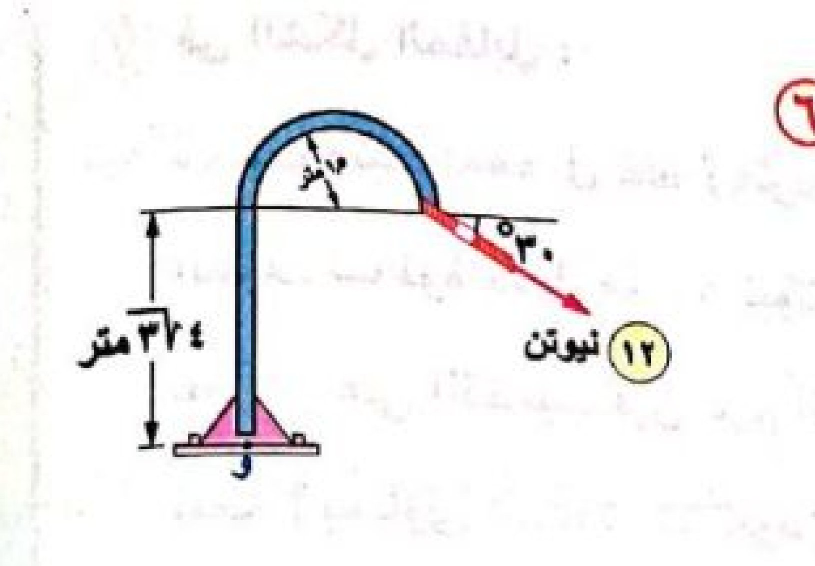


الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ 📖



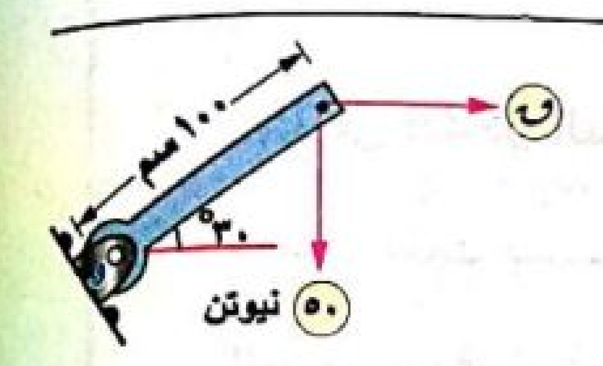
⑥



٤ 📖 إذا كان عزم القوة ق حول نقطة و

يساوى عزم القوة ٥٠ نيوتن حول نقطة و

فما قيمة ق ؟



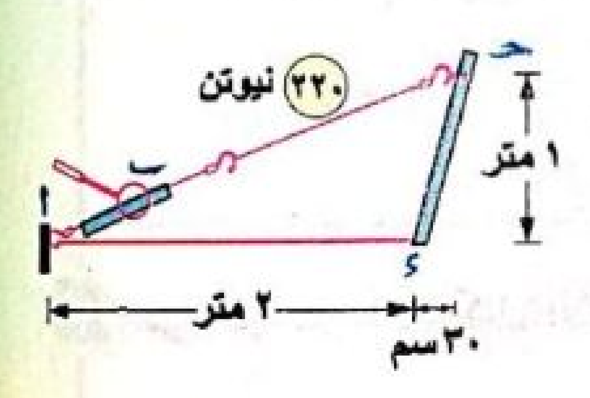
«٥٠ $\sqrt{3}$ نيوتن»

٥ 📖 فى الشكل المقابل :

يوضح شداد ؟ب يؤثر على عمود مائل حـ ء

أوجد معيار عزم قوة الشد

بالنسبة للنقطة ء

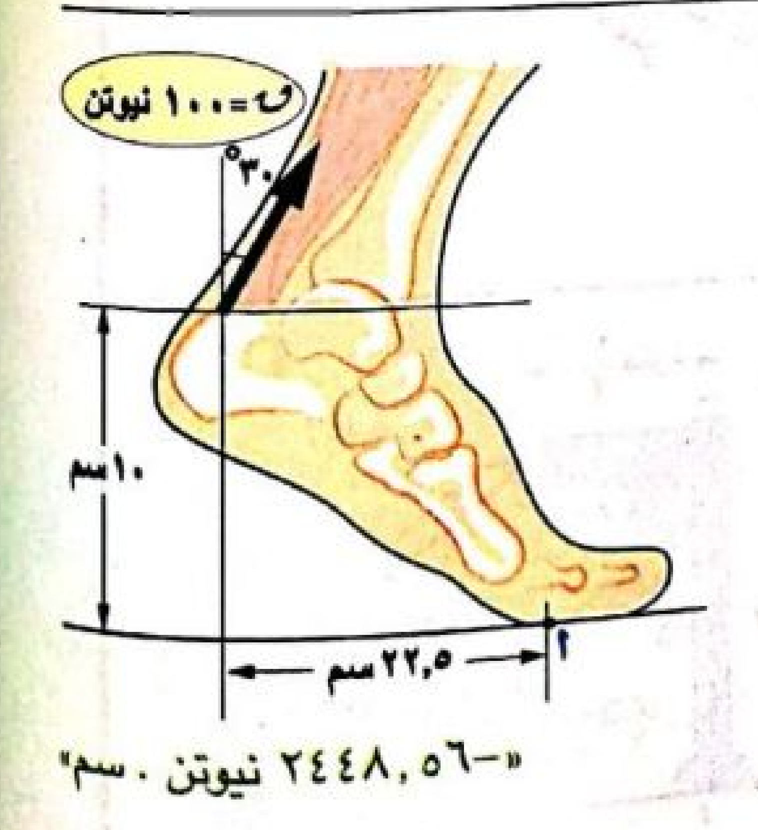


«١٧٥ ، ٤ نيوتن . م»

٦ فى الشكل المقابل :

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ق

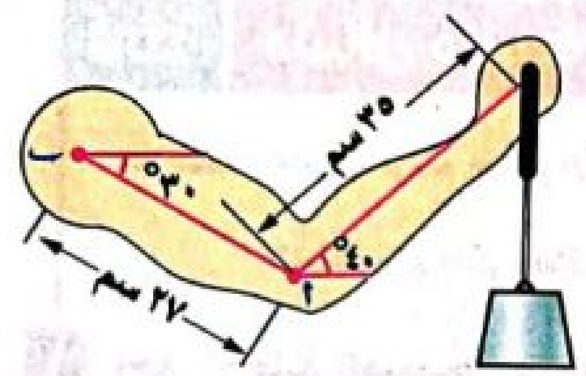
حول النقطة (؟)



«-٢٤٤٨,٥٦ نيوتن . سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

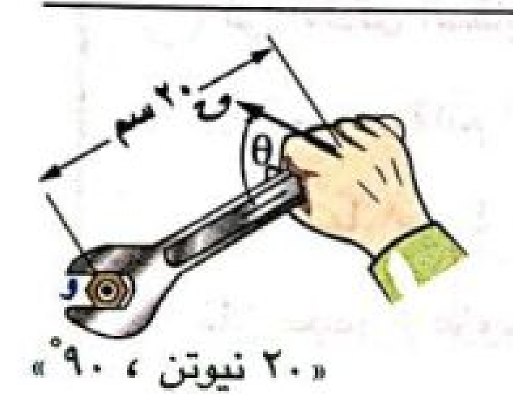
٧ الشكل المقابل يمثل شخصًا يحمل بيده ثقلًا. فإذا كان معيار عزم الثقل حول نقطة أ يساوى ٨٠ نيوتن. متر
أوجد معيار عزم الثقل حول نقطة ب



«١٤٩,٧٧ نيوتن . متر»

---

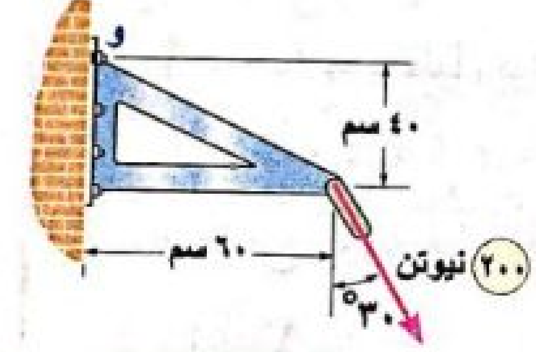
٨ إذا كان العزم اللازم لدوران المسمار حول و يساوى ٤٠٠ نيوتن. سم
أوجد أقل قيمة للقوة ق وقيمة θ التى تحقق دوران المسمار.



«٢٠ نيوتن ، ٩٠°»

---

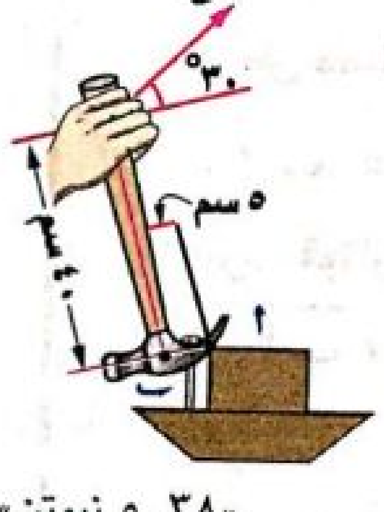
٩ فى الشكل المقابل :
أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ٢٠٠ نيوتن بالنسبة لنقطة و



«-٦٣٩٢,٣ نيوتن . سم»

---

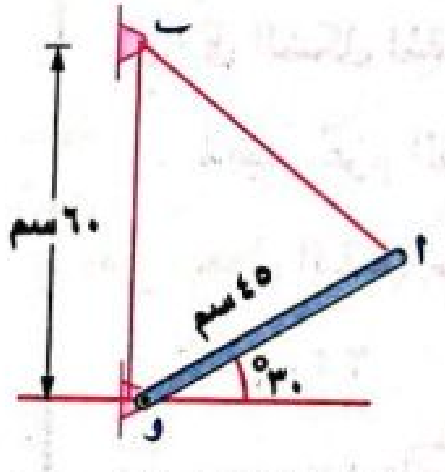
١٠ الشكل المقابل يوضح القوة ق اللازمة لنزع مسمار عند ب إذا كان معيار عزم القوة حول نقطة أ اللازمة لنزع المسمار يساوى ٢٠٠ نيوتن. سم
أوجد معيار القوة ق



«٥,٣٨ نيوتن»

---

١١ فى الشكل المقابل :
الشد فى الخيط $\overline{\text{أب}}$ مقداره ١٥٠ نيوتن.
أوجد عزم قوة الشد بالنسبة للنقطة و

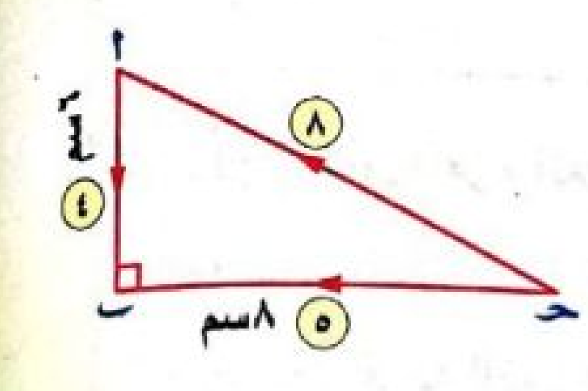


«٦٤٨٥,١٩ نيوتن . سم»

ثالثًا مسائل متنوعة

ملاحظة : «سوف نرسم جميع الأشكال الهندسية الغير المرسومة بحيث تكون رؤوسها مرتبة فى اتجاه دوران عقارب الساعة مالم يذكر خلاف ذلك»

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



① فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أثرت القوى التى قياساتها ٨ ، ٤ ، ٥ نيوتن فى $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$

فإن مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة أ = ... نيوتن.سم.

(أ) ٣٠ (ب) -٣٠ (جـ) ٢٠ (د) ٣٨,٤

② أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، أثرت القوى التى مقاديرها ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٤ ، ١٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ء حـ}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ على الترتيب فإن مجموع عزوم هذه القوى بالنسبة للنقطة ب تساوى .... نيوتن. سم.

(أ) ٩٦ (ب) ٦٦ (جـ) ٨٤ (د) ٢٤

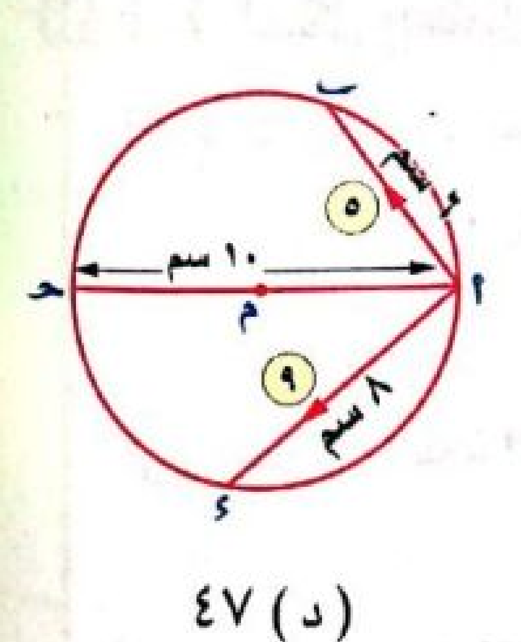
③ فى الشكل المقابل :

قرص مستدير قطره $\overline{أ حـ}$ طوله ١٠ سم

، أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

أثرت قوتان مقداراهما ٥ ، ٩ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب فإن :

$ج_م$ = ... نيوتن.سم.



(أ) -٧ (ب) -١٤ (جـ) ١٤ (د) ٤٧

④ فى الشكل المقابل :

معيار عزم القوة ق = ٤٠ $\sqrt{2}$ نيوتن



حول النقطة ب يساوى .... نيوتن.سم.

(أ) ٣٢٠ (ب) ٢٠٠ $\sqrt{2}$

(جـ) ١٢٠ $\sqrt{2}$ (د) ٨٠ $\sqrt{17}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ في الشكل المقابل :

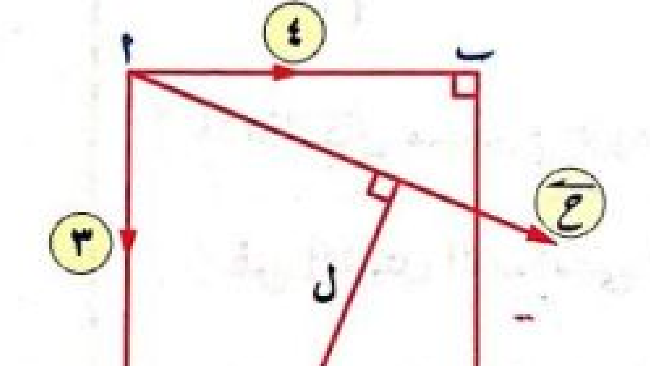
مجموع عزوم القوى حول

النقطة حـ = ... نيوتن.سم.

(أ) $40\sqrt{3}$ (ب) $120 - 80\sqrt{3}$

(جـ) $80\sqrt{3}$ (د) $120\sqrt{3}$

⑥ (دور أول ٢٠١٩) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٢ متر ، أثرت القوتان ٤ ، ٣ ث.كجم في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أء}$ على الترتيب

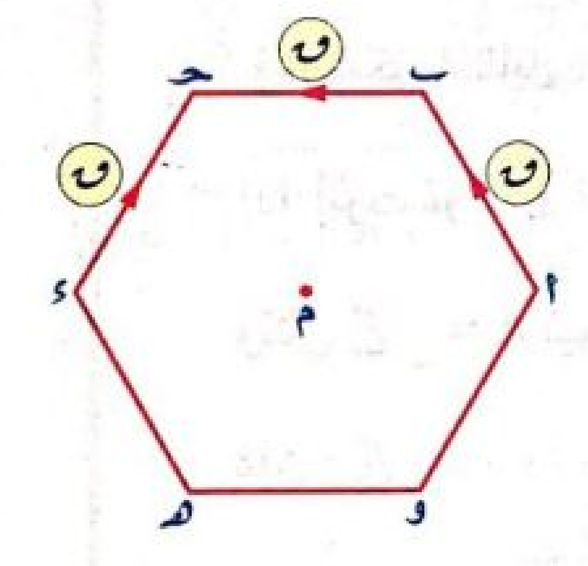
فإذا كانت محصلتهما $\overleftarrow{ح}$ ، ل طول العمود المرسوم من هـ على خط عمل $\overleftarrow{ح}$ فإن : ....

(أ) ح = ٥ ث.كجم ، ل = ١,٥ متر   (ب) ح = ٥ ث.كجم ، ل = ١ متر



(جـ) ح = ٥ ث.كجم ، ل = $\sqrt{2}$ متر   (د) ح = ٥ ث.كجم ، ل = ١,٢ متر

⑦ (دور ثان ٢٠١٨) في الشكل المقابل :



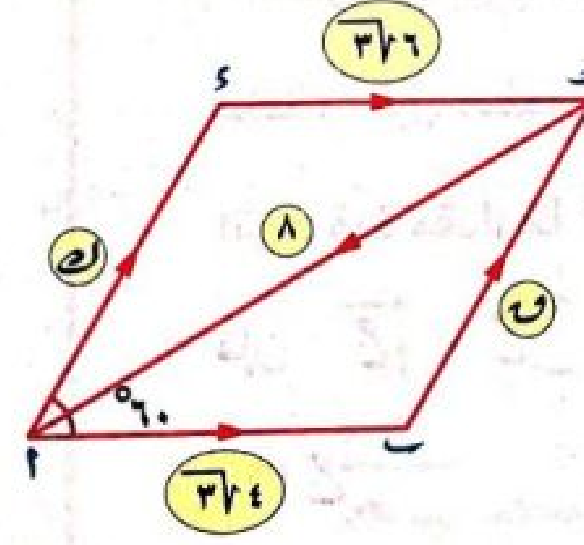
أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم طول ضلعه (ل)

إذا أثرت ثلاث قوى متساوية مقدار كل منها (ق) في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{ءحـ}$ على الترتيب

فإن مجموع عزم هذه القوى حول م (مركز السداسي) يساوي .... وحدة عزم.

(أ) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ق ل   (ب) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ق ل   (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق ل   (د) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ق ل

⑧ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء معين طول ضلعه ل سم ، ق (∠ أ) = ٦٠°

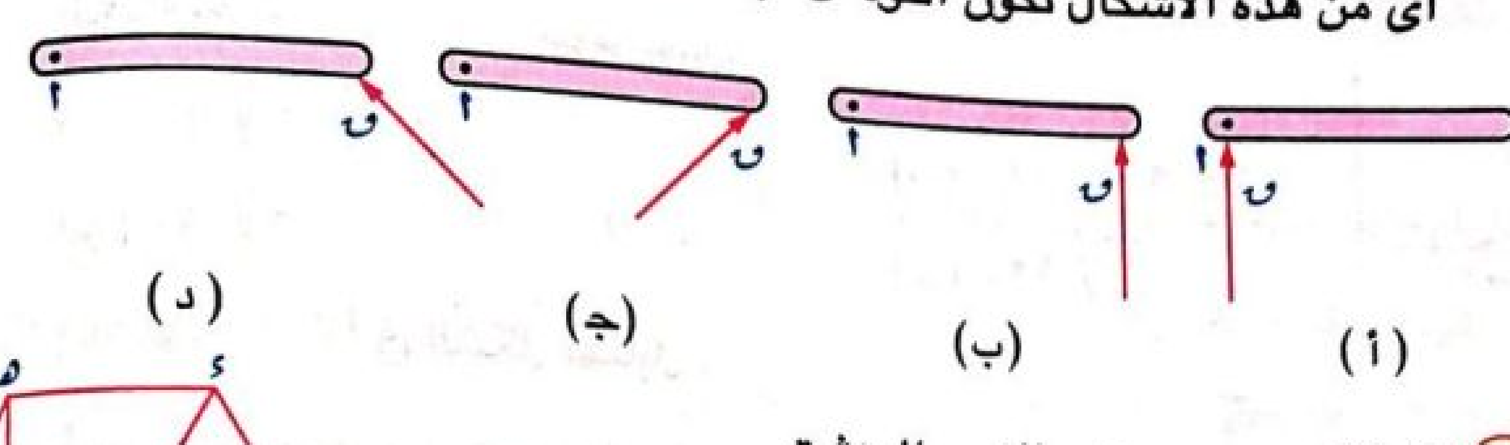
أثرت القوى $4\sqrt{3}$ ، ق ، $6\sqrt{3}$ ، ك ، ٨ نيوتن في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{ءحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{حـأ}$

وكان $ح_م$ = صفر فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) $2\sqrt{3}$ (ب) $4\sqrt{3}$ (جـ) $5\sqrt{3}$ (د) $6\sqrt{3}$

⑨ الأشكال التالية تمثل باب متصل بمفصل عند أ أثرت عليه قوة $\overleftarrow{ق}$

أى من هذه الأشكال تكون القوة $\overleftarrow{ق}$ لها أكبر عزم حول أ ؟



⑩ إذا كان مجموع عزوم القوى المؤثرة

فى الشكل السداسى المنتظم المقابل

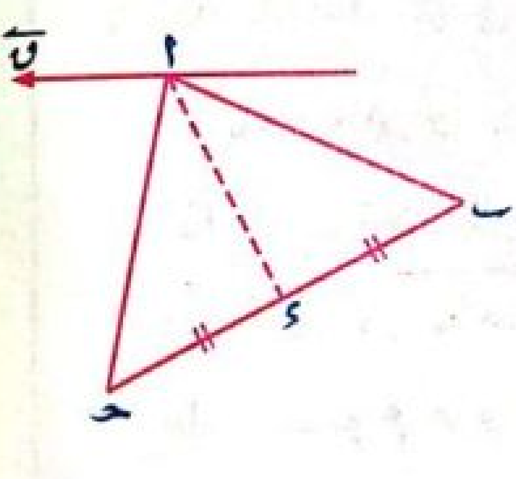
ينعدم حول نقطة فى المستوى مثل ن

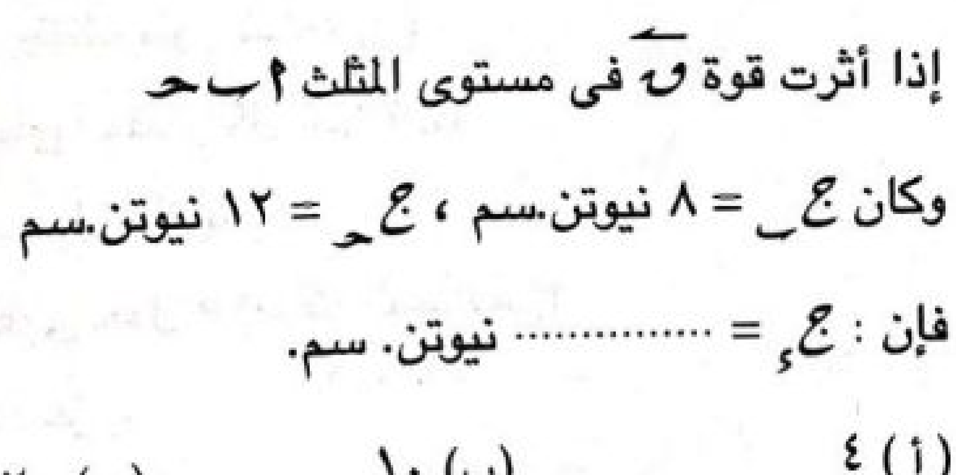
فإن : ن ∈ ....



(أ) $\overleftrightarrow{أحـ}$ (ب) $\overleftrightarrow{أء}$ (جـ) $\overleftrightarrow{أهـ}$ (د) $\overleftrightarrow{أو}$

⑪ فى الشكل المقابل :





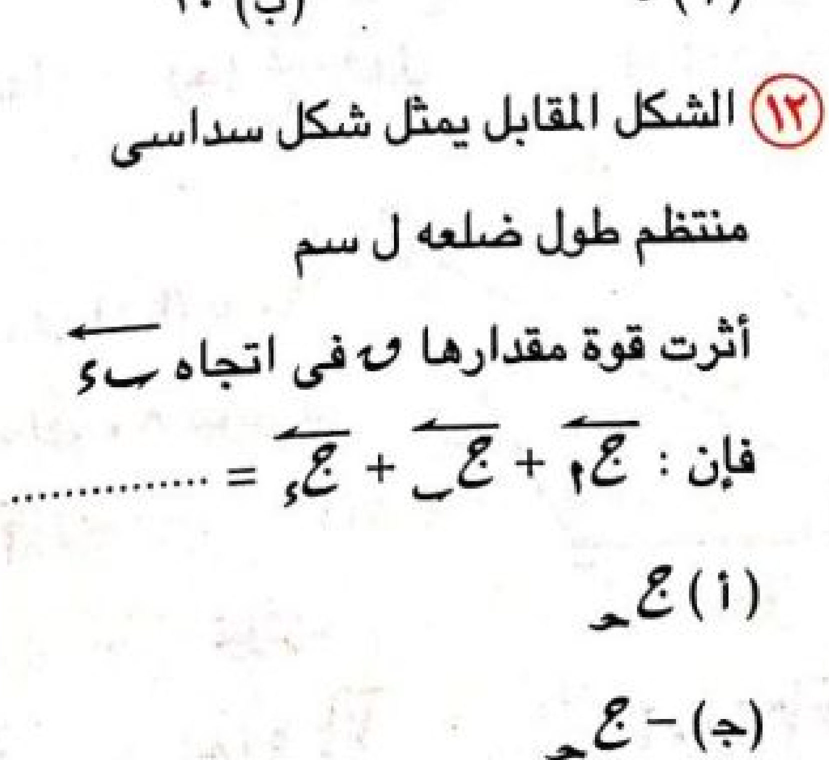
إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى المثلث أ ب حـ

وكان $ج_{ب}$ = ٨ نيوتن.سم ، $ج_{حـ}$ = ١٢ نيوتن.سم

فإن : $ج_{ء}$ = ... نيوتن. سم.

(أ) ٤ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

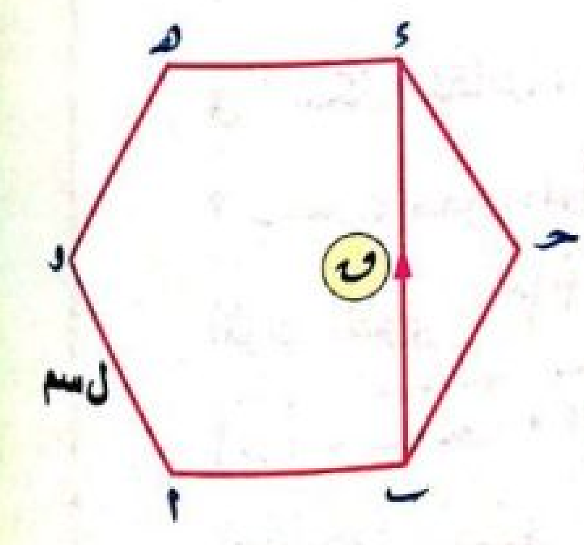
⑫ الشكل المقابل يمثل شكل سداسى



منتظم طول ضلعه ل سم

أثرت قوة مقدارها ق فى اتجاه $\overleftarrow{ب ء}$

فإن : $\overleftarrow{ج_{أ}} + \overleftarrow{ج_{ب}} + \overleftarrow{ج_{ء}}$ = ...



(أ) $ج_{حـ}$ (ب) $ج_{هـ}$

(جـ) $-ج_{حـ}$ (د) $ج_{و}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٣) 📖 قضيب طوله ل يمكنه الدوران بسهولة حول نقطة عند أحد نهايتيه. أثرت على نهايته الأخرى قوة مقدارها ق وتميل على القضيب بزاوية قياسها θ فإذا كانت ق يجب أن تكون عمودية على القضيب فعلى أى بُعد من مركز الدوران يمكن أن تؤثر ق بحيث يكون لها نفس العزم ....

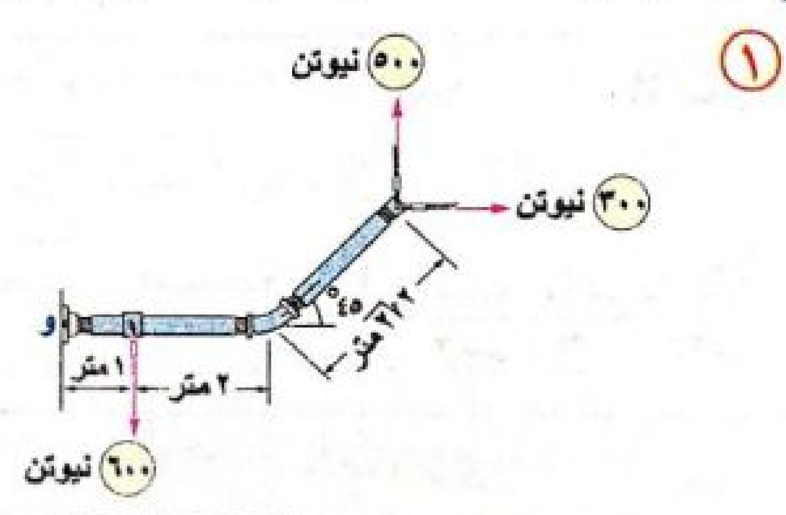
مركز الدوران

(أ) ل جا θ　　(ب) ل جتا θ　　(ج) ل　　(د) ل ظا θ

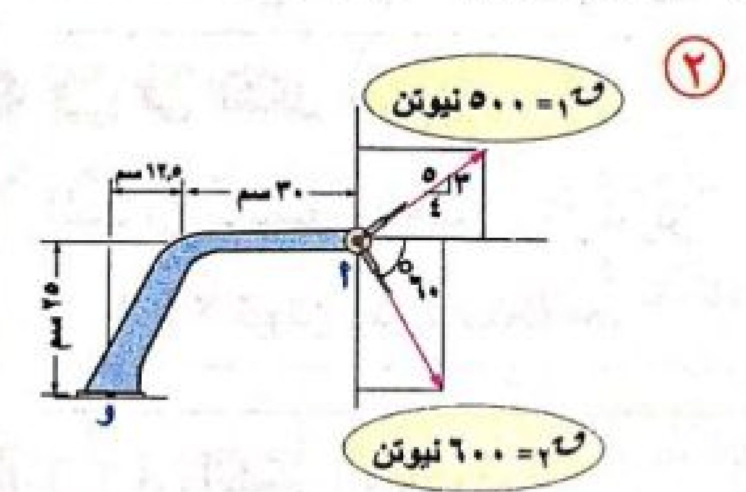
---

٢ فى كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى حول النقطة (و) :

(١)



(٢)



---

٣ 📖 أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم . أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٨ ، ٥ √٢ نيوتن فى اتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ على الترتيب.

أوجد مجموع عزوم القوى :

(١) بالنسبة للنقطة أ　　(٢) بالنسبة للنقطة ب

(٣) بالنسبة لمركز المربع.　　(٤) بالنسبة للنقطة هـ حيث هـ منتصف $\overline{ب حـ}$

«−١٣٠ ، −٣٠ ، −٨٠ ، −٣٠ نيوتن.سم»

---

٤ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ٢٠ سم ، تؤثر القوى ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ على الترتيب.

أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى :

(١) حول نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث.　　(٢) حول منتصف $\overline{ب حـ}$

«صفر ، ١٠٠٠ √٣ نيوتن.سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥ أ ب حـ ء معين طول ضلعه ١٢ سم ، ق(∠أ) = ٦٠° ، أثرت القوى ١١ ، ٦ ، ٥ ، ٧ نيوتن في $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ء حـ}$ ، $\overleftarrow{ء ب}$ على الترتيب.

أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى :

① حول أ

② حول م نقطة تقاطع قطرى المعين.

«٣٦ $\sqrt{٣}$ ، ٣٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.سم»

---

٦ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٧ ، ٤ ، ٢ نيوتن في $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{هـ ء}$ على الترتيب.

أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول الرأس (و)

«٢٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن. سم»

---

٧ **في الشكل المقابل :**

أثبت أن محصلة القوتين ١٠٠ نيوتن ، ٨٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن تمر بالنقطة حـ

---

٨ **في الشكل المقابل :**

ثلاث قوى تؤثر فى قضيب

أوجد مجموع عزوم القوى

بالنسبة لكل من النقطتين : أ ، ب

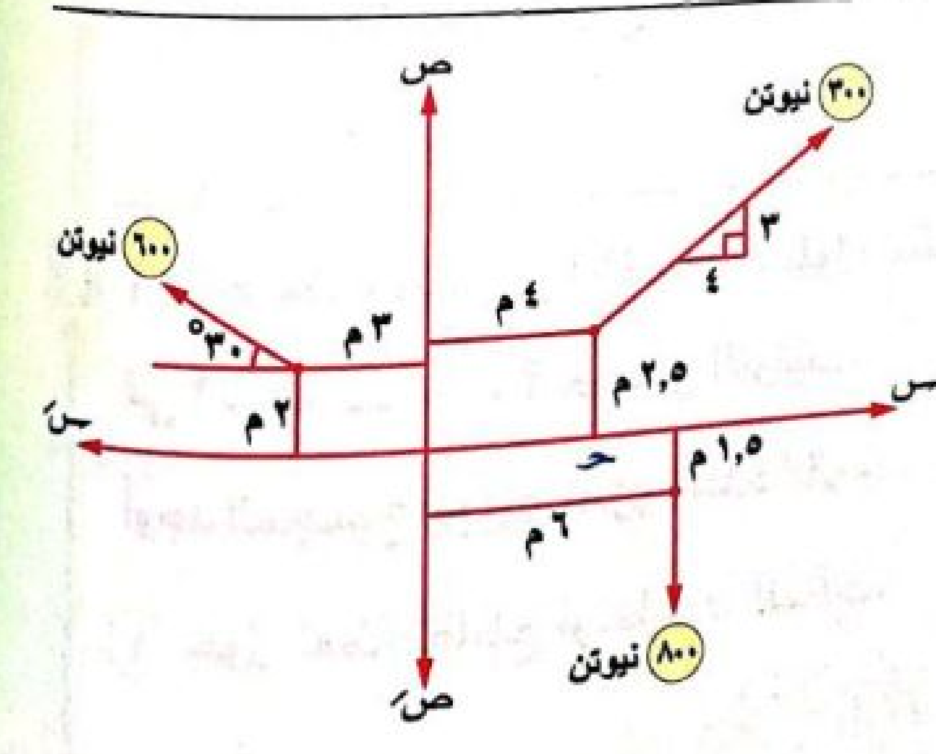
«−٨ , ٥٦٧٨٠ ، ٢١٧٠٠ نيوتن.سم»

---

٩ **في الشكل المقابل :**

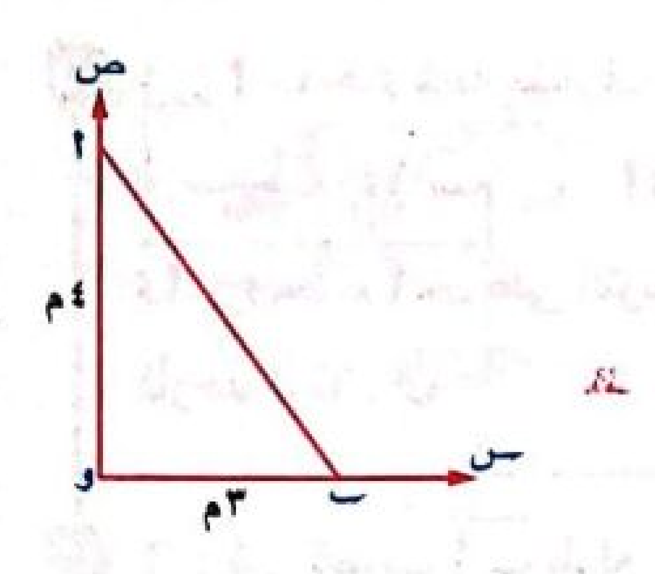
أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى

بالنسبة للنقطة حـ



«−٨ , ٣٢٦٠ نيوتن.م»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



١٠ 📖 تؤثر القوة $\overrightarrow{ق}$ فى المستوى س ص على المثلث أ و ب فإذا كان القياس الجبرى لعزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة و يساوى ٨٤ نيوتن. م ، القياس الجبرى لعزمها بالنسبة للنقطة أ يساوى – ١٠٠ نيوتن. م ، والقياس الجبرى لعزمها بالنسبة للنقطة ب يساوى صفر.

عيِّن $\overrightarrow{ق}$ «٥٤ نيوتن ، تميل على $\overrightarrow{و س}$ بزاوية قياس ١٤٨° ٤٠َ»

---

١١ (دور أول ٢٠١١) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : ق(∠ أ) = ١٢٠° تؤثر قوى مقاديرها ٤ ، ٤ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ث. كجم فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ على الترتيب. أثبت باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $\overline{ب حـ}$ ويوازى $\overleftrightarrow{أ حـ}$

---

١٢ 📖 أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم ، هـ ∈ $\overline{ب حـ}$ حيث : ب هـ = ١ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ق نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ على الترتيب إذا كان خط عمل المحصلة يمر بالنقطة هـ أوجد قيمة : ق «٨ $\sqrt{٢}$ نيوتن»

---

١٣ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أثرت القوى ٥ ، ٨ ، ٦ ، ١٠ ثقل جم فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ على الترتيب.

أوجد نقطة و ∈ $\overleftrightarrow{ب حـ}$ بحيث يكون مجموع عزوم القوى حول و = ٤٥ ثقل جم.سم فى اتجاه أ ب حـ ء «و ∈ $\overline{ب حـ}$ ، ب و = ٣ سم»

---

١٤ 📖 أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، القوى ١٦ ، ١٤ ، ق ، ك ث.جم تؤثر فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب . فإذا كان المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول كلٍ من حـ ومركز المستطيل يساوى صفرًا.

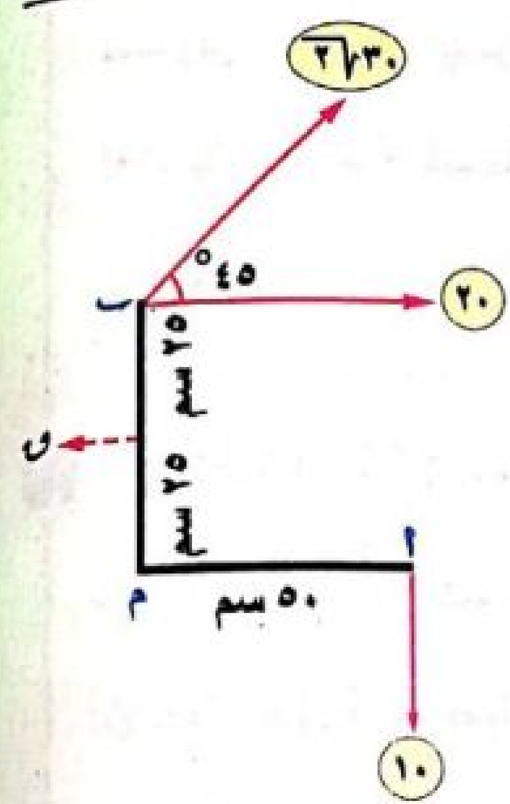
أوجد : ق ، ك «$٩\frac{١}{٣}$ ، ٢٤ ث.جم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٥ 📖 أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى ب ، $\overline{أ ء} // \overline{ب حـ}$ ، أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، أ ء = ٩ سم ، أثرت قوى مقاديرها ق ، ٤٤ ، ٦٨ ث.جم فى $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{ء حـ}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ على الترتيب إذا كان خط عمل محصلة مجموعة القوى يمر بنقطة ب فأوجد قيمة : ق

«١٢٦ ث.جم»

١٦ 📖 ثنى قضيب $\overline{أ ب}$ طوله ١٠٠ سم عند نقطة منتصفه م بحيث أصبح $\overline{أ م}$ عموديًا على $\overline{م ب}$ أثرت القوى ١٠ ، ٢٠ ، $٣٠\sqrt{٢}$ ث. كجم عند الطرفين أ ، ب كما هو مبين بالشكل المقابل. ما هو مقدار القوة ق التى يجب أن تؤثر عند منتصف $\overline{م ب}$ وفى الاتجاه الموضح بالشكل بحيث ينعدم المجموع الجبرى لعزوم القوى حول نقطة م ؟

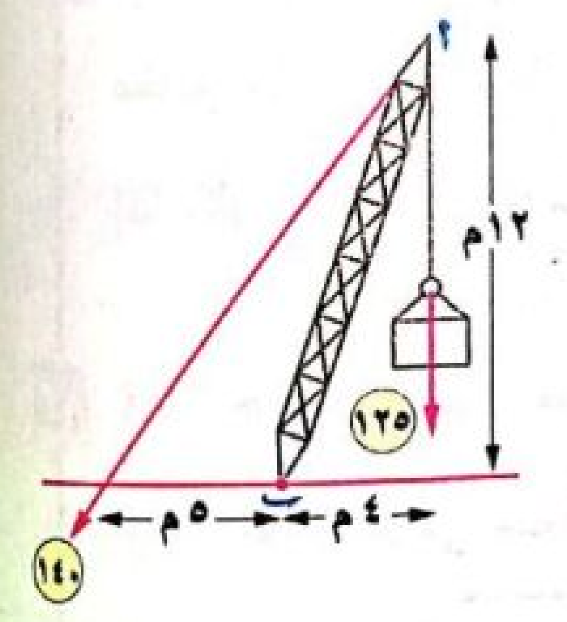


«١٢٠ ث.كجم»

١٧ 📖 فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ تمثل رافعة لرفع البضائع إذا كان الشد فى الخيط يساوى ١٤٠ نيوتن ، وزن الصندوق ١٢٥ نيوتن.

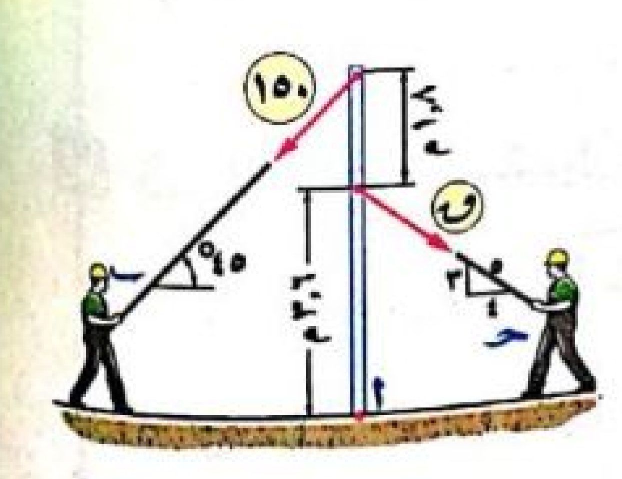
أوجد مجموع عزمى القوتين بالنسبة للنقطة ب



«٦٠ نيوتن.م»

١٨ 📖 فى الشكل المقابل :

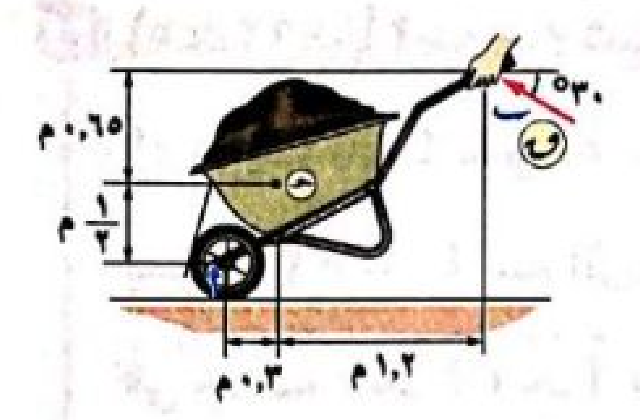
رجل عند الموضع ب يشد الحبل بقوة مقدارها ١٥٠ نيوتن فما هو مقدار القوة ق التى يجب أن يشد بها رجل أخر الحبل عند الموضع حـ بحيث يحفظ العمود من الدوران. أى يكون مجموع عزمى الشدين حول أ = صفر



«١٩٨,٩ نيوتن»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٩ **فى الشكل المقابل :**



إذا كان مركز ثقل عجلة يدوية ومحتوياتها هو النقطة (حـ) وكان ق = ١٠٠ ث.كجم وكان مجموع عزمى قوة الوزن والقوة ق حول النقطة (أ) يساوى صفر.

احسب وزن العربة اليدوية بمحتوياتها. «٥٨٢ ث.كجم»

---

٢٠ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى المثلث بحيث كان $ج_أ$ = $ج_ب$ = ٦٠ نيوتن. سم ، $ج_حـ$ = −٦٠ نيوتن.سم. أوجد مقدار $\overleftarrow{ق}$ وعيِّن خط عملها. «١٥ نيوتن»

---

٢١ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٦ سم أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى المستطيل ، فإذا كان عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ب = عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ء = −٢٤٠ نيوتن.سم ، عزم $\overleftarrow{ق}$ حول أ = ٢٤٠ نيوتن. سم فعيِّن مقدار واتجاه وخط عمل $\overleftarrow{ق}$ «ق = ٥٠ نيوتن»

---

٢٢ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٤,٥ سم ، ب حـ = ٦ سم ، أثرت مجموعة من القوى المستوية فى مستوى المستطيل فإذا كان المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول كلٍ من أ ، حـ يساوى ٧٢٠ ثقل كجم. سم ، المجموع الجبرى لعزومها حول ب يساوى −٢٤٠ ثقل كجم. سم فعيِّن مقدار واتجاه وخط عمل محصلة هذه القوى.

«ح = $\frac{2}{3}$ ٢٦٦ ثقل كجم ، توازى $\overline{أ حـ}$ ، تقطع $\overline{ب حـ}$ فى ه حيث ب ه = ١,٥ سم»

---

٢٣ النقط أ (٢ ، ٧) ، ب (٢ ، ١٠) ، حـ (س ، ص) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب أثرت القوى ١٥ ، ١٤ ، ق ثقل كجم فى الأضلاع $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ على الترتيب ، فإذا كانت المحصلة تساوى ٦ ثقل كجم وتعمل فى الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد باستخدام العزوم إحداثيي النقطة حـ ومقدار ق «(−٢ ، ١٠) ، ٢٥ ث.كجم»

٢٤ (مصر ١٩٩٣) أ ب جـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند كلٍ من أ ، ء فيه :

أ ء = جـ ء = ٤٠ سم ، أ ب = ٧٠ سم ، م ∈ $\overline{أب}$

بحيث : أ م = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٥ ، ق ، ١٠ $\sqrt{٢}$ ، ٣٥ ث.جم

فى $\overrightarrow{جـ ب}$ ، $\overrightarrow{جـ م}$ ، $\overrightarrow{جـ أ}$ ، $\overrightarrow{جـ ء}$ على الترتيب وكان معيار محصلة هذه القوى ٥٠ ث.جم

أوجد ق ومعيار عزم محصلة المجموعة بالنسبة لنقطة أ «١٠ ث.جم ، ٤٠٠ ث.جم.سم»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت معادلة خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$ هى $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣) + ك (٤ ، ٥)

فإن عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة أ (١٠ ، ١٣) هو ....

(أ) $\overrightarrow{صفر}$ (ب) ٢ $\overrightarrow{ع}$ (جـ) -٢ $\overrightarrow{ع}$ (د) -٤ $\overrightarrow{ع}$

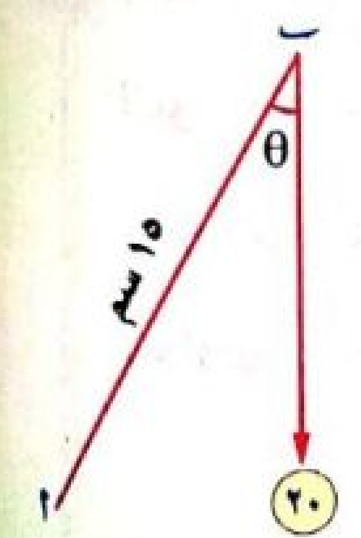
② تؤثر القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ - ٤ $\overrightarrow{ص}$ فى نقطة أ (٠ ، ٢) وكانت $\overrightarrow{ب جـ}$ = (-٤ ، -٢)

وكان طول العمود المرسوم من النقطة ب على خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يساوى طول العمود

المرسوم من النقطة جـ على خط عمل $\overrightarrow{ق}$ فإن : $\overrightarrow{جـ_ب}$ + $\overrightarrow{جـ_جـ}$ = ...

(أ) ٢ $\overrightarrow{جـ_ب}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{جـ_ب}$ (جـ) ٢ $\overrightarrow{جـ_جـ}$ (د) $\overrightarrow{صفر}$

③ فى الشكل المقابل :



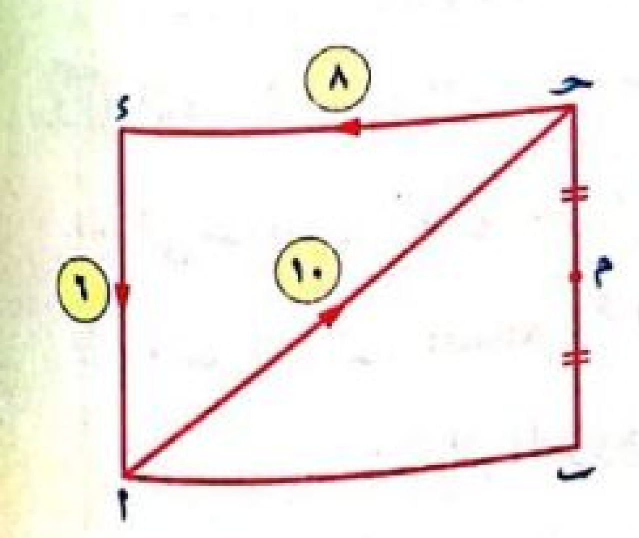
مقدار عزم القوة ٢٠ نيوتن حول النقطة

أ ∈ ....

(أ) [٠ ، ١٥] (ب) [٠ ، ٢٠]

(جـ) [٠ ، ٣٠] (د) [٠ ، ٣٠٠]

④ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٦ سم

، ب جـ = ١٢ سم ، م منتصف $\overline{ب جـ}$

، أثرت القوى التى مقاديرها ٦ ، ١٠ ، ٨ نيوتن

فى الاتجاهات $\overrightarrow{ء أ}$ ، $\overrightarrow{أ جـ}$ ، $\overrightarrow{جـ ء}$ على الترتيب

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كما أثرت قوة مقدارها ٥ نيوتن عند م فإذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول ب يساوى ١١١ وحدة عزم فإن قياس الزاوية الحادة التى تميل بها القوة التى مقدارها ٥ على $\overline{\text{ب ح}}$ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ظا$^{-1}$ $\frac{٤}{٣}$

⑤ إذا كانت : أ ، ب ، ح ، ء نقط تقع على المستقيم ل وأثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ بحيث $\overleftarrow{ق}$ // المستقيم ل وكان : ٣ $ج_{أ}$ + ٢ $ج_{ب}$ = ٣٠ نيوتن.سم.

فإن : ٣ $ج_{ب}$ − ٢ $ج_{ح}$ + $ج_{ء}$ = ... نيوتن.سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٥ (جـ) ١٨ (د) ٢٤



⑥ فى الشكل المقابل :



أ ب ح مثلث مرسوم داخل دائرة فيه :

أ ب = ١٠ سم ، أ ح = ٢٤ سم

، ب ح = ٨ $\sqrt{١٠}$ سم.

وطول نصف قطرها ١٣ سم أثرت القوى ١٢ ، ٣٠ ، ٢٠ ثقل جرام

فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ح}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح ب}}$ على الترتيب فإن المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول مركز الدائرة = ... وحدة عزم.

(أ) ٣٣ (ب) ١٣٢ (جـ) ٦٦ (د) ٣٥٤

⑦ إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى Δ أ ب ح وكان $ج_{أ}$ = ٢ $ج_{ب}$ وكانت ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

فإن : $ج_{ب}$ − $ج_{أ}$ = ... $ج_{ء}$

(أ) $\frac{-١}{٢}$ (ب) $\frac{-٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) ٢

⑧ إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى المستطيل أ ب ح ء وكانت م هى نقطة تقاطع قطريه وكان $ج_{أ}$ = −٢٨ نيوتن.متر ، $ج_{م}$ = ٢٤ نيوتن.متر

فإن : $ج_{ح}$ = ... نيوتن.متر.

(أ) −٤ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٧٦

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٩) إذا كانت $\overleftarrow{ق}$ قوة فى مستوى متوازى الأضلاع أ ب ح ء وكان $ج_{أ} = -١٨$ وحدة عزم

، $ج_{ب} = ج_{ء} = ٣٢$ وحدة عزم. فإن : $ج_{ح} = $ .... وحدة عزم.

(أ) ٥٠ (ب) ٨٢ (جـ) ٤٦ (د) ١٤

(١٠) إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى Δ أ ب ح وكانت ء $\in \overline{ب ح}$ حيث $\frac{ب ء}{ء ح} = \frac{١}{٥}$

وكان : $ج_{ب} = ١٠$ نيوتن.سم ، $ج_{ء} = ٦$ نيوتن.سم.

فإن : $ج_{ح} = $ .... نيوتن.سم.

(أ) ١٦ (ب) ١٤ (جـ) −١٤ (د) −٤٠

(١١) أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٣ سم ، ب ح = ٤ سم ، $\overleftarrow{ق}$ قوة تؤثر

فى مستوى المثلث وتوازى $\overline{أ ح}$ فإذا كان : ق = ١٥ نيوتن

فإن : $\| \overleftarrow{ج_{ب}} - \overleftarrow{ج_{أ}} \| = $ .... نيوتن.سم.

(أ) ٣٦ (ب) ١٢ (جـ) ٤٥ (د) ٦٠

(١٢) فى الشكل المقابل :

أ ، ب ، ح على استقامة واحدة

فإذا كان : $\overleftarrow{ج_{أ}} = ٢ \overleftarrow{ج_{ب}} = ٣ \overleftarrow{ج_{ح}}$

فإن : أ ب : ب ح = ...

(أ) ٣ : ١ (ب) ٣ : ٢ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٢ : ١

(٢٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت القوة ق = ٤٠٠ نيوتن ، $٠° \leq \theta \leq ١٨٠°$

أوجد قياس الزاوية θ التى تجعل معيار عزم القوة ق

حول أ أصغر ما يمكن.

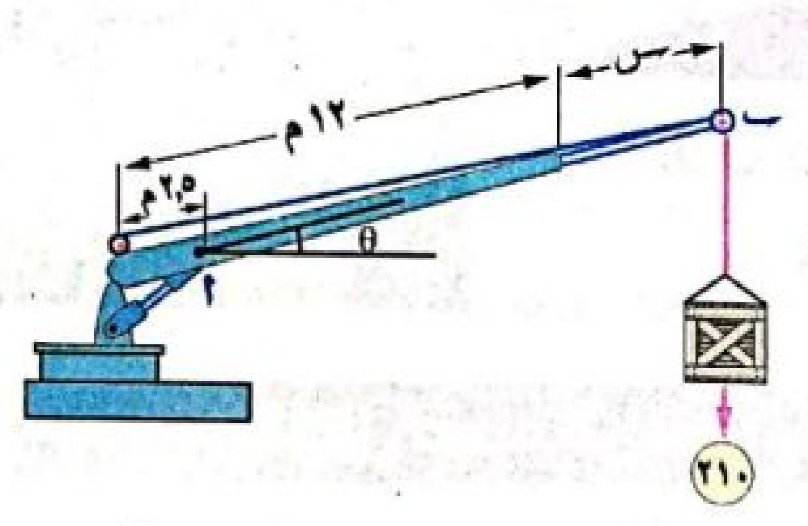
«١٤٦° ١٩َ»

٢٧ $\overline{أ ب}$ حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، ء منتصف $\overline{أ ب}$ رسم $\overleftrightarrow{ءهـ} \perp \overleftrightarrow{ب حـ}$ يقطعه فى هـ ، أثرت القوى $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ فى أضلاع المثلث فإذا كانت محصلة هذه القوى تساوى $١٢\sqrt{٣}$ نيوتن وخط عملها $\overleftrightarrow{ءهـ}$ أوجد هذه القوى مقدارًا واتجاهًا.

«١٨ ، ٦ ، ٦ نيوتن»

---

٢٨ الشكل المقابل يوضح رافعة يمكن تعديل زاوية ميلها θ حيث $٠ \leq θ \leq ٩٠°$ والجزء الأمامى منها يتمدد بطول س متر حيث $٠ \leq س \leq ٤$ معلق فيها صندوق كتلته ٢١٠ كجم



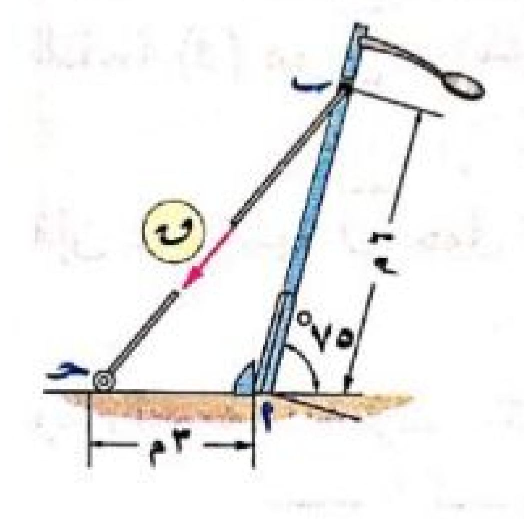
أوجد معيار العزم المتولد عند نقطة أ كدالة فى θ ، س ، أوجد كذلك قيم كل من θ ، س عندما يأخذ العزم عند أ أكبر قيمة له وأوجد هذه القيمة.

«٢٨٣٥ ث.كجم.متر»



٢٩ فى الشكل المقابل :

أوجد مقدار القوة ق التى يجب أن تؤثر فى الكابل لتعطى عزم حول نقطة أ مقداره ١٥٠٠ نيوتن.متر



«٦٣٦ نيوتن»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الدرس 2

عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثلاثى الأبعاد

عزم قوة حول نقطة فى الفراغ

إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = (\text{ق}_{\text{س}} ، \text{ق}_{\text{ص}} ، \text{ق}_{\text{ع}})$ تؤثر فى النقطة أ (س ، ص ، ع) التى متجه موضعها بالنسبة للنقطة (و) هو $\overrightarrow{\text{ر}} = (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع})$

فإن عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول النقطة (و) هو $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$

ومن تعريف الضرب الاتجاهى لمتجهين فى الفراغ

$$\therefore \overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ق}_{\text{س}} & \text{ق}_{\text{ص}} & \text{ق}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ص ق}_{\text{ع}} - \text{ع ق}_{\text{ص}})\overrightarrow{\text{س}} + (\text{ع ق}_{\text{س}} - \text{س ق}_{\text{ع}})\overrightarrow{\text{ص}} + (\text{س ق}_{\text{ص}} - \text{ص ق}_{\text{س}})\overrightarrow{\text{ع}}$$

ملاحظتان

① طول العمود الساقط من (و) على خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}} = \dfrac{\|\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}\|}{\|\overrightarrow{\text{ق}}\|}$

② إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ تؤثر فى نقطة أ فإن عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول نقطة ب $= \overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$

مركبات عزم القوة حول المحاور س ، ص ، ع

يمكن كتابة متجه العزم $\overleftarrow{ج}_{و}$ بدلالة الإحداثيات المتجهة كالتالى :

$$\overleftarrow{ج}_{و} = ج_{س}\,\overleftarrow{س} + ج_{ص}\,\overleftarrow{ص} + ج_{ع}\,\overleftarrow{ع}$$

حيث : $ج_{س}$ ، $ج_{ص}$ ، $ج_{ع}$ هى «مركبات عزم القوة بالنسبة لنقطة الأصل» وهى نفسها «مركبات عزم القوة حول المحاور س ، ص ، ع على الترتيب.»

أى أن :

$ج_{س} = ص\,ق_{ع} - ع\,ق_{ص}$ «مركبة العزم فى اتجاه محور س»

$ج_{ص} = ع\,ق_{س} - س\,ق_{ع}$ «مركبة العزم فى اتجاه محور ص»

$ج_{ع} = س\,ق_{ص} - ص\,ق_{س}$ «مركبة العزم فى اتجاه محور ع»

ويمكن إيضاح ذلك فيما يلى :

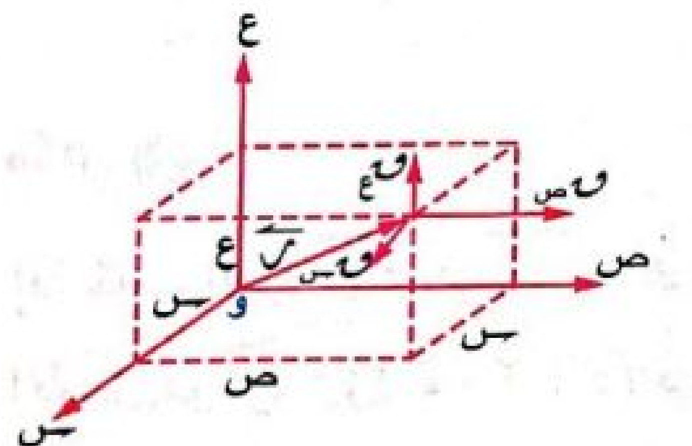
* نلاحظ أن عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ له ٣ مركبات فى اتجاهات $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$ ، $\overleftarrow{و ع}$ ونجد أن مركبة العزم فى اتجاه $\overleftarrow{س}$ تساوى مجموع عزوم المركبات $ق_{س}$ ، $ق_{ص}$ ، $ق_{ع}$ حول المحور س كالتالى :

ملاحظة

ينعدم عزم قوة حول محور فى حالتين :

① إذا اشترك خط عمل القوة مع المحور فى نقطة على الأقل.

② إذا كانت القوة توازى المحور.



* المركبة $ق_{س}$ ليس لها عزم دورانى حول محور س لأنها توازى المحور.
* المركبة $ق_{ص}$ تعمل على الدوران حول محور س فى اتجاه دوران عقارب الساعة فيكون عزمها $- ع \times ق_{ص}$
* المركبة $ق_{ع}$ تعمل على الدوران حول محور س فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة فيكون عزمها $ص \times ق_{ع}$

∴ مجموع عزوم المركبات حول محور س يساوى $(ص\,ق_{ع} - ع\,ق_{ص})$

وبالمثل لباقى مركبات العزم فى اتجاه $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ①

تؤثر القوة : $\overrightarrow{ق} = ٣ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - ٢ \overrightarrow{ع}$ فى النقطة أ = (١ ، -١ ، ٢)

أوجد عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول النقطة ب = (٣ ، -٢ ، ١)

ثم احسب طول العمود الساقط من ب على خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$

الحل

∵ $\overrightarrow{جـ_ب} = \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ق}$

، ∵ $\overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$ = (١ ، -١ ، ٢) - (٣ ، -٢ ، ١) = (-٢ ، ١ ، ١)

∴ $\overrightarrow{جـ_ب}$ = (-٢ ، ١ ، ١) × (٣ ، ١ ، -٢)

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٢ & ١ & ١ \\ ٣ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = -٣ \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} - ٥ \overrightarrow{ع}$$

، طول العمود الساقط من ب على خط عمل القوة ق = $\frac{\| \overrightarrow{جـ_ب} \|}{\| \overrightarrow{ق} \|} = \frac{\sqrt{(-٣)^٢ + (-١)^٢ + (-٥)^٢}}{\sqrt{(٣)^٢ + (١)^٢ + (-٢)^٢}}$

$= \frac{\sqrt{١٠}}{٢}$ وحدة طول.

مثال ②

إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق} = م \overrightarrow{س} + ك \overrightarrow{ص} + ٣ \overrightarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، -٣ ، ٥) فإذا كانت مركبتا عزم $\overrightarrow{ق}$ حول المحورين س ، ص هما -١٩ ، ٩ على الترتيب أوجد قيمة كل من م ، ك ثم أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (و) على خط عمل $\overrightarrow{ق}$ لأقرب جزء من عشره.

الحل

∵ $\overrightarrow{ق}$ = (م ، ك ، ٣) ∴ $ق_س = م$ ، $ق_ص = ك$ ، $ق_ع = ٣$

، ∵ $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، -٣ ، ٥) ∴ س = ٢ ، ص = -٣ ، ع = ٥

، ∵ مركبة عزم القوة حول محور س ($جـ_س$) = ص $ق_ع$ - ع $ق_ص$

$\therefore$ $-١٩ = -٣ \times ٣ - ٥ ك$ $\therefore$ $ك = ٢$

، $\because$ مركبة عزم القوة حول محور ص ($ج_ص$) = ع $ق_س$ − س $ق_ع$

$\therefore$ $٩ = ٥ م - ٢ \times ٣$ $\therefore$ $م = ٣$ $\therefore$ $\overleftarrow{ق} = ٣ \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص} + ٣ \overleftarrow{ع}$

، $\because$ $\overleftarrow{ج}_و = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٢ & -٣ & ٥ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = -١٩ \overleftarrow{س} + ٩ \overleftarrow{ص} + ١٣ \overleftarrow{ع}$

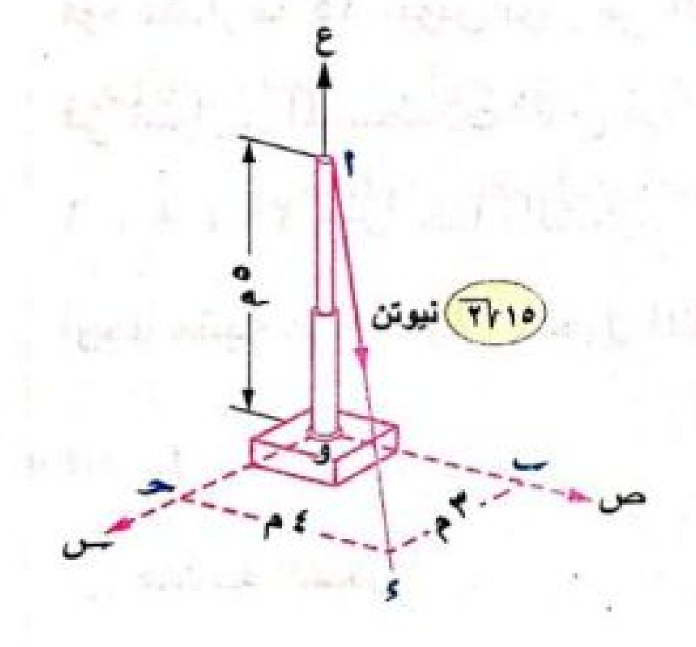
$\therefore$ طول العمود $= \dfrac{\|\overleftarrow{ج}_و\|}{\|\overleftarrow{ق}\|} = \dfrac{\sqrt{(-١٩)^٢ + (٩)^٢ + (١٣)^٢}}{\sqrt{(٣)^٢ + (٢)^٢ + (٣)^٢}} \simeq ٥,٣$ وحدة طول.

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

تؤثر قوة مقدارها $١٥\sqrt{٢}$ نيوتن فى نقطة أ

أوجد مقدار عزم القوة بالنسبة لنقطة الأصل و



الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

$أ = (٠ ، ٠ ، ٥)$ ، $ب = (٠ ، ٤ ، ٠)$

، $حـ = (٣ ، ٠ ، ٠)$ ، $ء = (٣ ، ٤ ، ٠)$

$\therefore$ $\overleftarrow{أء} = \overleftarrow{ء} - \overleftarrow{أ} = (٣ ، ٤ ، -٥)$

، $\because$ $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$

$\therefore$ $\overleftarrow{ق} = ق \times$ متجه وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$

$\therefore$ $\overleftarrow{ق} = ق \times \dfrac{\overleftarrow{أء}}{\|\overleftarrow{أء}\|} = ١٥\sqrt{٢} \times \dfrac{(٣ ، ٤ ، -٥)}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢ + (-٥)^٢}} = ٣ (٣ ، ٤ ، -٥)$

$= (٩ ، ١٢ ، -١٥)$

لاحظ أن

متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أء} = \dfrac{\text{المتجه}}{\text{معياره}} = \dfrac{\overleftarrow{أء}}{\|\overleftarrow{أء}\|}$

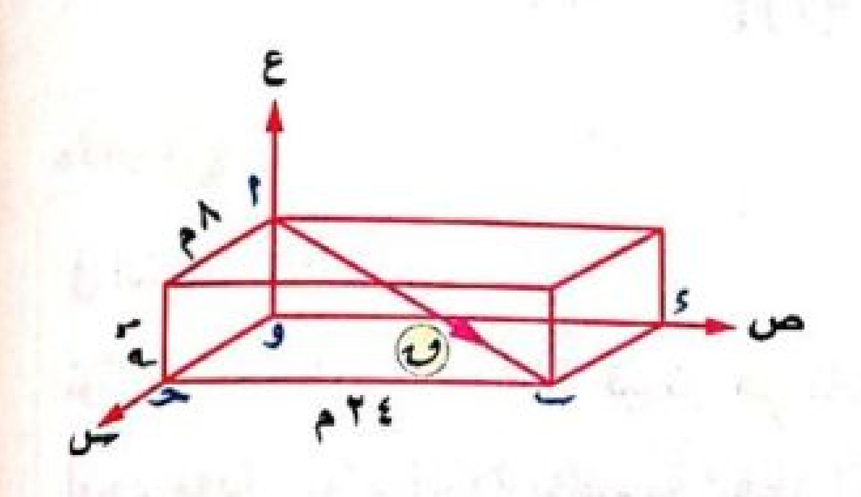
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\therefore \overleftarrow{ج_و} = \overleftarrow{و أ} \times \overleftarrow{ق} = (٠ ، ٠ ، ٥) \times (٩ ، ١٢ ، -١٥)$

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٠ & ٠ & ٥ \\ ٩ & ١٢ & -١٥ \end{vmatrix} = -٦٠ \overleftarrow{س} + ٤٥ \overleftarrow{ص}$$

$\therefore \| \overleftarrow{ج_و} \| = \sqrt{(-٦٠)^٢ + (٤٥)^٢} = ٧٥$ نيوتن.متر.

مثال ٤



في الشكل المقابل :

قوة مقدارها ٦٥ نيوتن تؤثر في القطر $\overleftarrow{أ ب}$ في متوازي المستطيلات الذي أبعاده ٦ ، ٨ ، ٢٤ مترًا كما بالشكل.

أوجد متجه عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول النقطة ء

الحل

من هندسة الشكل :

أ = (٠ ، ٠ ، ٦) ، ب = (٨ ، ٢٤ ، ٠) ، ء = (٠ ، ٢٤ ، ٠)

$\therefore \overleftarrow{أ ب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ} = (٨ ، ٢٤ ، ٠) - (٠ ، ٠ ، ٦) = (٨ ، ٢٤ ، -٦)$

، $\overleftarrow{ء أ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ء} = (٠ ، ٠ ، ٦) - (٠ ، ٢٤ ، ٠) = (٠ ، -٢٤ ، ٦)$

$\therefore \overleftarrow{ق} = ق \times$ متجه وحدة في اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$

$$= ق \times \frac{\overleftarrow{أ ب}}{\| \overleftarrow{أ ب} \|} = ٦٥ \times \frac{(٨ ، ٢٤ ، -٦)}{\sqrt{(٨)^٢ + (٢٤)^٢ + (-٦)^٢}} = (٢٠ ، ٦٠ ، -١٥)$$

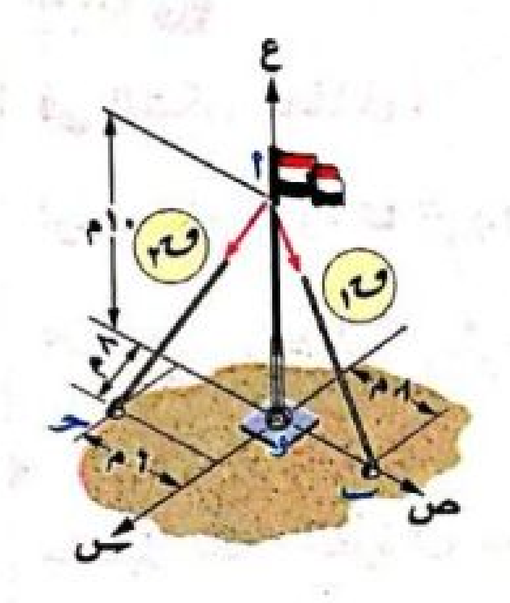
$\therefore \overleftarrow{ج_ء} = \overleftarrow{ء أ} \times \overleftarrow{ق} = (٠ ، -٢٤ ، ٦) \times (٢٠ ، ٦٠ ، -١٥)$

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٠ & -٢٤ & ٦ \\ ٢٠ & ٦٠ & -١٥ \end{vmatrix} = ١٢٠ \overleftarrow{ص} + ٤٨٠ \overleftarrow{ع}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٥

في الشكل المقابل :



تؤثر القوى $ق_١ = \sqrt{٤١}$ نيوتن

، $ق_٢ = ٥\sqrt{٢}$ نيوتن

في اتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ على الترتيب

أوجد مجموع عزوم القوى حول نقطة الأصل (و)

الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

تذكر أن : مجموع عزوم القوى حول أى نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة.

أ = (٠ ، ٠ ، ١٠) ، ب = (٠ ، ٨ ، ٠)

، حـ = (٨ ، -٦ ، ٠)

$\therefore \overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ} = (٠ ، ٨ ، -١٠)$

$، \overleftarrow{أحـ} = \overleftarrow{حـ} - \overleftarrow{أ} = (٨ ، -٦ ، -١٠)$

$$\therefore \overleftarrow{ق_١} = ق_١ \times \frac{\overleftarrow{أب}}{\|\overleftarrow{أب}\|} = \sqrt{٤١} \times \frac{(٠ ، ٨ ، -١٠)}{\sqrt{(٠)^٢ + (٨)^٢ + (-١٠)^٢}} = (٠ ، ٤ ، -٥)$$

$$، \overleftarrow{ق_٢} = ق_٢ \times \frac{\overleftarrow{أحـ}}{\|\overleftarrow{أحـ}\|} = ٥\sqrt{٢} \times \frac{(٨ ، -٦ ، -١٠)}{\sqrt{(٨)^٢ + (-٦)^٢ + (-١٠)^٢}} = (٤ ، -٣ ، -٥)$$

$\therefore \overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} = (٠ ، ٤ ، -٥) + (٤ ، -٣ ، -٥) = (٤ ، ١ ، -١٠)$ وتؤثر في نقطة أ

$\therefore$ مجموع عزوم القوى حول نقطة الأصل (و) = عزم المحصلة حول (و)

$$= \overleftarrow{وأ} \times \overleftarrow{ح} = (٠ ، ٠ ، ١٠) \times (٤ ، ١ ، -١٠)$$

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٤ & ١ & -١٠ \end{vmatrix}$$

$$= -١٠ \overleftarrow{س} + ٤٠ \overleftarrow{ص}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٦

فى الشكل المقابل :

أوجد عزم القوة ق = ٢٠٠ نيوتن حول كل من محور س ، ص ، ع

الحل

بتحليل متجه القوة $\overrightarrow{ق}$ نجد أن :

$ق_{س}$ = ٢٠٠ جتا ١٢٠° = ٢٠٠ × $-\frac{١}{٢}$ = −١٠٠

، $ق_{ص}$ = ٢٠٠ جتا ٦٠° = ٢٠٠ × $\frac{١}{٢}$ = ١٠٠

، $ق_{ع}$ = ٢٠٠ جتا ٤٥° = ٢٠٠ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ١٠٠ $\sqrt{٢}$

∴ $\overrightarrow{ق}$ = (−١٠٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠ $\sqrt{٢}$)

، من هندسة الشكل نجد أن :

أ = (٠ ، ٠,٣ ، ٠,٢٥)

$$∴ \overrightarrow{جـ_{و}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & ٠,٣ & ٠,٢٥ \\ -١٠٠ & ١٠٠ & ١٠٠\sqrt{٢} \end{vmatrix} = (٣٠\sqrt{٢} - ٢٥)\,\overrightarrow{س} - ٢٥\,\overrightarrow{ص} + ٣٠\,\overrightarrow{ع}$$

∴ عزم القوة حول محور س = (٣٠ $\sqrt{٢}$ − ٢٥) نيوتن.متر

، عزم القوة حول محور ص = − ٢٥ نيوتن.متر.

، عزم القوة حول محور ع = ٣٠ نيوتن.متر.

> **لاحظ أن**
>
> إذا كانت : $\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$ هى زوايا ميل المتجه $\overrightarrow{أ}$ على المحاور س ، ص ، ع
>
> فإن المتجه $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_{س}$ ، $أ_{ص}$ ، $أ_{ع}$) حيث :
>
> $أ_{س} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_{س}$
>
> ، $أ_{ص} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_{ص}$
>
> ، $أ_{ع} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_{ع}$

مثال ٧

أ ب جـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى ب

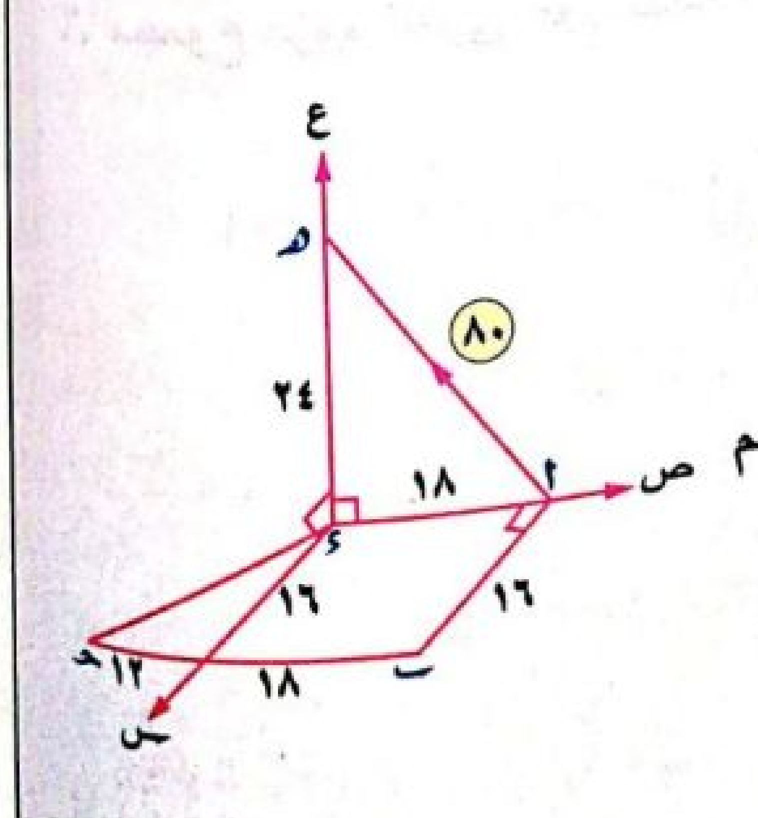
، $\overline{أء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أ ب = ١٦ سم

، ب جـ = ٣٠ سم ، أ ء = ١٨ سم

ثم رسم $\overline{ءهـ}$ ⊥ مستوى شبه المنحرف حيث : ء هـ = ٢٤ سم

أثرت قوة مقدارها ٨٠ نيوتن فى $\overrightarrow{أهـ}$

أوجد مقدار عزم القوة حول النقطة ب



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـل

من هندسة الشكل نجد أن :

$أ = (٠ ، ١٨ ، ٠)$ ، $ب = (١٦ ، ١٨ ، ٠)$ ، $هـ = (٠ ، ٠ ، ٢٤)$

$\because \overrightarrow{أهـ} = \overrightarrow{هـ} - \overrightarrow{أ} = (٠ ، ٠ ، ٢٤) - (٠ ، ١٨ ، ٠) = (٠ ، -١٨ ، ٢٤)$

، $\overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (٠ ، ١٨ ، ٠) - (١٦ ، ١٨ ، ٠) = (-١٦ ، ٠ ، ٠)$

$$\therefore \overrightarrow{ق} = ق \times \frac{\overrightarrow{أهـ}}{\|\overrightarrow{أهـ}\|} = ٨٠ \times \frac{(٠ ، -١٨ ، ٢٤)}{\sqrt{(٠)^٢ + (-١٨)^٢ + (٢٤)^٢}} = (٠ ، -٤٨ ، ٦٤)$$

$\therefore \overrightarrow{جـ_ب} = \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ق} = (-١٦ ، ٠ ، ٠) \times (٠ ، -٤٨ ، ٦٤)$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -١٦ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -٤٨ & ٦٤ \end{vmatrix} = ١٠٢٤ \overrightarrow{ص} + ٧٦٨ \overrightarrow{ع}$$

$\therefore$ مقدار عزم القوة حول ب $= \sqrt{(١٠٢٤)^٢ + (٧٦٨)^٢} = ١٢٨٠$ نيوتن.سم.





على عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثلاثى الأبعاد



من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$ − ٣ $\overleftarrow{\text{ع}}$ تؤثر فى النقطة أ = (٢ ، −٣ ، ٤)

فإن عزم هذه القوة بالنسبة لنقطة الأصل يساوى ....

(أ) −١١ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٢٢ $\overleftarrow{\text{ع}}$ (ب) −٨ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ١٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$ − ١٢ $\overleftarrow{\text{ع}}$

(جـ) ١٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ١٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$ − ٦ $\overleftarrow{\text{ع}}$ (د) −١١ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٢٢ $\overleftarrow{\text{ع}}$

② إذا أثرت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ − $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ع}}$ فى النقطة أ = (١ ، ٠ ، −٣) فإن عزم هذه القوة بالنسبة للنقطة ب الذى متجه موضعها $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ع}}$ يساوى ....

(أ) −٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ١٧ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + $\overleftarrow{\text{ع}}$ (ب) −١١ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ع}}$

(جـ) −١١ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ١٧ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + $\overleftarrow{\text{ع}}$ (د) −١١ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ١٧ $\overleftarrow{\text{ص}}$

③ إذا كان عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ − $\overleftarrow{\text{ص}}$ حول نقطة هو ٢١ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٧ $\overleftarrow{\text{ع}}$ فإن طول العمود الساقط من هذه النقطة على خط عمل القوة بوحدات الطول يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}\sqrt{١٠}$ (جـ) ٧ (د) $١٠\sqrt{٧}$

④ إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ق}}$ = (−١ ، ٣ ، −٢) ، تؤثر فى النقطة (٤ ، −١ ، ٠)

فإن مركبة عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول محور ع يساوى ....

(أ) −٨ (ب) ٣ (جـ) ١١ (د) ١٣

⑤ تؤثر القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ التى مقدارها ٥ نيوتن فى النقطة أ (٠ ، ٦ ، ٠) وتعمل فى اتجاه يوازى محور ع فإن عزم $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة ب (٦ ، ٠ ، ٠) هو ....

(أ) ٣٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$ (ب) ٣٠ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣٠ $\overleftarrow{\text{ص}}$

(جـ) ٣٠ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣٠ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٣٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$ (د) ٣٠ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٣٠ $\overleftarrow{\text{ص}}$

(٦) تؤثر القوة $\overleftarrow{ق}$ التى مقدارها ٩٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ حيث أ (١١ ، ٠ ، ٤) ، ب (٧ ، ٧ ، ٠)
فإن عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة حـ (٠ ، ٦ ، ٥) يساوى ....

(أ) ١٧٠ $\overleftarrow{س}$ − ٤٠٠ $\overleftarrow{ص}$ + ٥٣٠ $\overleftarrow{ع}$ (ب) ٣١٠ $\overleftarrow{س}$ − ٤٨٠ $\overleftarrow{ص}$ + ٥٣٠ $\overleftarrow{ع}$

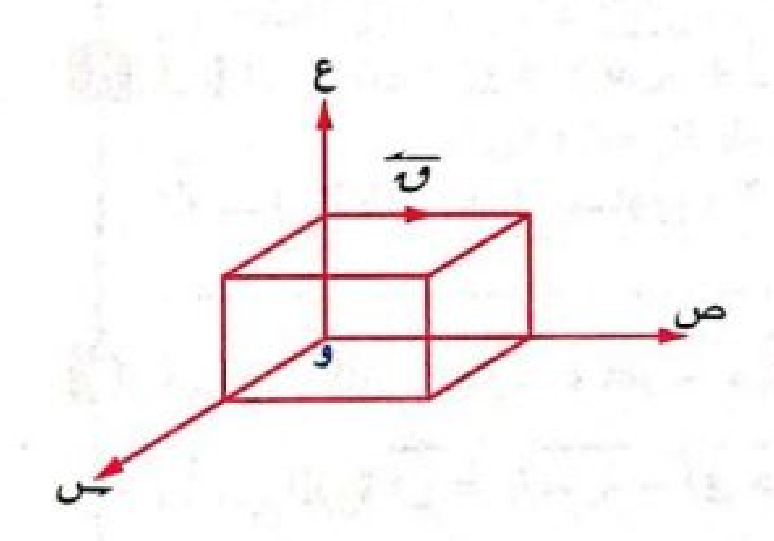
(جـ) ٣١٠ $\overleftarrow{س}$ + ٤٨٠ $\overleftarrow{ص}$ + ٥٣٠ $\overleftarrow{ع}$ (د) ١٧٠ $\overleftarrow{س}$ + ٤٠٠ $\overleftarrow{ص}$ + ١٠١٠ $\overleftarrow{ع}$

(٧) إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ = ($ق_{س}$ ، $ق_{ص}$ ، $ق_{ع}$) تؤثر فى النقطة أ (٢ ، ٣ ، −١)
فإن $\overleftarrow{ق_{س}}$ قادرة على احداث عزم حول ....

(أ) محور س فقط. (ب) محورى س ، ص فقط.

(جـ) محورى ص ، ع فقط. (د) المحاور س ، ص ، ع

(٨) فى الشكل المقابل :



عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ يتلاشى حول ....

(أ) محور س فقط

(ب) محور ص ، ومحور ع

(جـ) محور س ومحور ع

(د) نقطة الأصل (و)

---

٢ إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$ − ١٢ $\overleftarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ = (−١ ، ٢ ، ١) **أوجد :**

(١) عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل.

(٢) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل $\overleftarrow{ق}$

«−٢٠ $\overleftarrow{س}$ − ٩ $\overleftarrow{ص}$ − ٢ $\overleftarrow{ع}$ ، $\frac{\sqrt{٤٨٥}}{١٣}$ وحدة طول»

---

٣ أوجد عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل حيث : $\overleftarrow{ق}$ = −٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ + ٥ $\overleftarrow{ع}$ وتؤثر فى نقطة أ متجه موضعها حول نقطة الأصل هو $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$ ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$

«٢ $\overleftarrow{س}$ − ٧ $\overleftarrow{ص}$ + ٥ $\overleftarrow{ع}$ ، $\frac{\sqrt{٧٤١}}{١٩}$ وحدة طول»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤ إذا كانت : $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة.
وكانت القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ = (١ ، −١ ، ٤) **أوجد :**

(١) عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة الأصل و (٠ ، ٠ ، ٠) «−١١ $\overrightarrow{س}$ + ٩ $\overrightarrow{ص}$ + ٥ $\overrightarrow{ع}$ ،

(٢) عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة ب = (٢ ، −٣ ، ١) «−١١ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$ − ٧ $\overrightarrow{ع}$ ، ٣,٧٣ وحدة طول»

ثم استنتج طول العمود المرسوم من ب على خط عمل القوة.

٥ قوة : $\overrightarrow{ق}$ = ١٥ $\overrightarrow{س}$ − ٢٥ $\overrightarrow{ص}$ + ٤٠ $\overrightarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ (−٣ ، −٣ ، ٢)
أوجد مركبة عزم $\overrightarrow{ق}$ حول محور ص

«١٥٠»

٦ إذا كانت : $\overrightarrow{ق}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ل $\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$ تؤثر فى النقطة أ (٤ ، −٢ ، ٠) وكان عزم $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة الأصل يساوى : ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ + ١٦ $\overrightarrow{ع}$ فما قيمة ل ؟

«٣»

٧ إذا كانت : $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة
وكانت القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ك $\overrightarrow{ص}$ + ٤ $\overrightarrow{ع}$ تؤثر فى النقطة أ (١ ، ٠ ، −١) وكان عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب (٢ ، −١ ، ٣) يساوى −٤ $\overrightarrow{س}$ − ٨ $\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$
فما قيمة ك ؟

«−٢»

٨ إذا كانت : $\overrightarrow{ق}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ك $\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$ تؤثر فى النقطة أ (١ ، −٢ ، ٣) وكان عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب (−٢ ، ٢ ، ٤) يساوى −٥ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$ − ٧ $\overrightarrow{ع}$
فما قيمة ك ؟

«−٩»

٩ إذا كان عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$ حول نقطة الأصل (و) هو
$\overrightarrow{ج}_{و}$ = −٥ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$ ، وكانت القوة تمر بنقطة الإحداثى ص لها يساوى ٢
أوجد الإحداثيين س ، ع للنقطة وكذلك أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة.

«$\frac{\sqrt{١٠}}{٢}$ وحدة طول»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

10 قوة $\overline{ق}$ تؤثر فى النقطة أ (٢ ، -١ ، ٣) فإذا كان عزم $\overline{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل يساوى ٢١ $\overline{ص}$ + ٧ $\overline{ع}$ أوجد $\overline{ق}$ حيث $\overline{ق}$ توازى محور السينات. «٧ $\overline{س}$»

---

11 إذا كانت القوة $\overline{ق}$ = ٢ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$ + $\overline{ع}$ تؤثر فى النقطة أ (-١ ، ٣ ، -٢) وكانت مركبة عزم $\overline{ق}$ حول محور س تساوى -٣ وحدات عزم. أوجد قيمة ب ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة. «-٣ ، $\frac{٣\sqrt{٤٢}}{١٤}$ وحدة طول»

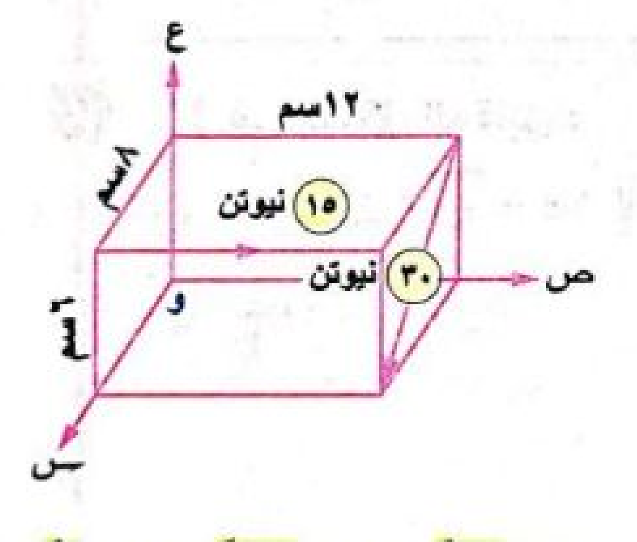
---

12 إذا كانت القوة $\overline{ق}$ = ك $\overline{س}$ + م $\overline{ص}$ - ٢ $\overline{ع}$ تؤثر فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو $\overline{ر}$ = (٣ ، ١ ، ١) وكانت مركبتا عزم $\overline{ق}$ حول المحورين س ، ص هما -١ ، -٨ على الترتيب أوجد قيمة كل من : ك ، م «-١٤ ، -١»

---

13 فى الشكل المقابل :

أوجد مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة (و)

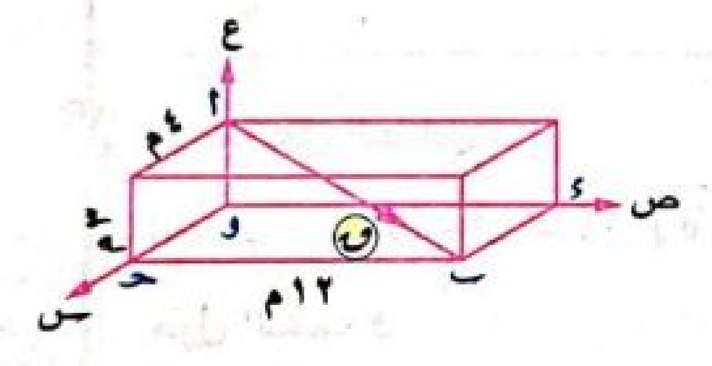


«-٣٠٦ $\overline{س}$ + ١٤٤ $\overline{ص}$ - ١٦٨ $\overline{ع}$»

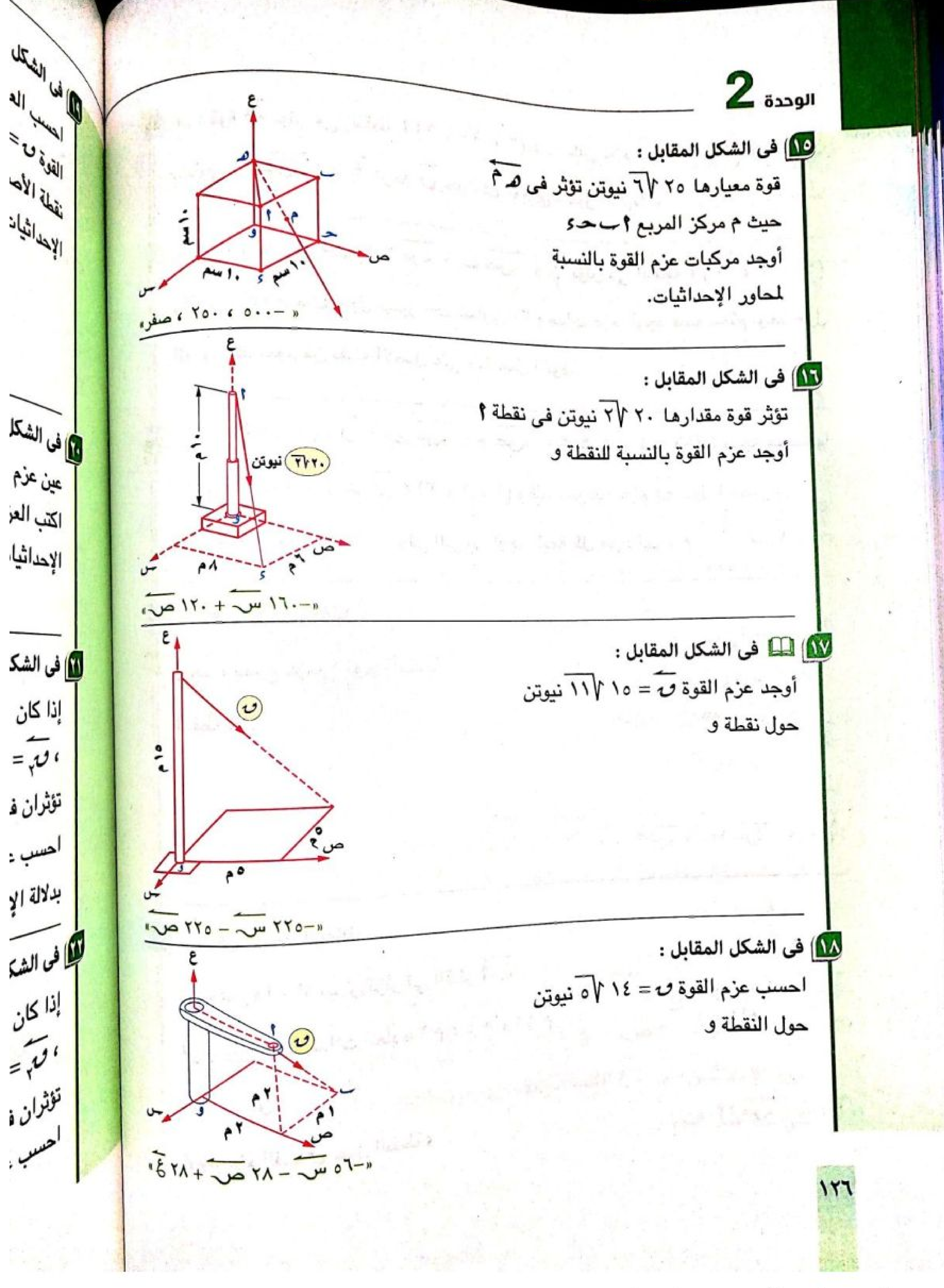
---

14 فى الشكل المقابل :

قوة مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر فى القطر $\overline{أب}$ فى متوازى مستطيلات أبعاده ٣ م ، ٤ م ، ١٢ م كما بالشكل



أوجد عزم القوة $\overline{ق}$ حول النقطة د «١٢٠ $\overline{ص}$ + ٤٨٠ $\overline{ع}$»



١٥ في الشكل المقابل :

قوة معيارها ٢٥ $\sqrt{6}$ نيوتن تؤثر في $\overrightarrow{هـ م}$

حيث م مركز المربع أ ب حـ ء

أوجد مركبات عزم القوة بالنسبة لمحاور الإحداثيات.

«−٥٠٠ ، ٢٥٠ ، صفر»

١٦ في الشكل المقابل :

تؤثر قوة مقدارها ٢٠ $\sqrt{2}$ نيوتن في نقطة أ

أوجد عزم القوة بالنسبة للنقطة و

«−١٦٠ $\overrightarrow{س}$ + ١٢٠ $\overrightarrow{ص}$»

١٧ في الشكل المقابل :

أوجد عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ = ١٥ $\sqrt{11}$ نيوتن حول نقطة و

«−٢٢٥ $\overrightarrow{س}$ − ٢٢٥ $\overrightarrow{ص}$»

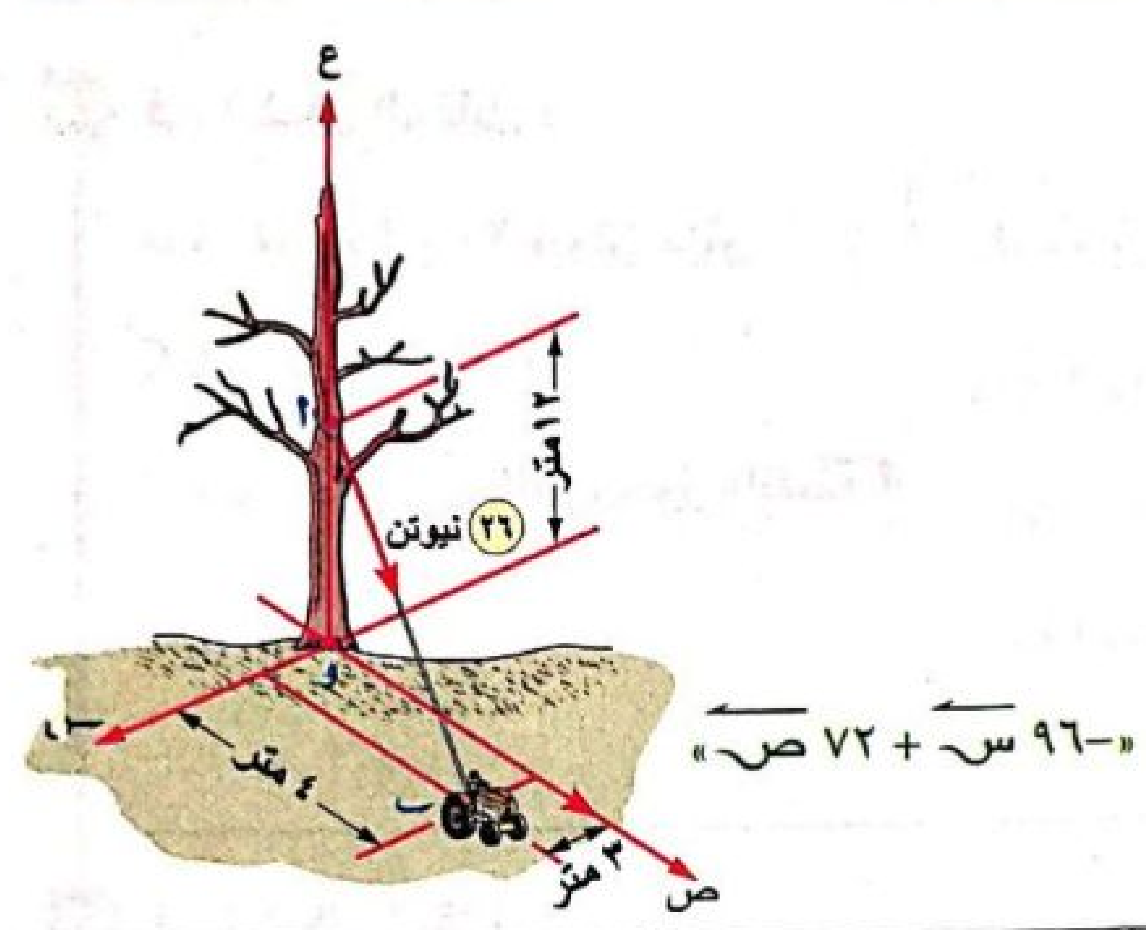
١٨ في الشكل المقابل :

احسب عزم القوة ق = ١٤ $\sqrt{5}$ نيوتن حول النقطة و

«−٥٦ $\overrightarrow{س}$ − ٢٨ $\overrightarrow{ص}$ + ٢٨ $\overrightarrow{ع}$»

١٩ **فى الشكل المقابل :**

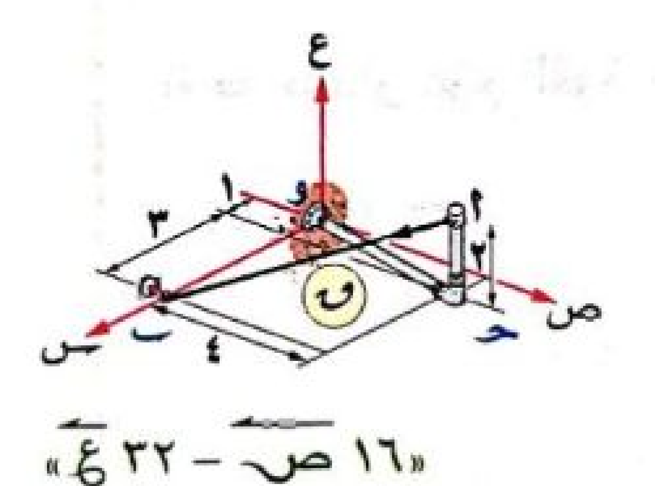
احسب العزم المتولد من القوة ق = ٢٦ نيوتن حول نقطة الأصل (و) بدلالة الإحداثيات المتجهة.



«−٩٦ س + ٧٢ ص»

٢٠ **فى الشكل المقابل :**

عين عزم القوة ق = ٢ $\sqrt{29}$ نيوتن حول نقطة و اكتب العزم بدلالة الإحداثيات المتجهة.



«١٦ ص − ٣٢ ع»

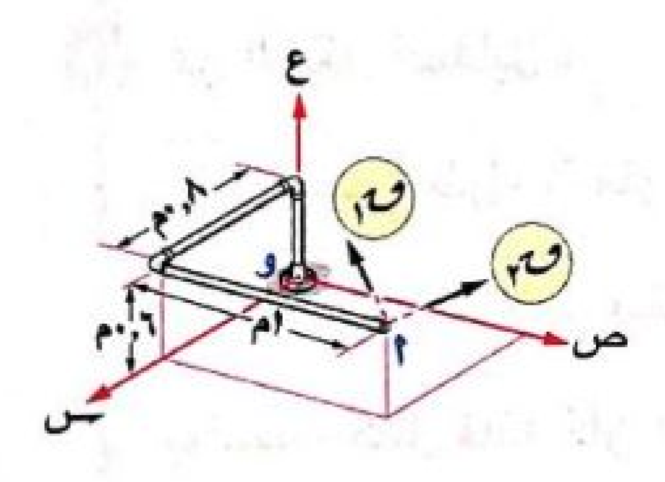
٢١ **فى الشكل المقابل :**

إذا كان : $ق_1$ = ١٠٠ س − ١٢٠ ص + ٧٥ ع

، $ق_2$ = −٢٠٠ س + ٢٥٠ ص + ١٠٠ ع

تؤثران فى النقطة ٢

احسب عزم محصلة القوتين حول نقطة (و) بدلالة الإحداثيات المتجهة.



«٩٧ س − ٢٠٠ ص + ٢٠٤ ع»

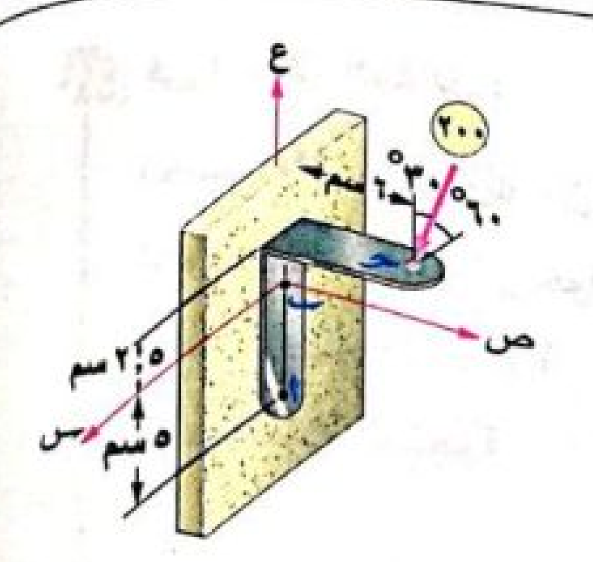
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٣ **فى الشكل المقابل :**

قوة مقدارها ٢٠٠ نيوتن تؤثر

كما بالشكل المقابل

احسب عزم هذه القوة حول النقطة ؟

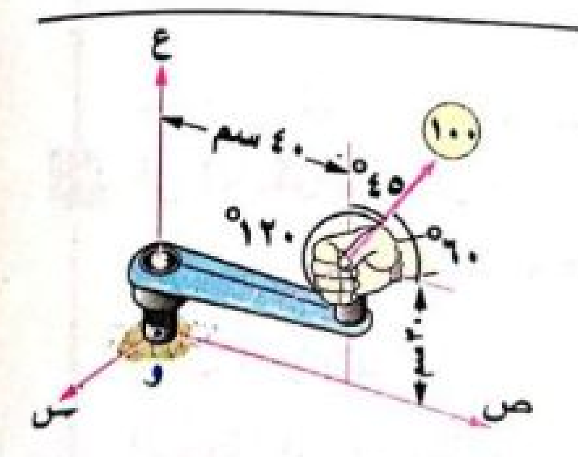


«$-٦٠٠\sqrt{٣}$ س + ٧٥٠ ص − ٦٠٠ ع»

٢٤ **فى الشكل المقابل :**

أوجد مقدار عزم القوة ١٠٠ نيوتن

حول محور س.



«١٣٢٨,٤٣ نيوتن. سم تقريبًا»

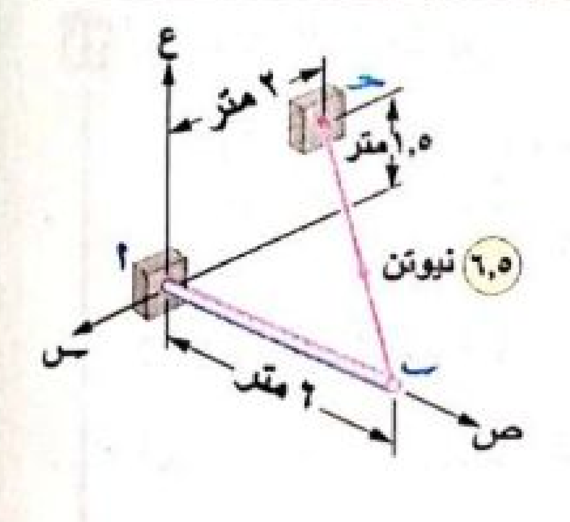
٢٥ **فى الشكل المقابل :**

أب قضيب طوله ٦ متر مثبت من طرفه أ

ومتصل بطرفه الآخر بنقطة حـ على الحائط الرأسى

بواسطة كابل فإذا كان الشد فى الكابل يساوى ٦,٥ نيوتن

احسب عزم قوة الشد حول النقطة أ



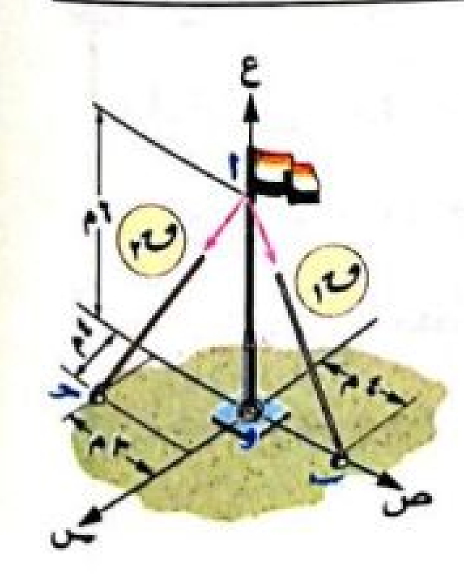
«٩ س + ١٢ ع»

٢٦ تؤثر القوة $ق_١ = ٦\sqrt{١٣}$ نيوتن ، $ق_٢ = \sqrt{٦١}$ نيوتن

فى اتجاهات أب ، أحـ كما بالشكل.

أوجد : (١) مجموع عزوم القوى حول نقطة و

(٢) عزم محصلة القوتين حول نقطة و ماذا تستنتج ؟



«−٥٤ س + ٢٤ ص»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

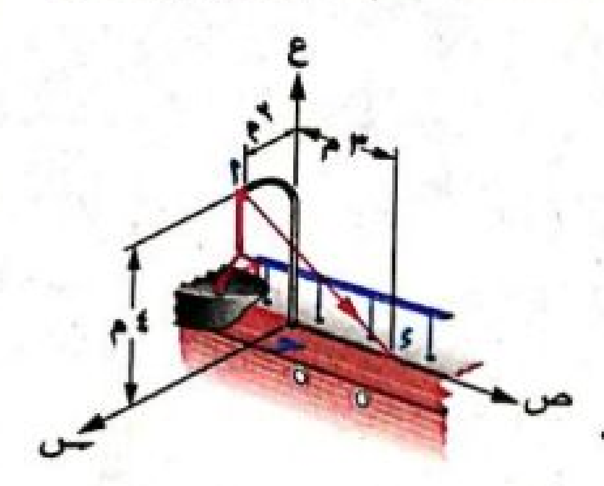
٢٧ 📖 **فى الشكل المقابل :**

حبل مثبت فى النقطة ء يمر على بكرة ملساء عند أ

ويتدلى من الطرف الآخر للحبل زورق صغير.

فإذا كان مقدار الشد فى الحبل ءأ يساوى ١٠ $\sqrt{29}$ نيوتن.

أوجد عزم الشد فى الحبل حول النقطة حـ



«−١٢٠ س + ٦٠ ع»



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الدرس 1

محصلة القوى المتوازية المستوية

القوى المتوازية المستوية هى القوى التى تتوازى خطوط عملها وتقع جميعًا فى مستوى واحد.

وسوف نتعرف فى هذا الدرس على كيفية تعيين محصلة القوى المتوازية المستوية التى تؤثر فى جسم متماسك تعيينًا تامًا (مقدارًا واتجاهًا ونقطة تأثير).

أولًا محصلة قوتين متوازيتين مستويتين

الحالة الأولى القوتان متحدتا الاتجاه :

بفرض أن $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان متوازيتان ويعملان فى نفس الاتجاه ويؤثران فى جسم متماسك فى نقطتين أ ، ب ومحصلتها $(\overleftarrow{ح})$

ولتحديد المحصلة تحديدًا تامًا نقوم بالخطوات التالية :

* نفرض قوتين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ق}$ تؤثران فى أ ، ب «متساويتان فى المقدار ومتضادين فى الاتجاه» أى ليس لهما تأثير

* $\overleftarrow{ح_١}$ هى محصلة $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق}$ عند أ   * $\overleftarrow{ح_٢}$ هى محصلة $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق}$ عند ب

* نفرض أن خطى عمل $\overleftarrow{ح_١}$ ، $\overleftarrow{ح_٢}$ يتقاطعان فى النقطة (و)

* استبدل $\overleftarrow{ح_١}$ عند النقطة (و) بمركبتيها $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* استبدل $\overleftarrow{ح_٢}$ عند النقطة (و) بمركبتيها $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق}$

* نلاحظ أن القوى المؤثرة عند (و) هى :

- $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تعملان فى اتجاه $\overleftarrow{وحـ}$ الموازى لخط عمل القوتين الأصليتين.
- $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ق}$ وتعملان فى اتجاهين متضادين أى ليس لهما تأثير

∴ تأثير $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ عند النقطة (و) هو نفس تأثير $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ عند أ ، ب

وبالتالى $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢}$ ويؤثر فى اتجاه $\overleftarrow{وحـ}$

وحيث أن القوى $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ح}$ متوازية فإن : $\frac{ق}{ق_١} = \frac{أحـ}{وحـ}$ (١) ، $\frac{ق}{ق_٢} = \frac{بحـ}{وحـ}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{ق_١}{ق_٢} = \frac{بحـ}{أحـ}$ ∴ $ق_١ \times أحـ = ق_٢ \times بحـ$

قاعدة

محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الاتجاه هى قوة لها نفس اتجاه القوتين ومعيارها يساوى مجموع معيارى القوتين ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين بنسبة عكسية لمعياريهما.

إذا كانت القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فى نفس الاتجاه وتؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب من جسم متماسك فإن : $\overleftarrow{ح}$ (محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$) $= \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢}$

فإذا كان : $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

فإن : $\overleftarrow{ح} = ق_١ \overleftarrow{ى} + ق_٢ \overleftarrow{ى} = (ق_١ + ق_٢) \overleftarrow{ى}$

ب حـ أ
$\overleftarrow{ى}$
$\overleftarrow{ق_٢}$ $\overleftarrow{ح}$ $\overleftarrow{ق_١}$

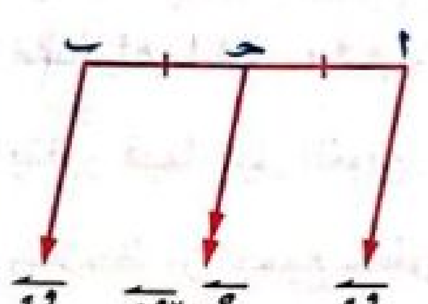
وتتعين المحصلة تعيينًا تامًا كما يلى :

- مقدار المحصلة : $ح = ق_١ + ق_٢$
- اتجاه المحصلة : فى نفس اتجاه القوتين
- نقطة تأثير المحصلة : حـ تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بحيث $ق_١ \times أحـ = ق_٢ \times بحـ$
- ومن قوانين التناسب يمكن استنتاج أن : $\frac{ق_١}{بحـ} = \frac{ق_٢}{أحـ} = \frac{ح}{أب}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظة

إذا كانت القوتان $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ متحدتين فى الاتجاه ومتساويتين فى المقدار ومقدار كل منهما يساوى ق تؤثران فى نقطتين مختلفتين أ ، ب من جسم متماسك



فإن : • مقدار المحصلة : ح = ٢ ق

• اتجاه المحصلة : فى نفس اتجاه القوتين

• نقطة تأثير المحصلة : حـ منتصف $\overline{أب}$

الحالة الثانية القوتان متضادتان فى الاتجاه :

قاعدة

محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه وغير متساويتين فى المعيار هى قوة فى اتجاه القوة الأكبر معيارًا ويساوى معيارها الفرق بين معياريهما ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الأكبر معيارًا بنسبة عكسية لمعياريهما.

إذا كانت القوتان $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ متضادتين فى الاتجاه وتؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب من جسم متماسك وكان $ق_1 > ق_2$

فإن : $\overrightarrow{ح}$ (محصلة القوتين $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$) $= \overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ق}_2$

فإذا كان : $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة الأكبر معيارًا وهى $\overrightarrow{ق}_1$

فإن : $\overrightarrow{ح} = ق_1 \overrightarrow{ى} + ق_2 (-\overrightarrow{ى}) = ق_1 \overrightarrow{ى} - ق_2 \overrightarrow{ى} = (ق_1 - ق_2) \overrightarrow{ى}$

وتتعين المحصلة تعيينًا تامًا كما يلى :

• مقدار المحصلة : $ح = |ق_1 - ق_2|$

• اتجاه المحصلة : فى اتجاه القوة الأكبر مقدارًا

• نقطة تأثير المحصلة : حـ تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بحيث $ق_1 \times أحـ = ق_2 \times بحـ$

• ومن قوانين التناسب نجد أن : $\frac{ق_1}{بحـ} = \frac{ق_2}{أحـ} = \frac{ح}{أب}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظة

إذا كانت أ ، ب هما نقطتى تأثير القوتين المتوازيتين اللتين مقداراهما ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ ومحصلتهما (ح) وفى كل حالة يتغير فيها ميل القوتين يتغير ميل المحصلة تبعًا لذلك ونلاحظ أن جميع خطوط عمل المحصلة الناتجة من كل حالة تتقاطع جميعًا فى نقطة واحدة تقع على $\overleftrightarrow{أب}$ وتسمى نقطة تأثير المحصلة.

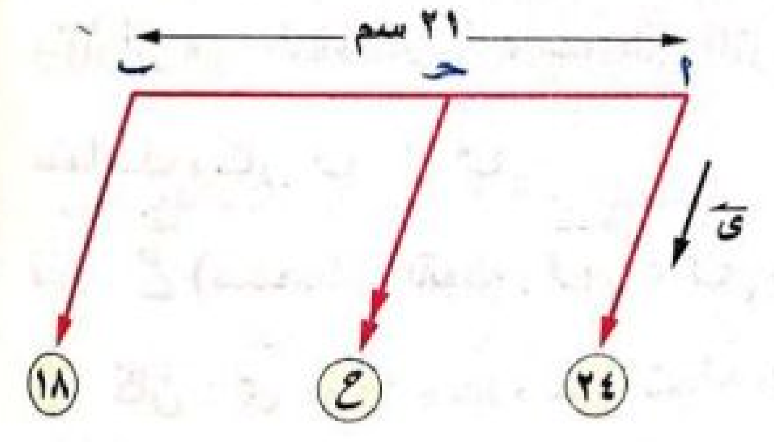
مثال ١

قوتان متوازيتان مقداراهما ٢٤ ، ١٨ نيوتن تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب من جسم متماسك حيث : أب = ٢١ سم. أوجد مقدار واتجاه محصلتهما وبُعد نقطة تأثيرها عن النقطة أ إذا كانت :

(١) القوتان فى اتجاه واحد. (٢) القوتان فى اتجاهين متضادين.

الحــل

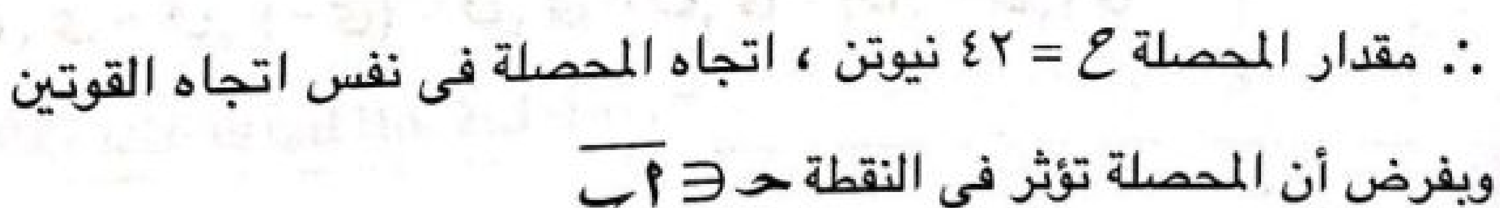
(١) **القوتان فى اتجاه واحد :**

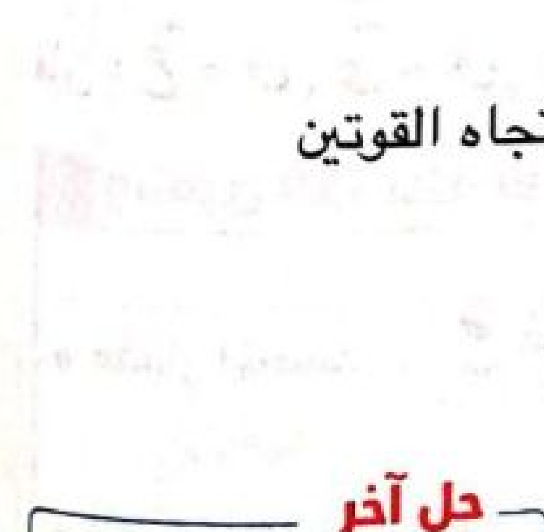


بفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

∴ $\overleftarrow{ق_{١}}$ = ٢٤ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ = ١٨ $\overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ح}$ = $\overleftarrow{ق_{١}}$ + $\overleftarrow{ق_{٢}}$ = ٢٤ $\overleftarrow{ى}$ + ١٨ $\overleftarrow{ى}$ = ٤٢ $\overleftarrow{ى}$





∴ مقدار المحصلة ح = ٤٢ نيوتن ، اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوتين

وبفرض أن المحصلة تؤثر فى النقطة جـ ∈ $\overline{أب}$

∴ ق$_{١}$ × أجـ = ق$_{٢}$ × بجـ

∴ ٢٤ × أجـ = ١٨ × (٢١ − أجـ) ، وبالقسمة على ٦

∴ ٤ × أجـ = ٣ (٢١ − أجـ) ∴ ٤ أجـ = ٦٣ − ٣ أجـ

∴ ٧ أجـ = ٦٣ ∴ أجـ = ٩ سم

∴ بُعد نقطة تأثير المحصلة عن النقطة أ = ٩ سم

حل آخر

$\frac{٢٤}{بجـ} = \frac{١٨}{أجـ} = \frac{٤٢}{٢١}$

∴ أجـ = ٩ سم.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② القوتان فى اتجاهين متضادين :

لاحظ أن

المحصلة تكون أقرب إلى القوة الأكبر مقدارًا

بفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوة الأكبر مقدارًا أى القوة التى مقدارها ٢٤ نيوتن

$\therefore \overleftarrow{ق_{١}} = ٢٤ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}} = -١٨ \overleftarrow{ى}$

$\therefore \overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_{١}} + \overleftarrow{ق_{٢}} = ٢٤ \overleftarrow{ى} + (-١٨ \overleftarrow{ى}) = ٦ \overleftarrow{ى}$

$\therefore$ مقدار المحصلة : ح = ٦ نيوتن

، اتجاه المحصلة فى اتجاه القوة التى مقدارها ٢٤ نيوتن

وبفرض أن المحصلة تؤثر فى النقطة ء $\in \overleftrightarrow{ب أ}$ بحيث ء $\notin \overline{أ ب}$

$\therefore ق_{١} \times أ ء = ق_{٢} \times ب ء$

$\therefore ٢٤ \times أ ء = ١٨ \times (٢١ + أ ء)$ ، بالقسمة على ٦

$\therefore ٤ \times أ ء = ٣ \times (٢١ + أ ء) \quad \therefore ٤ أ ء = ٦٣ + ٣ أ ء$

$\therefore$ أ ء = ٦٣ سم

$\therefore$ بُعد نقطة تأثير المحصلة عن النقطة أ = ٦٣ سم

حل آخر

$\frac{٦}{٢١} = \frac{١٨}{أ ء} = \frac{٢٤}{ب ء}$

$\therefore$ أ ء = ٦٣ سم.

ملاحظة

يمكن تحديد مقدار واتجاه محصلة قوتين متوازيتين دون الإشارة إلى متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ وذلك بتطبيق قاعدتى إيجاد المحصلة السابق ذكرهما ، ففى المثال السابق :

① إذا كانت القوتان فى اتجاه واحد فإن : $ح = ق_{١} + ق_{٢} = ٢٤ + ١٨ = ٤٢$ نيوتن

واتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوتين.

② إذا كانت القوتان فى اتجاهين متضادين فإن : $ح = ق_{١} - ق_{٢}$ حيث $ق_{١} > ق_{٢}$

$\therefore ح = ٢٤ - ١٨ = ٦$ نيوتن

واتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوة ذات المقدار الأكبر وهو ٢٤ نيوتن.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

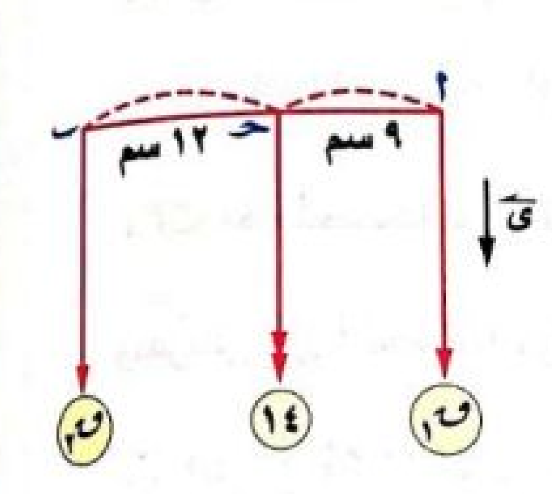
مثال ٢

قوتان $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ق}_٢$ متوازيتان وخط عمل محصلتهما يبعد عن خط عمل الأولى بمقدار ٩ سم وعن خط عمل الثانية بمقدار ١٢ سم فإذا كان مقدار المحصلة ١٤ نيوتن فأوجد $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ق}_٢$ إذا كانتا :

① فى اتجاه واحد. ② فى اتجاهين متضادين.

الحل

① $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ق}_٢$ فى اتجاه واحد :



∴ المحصلة فى اتجاههما وخط عملها يقع بين خطى عملهما

وبفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

∴ $\overrightarrow{ق}_١ = ق_١ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = ق_٢ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ح} = ١٤ \overrightarrow{ى}$

∴ $١٤ \overrightarrow{ى} = (ق_١ + ق_٢) \overrightarrow{ى}$ ∴ $ق_١ + ق_٢ = ١٤$ (١)

، $ق_١ \times ٩ = ق_٢ \times ١٢$ ∴ $ق_٢ = \frac{٣}{٤} ق_١$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ $ق_١ + \frac{٣}{٤} ق_١ = ١٤$ ∴ $\frac{٧}{٤} ق_١ = ١٤$

∴ $ق_١ = ٨$ نيوتن ، $ق_٢ = ٦$ نيوتن

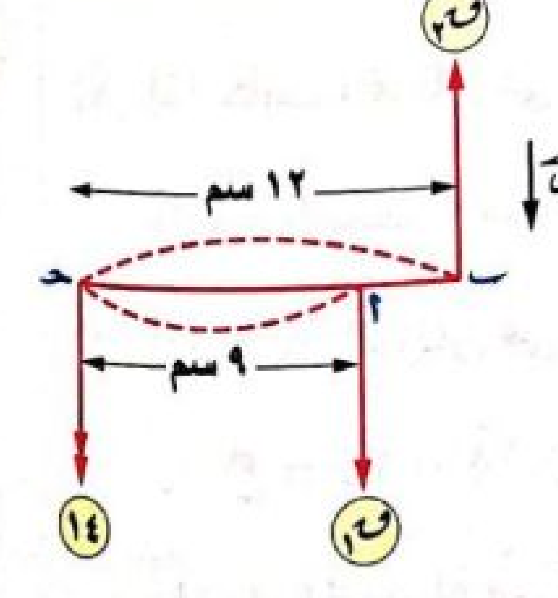
∴ $\overrightarrow{ق}_١ = ٨ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = ٦ \overrightarrow{ى}$

حل آخر

∵ $\frac{ق_١}{١٢} = \frac{ق_٢}{٩} = \frac{١٤}{٢١}$

∴ $ق_١ = ٨$ ، $ق_٢ = ٦$

② $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ق}_٢$ فى اتجاهين متضادين :



∵ خط عمل المحصلة أقرب للقوة الأولى منه للقوة الثانية

∴ $ق_١ > ق_٢$ ، $\overrightarrow{ق}_١$ فى اتجاه $\overrightarrow{ح}$

وبفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{ح}$

∴ $\overrightarrow{ح} = ١٤ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق}_١ = ق_١ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = - ق_٢ \overrightarrow{ى}$

∴ $١٤ \overrightarrow{ى} = ق_١ \overrightarrow{ى} - ق_٢ \overrightarrow{ى} = (ق_١ - ق_٢) \overrightarrow{ى}$

∴ $ق_١ - ق_٢ = ١٤$ (١)

، $ق_١ \times ٩ = ق_٢ \times ١٢$ $\therefore ق_٢ = \frac{٣}{٤} ق_١$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) :

$\therefore ق_١ - \frac{٣}{٤} ق_١ = ١٤$ $\therefore ق_١ = ٥٦$ نيوتن

، $ق_٢ = ٤٢$ نيوتن

$\therefore \overleftarrow{ق_١} = ٥٦ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = -٤٢ \overleftarrow{ى}$

حل آخر

$\because \frac{ق_١}{١٢} = \frac{ق_٢}{٩} = \frac{١٤}{٣}$

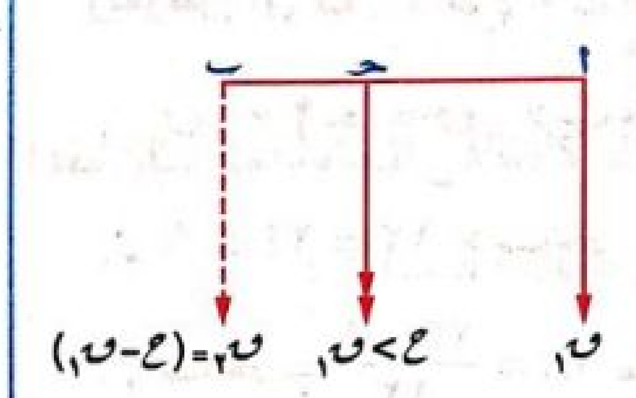
$\therefore ق_١ = ٥٦$ ، $ق_٢ = ٤٢$

ملاحظة هامة

إذا عُلمت إحدى قوتين متوازيتين $\overleftarrow{ق_١}$ وعُلمت محصلتهما $\overleftarrow{ح}$ فلتعيين القوة الثانية $\overleftarrow{ق_٢}$ نراعى مايلى :

أولاً : إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ح}$ فى اتجاهين متضادين فإن :

* $ق_٢ = ح + ق_١$
* خط عمل $\overleftarrow{ق_٢}$ يقع بين خطى عمل $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ح}$
* $\overleftarrow{ق_٢}$ فى نفس اتجاه $\overleftarrow{ح}$



ثانيًا : إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ح}$ فى اتجاه واحد ، $ح > ق_١$ فإن :

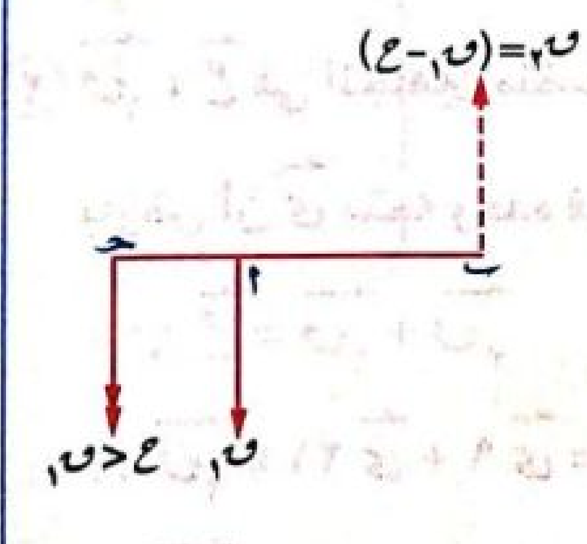
* $ق_٢ = ح - ق_١$
* خط عمل $\overleftarrow{ق_٢}$ يقع خارج خطى عمل $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ح}$ من ناحية $\overleftarrow{ح}$
* $\overleftarrow{ق_٢}$ فى نفس اتجاه $\overleftarrow{ح}$

أ   جـ   ب

ق١   ح>ق١   ق٢=(ح-ق١)

ثالثًا : إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ح}$ فى اتجاه واحد ، $ح < ق_١$ فإن :

* $ق_٢ = ق_١ - ح$
* خط عمل $\overleftarrow{ق_٢}$ يقع خارج خطى عمل $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ح}$ من ناحية $\overleftarrow{ق_١}$
* $\overleftarrow{ق_٢}$ فى اتجاه مضاد لاتجاه $\overleftarrow{ق_١}$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٣

قوتان متوازيتان $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ومقداراهما ٩ ، ق نيوتن على الترتيب ومقدار محصلتهما ٢١ نيوتن ، فإذا كان البُعد بين خطى عمل $\overrightarrow{ق_١}$ والمحصلة $\overrightarrow{ح}$ يساوى ٢٤ سم

فعيِّن مقدار واتجاه خط عمل $\overrightarrow{ق_٢}$ فى الحالتين :

(١) $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاه واحد. (٢) $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاهين متضادين.

الحل

(١) $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاه واحد :

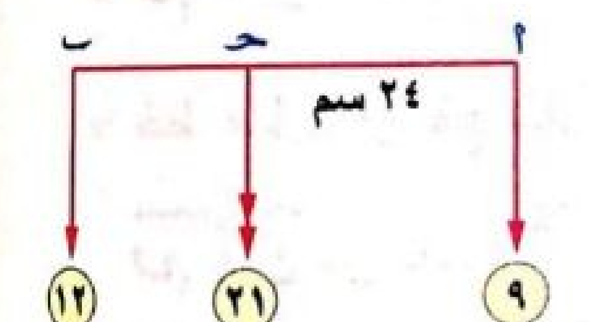
بفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة $\overrightarrow{ح}$ ∴ $\overrightarrow{ح} = ٢١ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_١} = ٩ \overrightarrow{ى}$

، ∵ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢}$ ∴ $٢١ \overrightarrow{ى} = ٩ \overrightarrow{ى} + \overrightarrow{ق_٢}$

∴ $\overrightarrow{ق_٢} = ٢١ \overrightarrow{ى} - ٩ \overrightarrow{ى} = ١٢ \overrightarrow{ى}$ ∴ $ق_٢ = ١٢$ نيوتن

∴ $\overrightarrow{ق_٢}$ مقدارها ١٢ نيوتن واتجاهها فى نفس اتجاه $\overrightarrow{ق_١}$

وبفرض أن $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ح}$ تؤثر فى النقط أ ، ب ، حـ بحيث حـ ∈ $\overline{أب}$



∴ $ق_١ \times أحـ = ق_٢ \times بحـ$

∴ $٩ \times ٢٤ = ١٢ \times بحـ$

∴ $بحـ = \frac{٩ \times ٢٤}{١٢} = ١٨$ سم

∴ خط عمل $\overrightarrow{ق_٢}$ يبعد ١٨ سم عن خط عمل $\overrightarrow{ح}$

(٢) $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاهين متضادين :

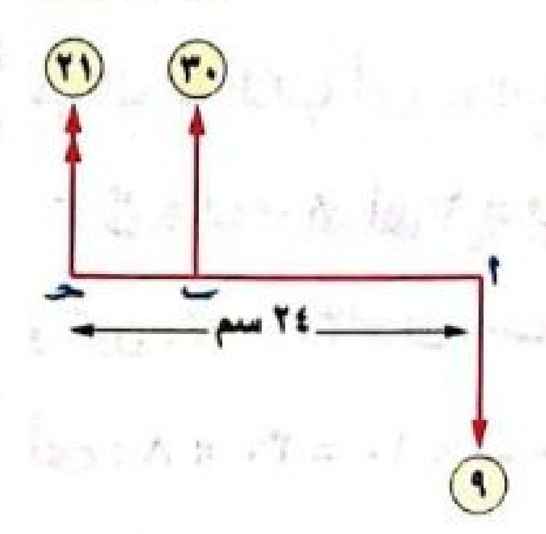
بفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة $\overrightarrow{ح}$ ∴ $ح = ٢١ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق_١} = -٩ \overrightarrow{ى}$

، ∵ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢}$ ∴ $٢١ \overrightarrow{ى} = -٩ \overrightarrow{ى} + \overrightarrow{ق_٢}$

∴ $\overrightarrow{ق_٢} = ٢١ \overrightarrow{ى} + ٩ \overrightarrow{ى} = ٣٠ \overrightarrow{ى}$ ∴ $ق_٢ = ٣٠$ نيوتن

∴ $\overrightarrow{ق_٢}$ مقدارها ٣٠ نيوتن وفى عكس اتجاه $\overrightarrow{ق_١}$ أى فى اتجاه المحصلة $\overrightarrow{ح}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



وبفرض أن $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ح}$ تؤثر فى النقط أ ، ب ، حـ

على الترتيب حيث حـ $\in \overleftrightarrow{أب}$ ، حـ $\notin \overline{أب}$

$\therefore$ ق١ × أحـ = ق٢ × بحـ

$\therefore$ ٩ × ٢٤ = ٣٠ × بحـ

$\therefore$ بحـ = $\frac{٩ \times ٢٤}{٣٠}$ = ٧,٢ سم

$\therefore$ خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ يبعد ٧,٢ سم عن خط عمل المحصلة $\overleftarrow{ح}$

مثال ٤

قوتان مقداراهما ٨ ، ق نيوتن متوازيتان ومحصلتهما مقدارها ٢ نيوتن وخط عملها يبعد عن خط عمل القوة الأولى مسافة ٣٠ سم ، بيِّن أن ق لها قيمتان وأوجد البُعد بين خطى عمل القوتين فى الحالتين.

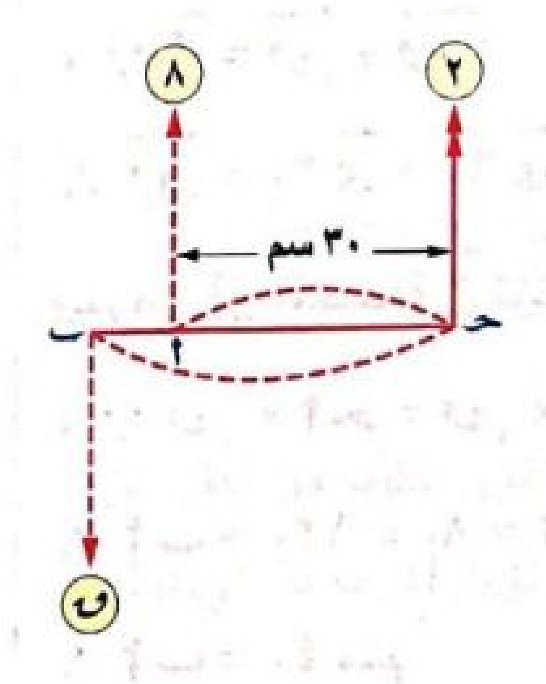
الحـــل

$\because$ ح = ٢ نيوتن أصغر من معيار القوة الأولى وهو ٨ نيوتن

$\therefore$ القوتان اللتان مقداراهما ٨ ، ق متضادتان فى الاتجاه (إذ لو كانتا فى اتجاه واحد لكان مقدار المحصلة يساوى ٨ + ق أى أكبر من ٨) وعلى ذلك يكون هناك احتمالان :

إما ق < ٨ أ، ق > ٨

فى الحالة الأولى أى ق < ٨



$\therefore$ ح = ٨ − ق أى ٢ = ٨ − ق $\therefore$ ق = ٦ نيوتن

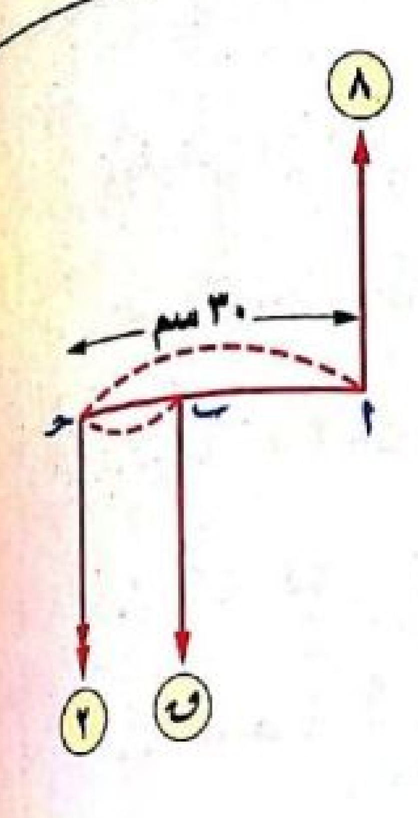
ويكون : ٨ × ٣٠ = ق × بحـ

أى : ٨ × ٣٠ = ٦ × بحـ

$\therefore$ بحـ = ٤٠ سم

$\therefore$ البعد بين خطى عمل القوتين = ٤٠ − ٣٠ = ١٠ سم.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



فى الحالة الثانية أى $ق > ٨$

$\therefore$ ح = ق − ٨ أى ٢ = ق − ٨ $\therefore$ ق = ١٠ نيوتن

ويكون : ٨ × ٣٠ = ق × ب حـ

أى : ٨ × ٣٠ = ١٠ × ب حـ $\therefore$ ب حـ = ٢٤ سم

$\therefore$ البُعد بين خطى عمل القوتين = ٣٠ − ٢٤ = ٦ سم.

مثال ٥

قوتان متوازيتان مقدار أصغرهما ٦٠ نيوتن وتؤثر فى الطرف أ من قضيب خفيف $\overline{أب}$ والكبرى تؤثر فى الطرف الآخر ب فإذا كان مقدار محصلتهما ٢٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ١٢٠ سم فما طول القضيب ؟

الحــل

بفرض أن $ق_١$ = ٦٠ نيوتن ، $ق_٢$ = ق نيوتن

، $\because$ ح $< ق_١$

$\therefore$ القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فى اتجاهين متضادين

، $\because$ $ق_٢ > ق_١$ $\therefore$ المحصلة $\overleftarrow{ح}$ فى اتجاه $\overleftarrow{ق_٢}$

وبفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة $\overleftarrow{ح}$

$\therefore$ $\overleftarrow{ح}$ = ٢٠ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_١}$ = −٦٠ $\overleftarrow{ى}$

، $\because$ $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢}$ $\therefore$ ٢٠ $\overleftarrow{ى}$ = −٦٠ $\overleftarrow{ى}$ + $\overleftarrow{ق_٢}$

$\therefore$ $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٢٠ $\overleftarrow{ى}$ + ٦٠ $\overleftarrow{ى}$ = ٨٠ $\overleftarrow{ى}$ $\therefore$ $ق_٢$ = ٨٠ نيوتن

وبفرض أن المحصلة $\overleftarrow{ح}$ تؤثر فى حـ حيث حـ $\in \overleftrightarrow{أب}$ ، حـ $\notin \overline{أب}$

، $\because$ $ق_١$ × أ حـ = $ق_٢$ × ب حـ $\therefore$ ٦٠ × (أ ب + ١٢٠) = ٨٠ × ١٢٠ وبالقسمة على ٦٠

$\therefore$ أ ب + ١٢٠ = ٨٠ × ٢ $\therefore$ أ ب + ١٢٠ = ١٦٠

$\therefore$ أ ب = ٤٠ سم $\therefore$ طول القضيب = ٤٠ سم.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٦

قوتان متوازيتان فى اتجاه واحد مقداراهما ق ، ٣ ق نيوتن تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب فإذا تحركت القوة ق بحيث تظل موازية لنفسها مسافة قدرها س على ب أ فأثبت أن محصلة القوتين تتحرك مسافة قدرها $\frac{١}{٤}$ س فى نفس الاتجاه.

الحل

- **قبل تحريك القوة ق :**

ق × أ حـ = ٣ ق × ب حـ ، بالقسمة على ق

∴ أ حـ = ٣ ب حـ (١)

- **بعد تحريك القوة ق مسافة س فى اتجاه ب أ :**

بفرض أن المحصلة تتحرك مسافة ص فى نفس الاتجاه

∴ ق × أَ حَ = ٣ ق × ب حَ

∴ ق × (س + أ حـ − ص) = ٣ ق × (حـ ب + ص) ، بالقسمة على ق

∴ س + أ حـ − ص = ٣ حـ ب + ٣ ص

وبالتعويض من (١) : ∴ س − ص + أ حـ = أ حـ + ٣ ص

∴ س = ٤ ص ∴ ص = $\frac{١}{٤}$ س

∴ المحصلة تتحرك مسافة $\frac{١}{٤}$ س فى نفس الاتجاه.

عزوم القوى المتوازية

نظرية

المجموع الجبرى لعزوم عدة قوى متوازية مستوية حول أية نقطة فى مستويها يساوى عزم محصلتها حول نفس النقطة.

سوف نبرهن النظرية باستخدام قوتين فقط أما إذا كانت مجموعة القوى مكونة من أكثر من قوتين فيمكن تحصيل كل قوتين (لا تنعدم محصلتهما) منهم إلى أن تؤول المجموعة إلى قوتين متوازيتين فقط.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

البرهان : (لا يمتحن فيه الطالب)

أولاً : القوتان فى اتجاه واحد :

نفرض أية نقطة مثل (و) فى مستوى القوتين ونرسم منها عمودًا على خطوط عمل القوتين ومحصلتهما كما فى الشكل المقابل

$\therefore$ المجموع الجبرى لعزمى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ حول و

$= ق_1 \times وأ + ق_2 \times وب$

$= ق_1 \, (وحـ - أحـ) + ق_2 \, (وحـ + حـب)$

$= ق_1 \times وحـ - ق_1 \times أحـ + ق_2 \times وحـ + ق_2 \times حـب$

لكن $ق_1 \times أحـ = ق_2 \times حـب$ لأن حـ نقطة تأثير المحصلة ، $ح = ق_1 + ق_2$

$\therefore$ المجموع الجبرى لعزمى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ حول و $= ق_1 \times وحـ + ق_2 \times وحـ$

$= (ق_1 + ق_2)\, وحـ = ح \times وحـ =$ عزم المحصلة حول (و) (وهو المطلوب)

ثانيًا : القوتان فى اتجاهين متضادين :

نفرض أية نقطة (و) فى المستوى ونرسم منها عمودًا على خطوط عمل القوتين ومحصلتهما كما فى الشكل المقابل

$\therefore$ المجموع الجبرى لعزمى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ حول و

$= ق_1 \times وأ - ق_2 \times وب$

$= ق_1 \, (وحـ + حـأ) - ق_2 \, (وحـ + حـب)$

$= ق_1 \times وحـ + ق_1 \times حـأ - ق_2 \times وحـ - ق_2 \times حـب$

لكن $ق_1 \times حـأ = ق_2 \times حـب$ لأن حـ نقطة تأثير المحصلة ، $ح = ق_1 - ق_2$

$\therefore$ المجموع الجبرى لعزمى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ حول و $= ق_1 \times وحـ - ق_2 \times وحـ$

$= (ق_1 - ق_2)\, وحـ = ح \times وحـ =$ عزم المحصلة حول و (وهو المطلوب)

ملاحظة

النظرية السابقة صحيحة فى حالة كون القوى المستوية غير متوازية.

ثانيًا محصلة عدة قوى متوازية مستوية

إذا كانت : $\overleftarrow{ق}_١ ، \overleftarrow{ق}_٢ ، \overleftarrow{ق}_٣ ، ... ، \overleftarrow{ق}_ن$ عدة قوى متوازية مستوية فإن :

① لتعيين مقدار واتجاه المحصلة نستخدم العلاقة :

$$\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق}_١ + \overleftarrow{ق}_٢ + ... + \overleftarrow{ق}_ن$$

② لتعيين نقطة تأثير المحصلة نستخدم نظرية العزوم.

مثال ٧

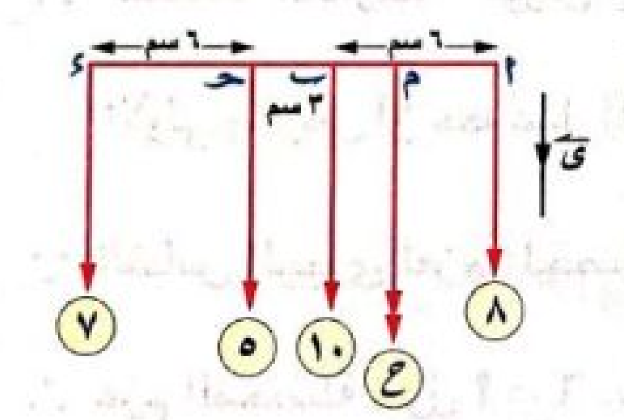
أربع قوى متوازية ومتحدة الاتجاه مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ٥ ، ٧ ثقل كجم تؤثر عند النقط

أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب الواقعة على خط مستقيم واحد عمودى على اتجاه القوى.

فإذا كان : أب = ٢ ب حـ = حـ ء = ٦ سم ، أء = ١٥ سم فأوجد محصلة هذه القوى.

الحل

- **لتحديد مقدار واتجاه المحصلة :**



نفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوى

∴ $\overleftarrow{ح} = ٨ \overleftarrow{ى} + ١٠ \overleftarrow{ى} + ٥ \overleftarrow{ى} + ٧ \overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ح} = ٣٠ \overleftarrow{ى}$

∴ المحصلة مقدارها ٣٠ ث.كجم وفى اتجاه القوى.

- **لتحديد نقطة تأثير المحصلة :**

نفرض أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة م ∈ $\overleftrightarrow{أء}$

∵ القياس الجبرى لعزم المحصلة حول أ = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ

∴ عزم المحصلة حول أ = ٨ × ٠ + ١٠ × ٦ + ٥ × ٩ + ٧ × ١٥ = ٢١٠ ث.كجم.سم

∴ المحصلة تعمل على الدوران حول أ فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة أى أن خط عملها

يقع إلى اليسار من النقطة أ أى أن م ∈ $\overline{أء}$

∴ ح × أم = ٢١٠ أى ٣٠ × أم = ٢١٠ ∴ أم = ٧ سم.

∴ خط عمل المحصلة يمر بنقطة م ∈ $\overline{أء}$ حيث : أم = ٧ سم.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٨

أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس نقط تقع على خط مستقيم ومرتبة فى اتجاه واحد حيث :

أب = ٤٠ سم ، ب حـ = ٦٠ سم ، حـ ء = ٨٠ سم ، ء هـ = ١٠٠ سم. أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ٤ نيوتن فى النقط أ ، حـ ، ء ، ب ، هـ على الترتيب وفى اتجاه عمودى على أهـ بحيث كانت القوى الثلاثة الأولى متحدة الاتجاه والقوتان الأخيرتان فى الاتجاه المضاد. عيِّن محصلة هذه القوى.

الحل

نفرض ى متجه وحدة فى اتجاه القوى الثلاث الأولى

∴ ع = ٦ ى + ٣ ى + ٥ ى − ٨ ى − ٤ ى

∴ ع = ٢ ى

∴ المحصلة مقدارها ٢ نيوتن وفى اتجاه القوى الثلاث الأولى ونفرض أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة م ∈ أهـ

∵ القياس الجبرى لعزم المحصلة حول أ = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ

∴ عزم المحصلة حول أ = ٦ × ٠ + ٣ × ١٠٠ + ٥ × ١٨٠ − ٨ × ٤٠ − ٤ × ٢٨٠

= −٢٤٠ ث.كجم.سم

∴ المحصلة تعمل على الدوران حول أ فى اتجاه دوران عقارب الساعة

∴ خط عمل المحصلة يجب أن يقع على اليمين من نقطة أ

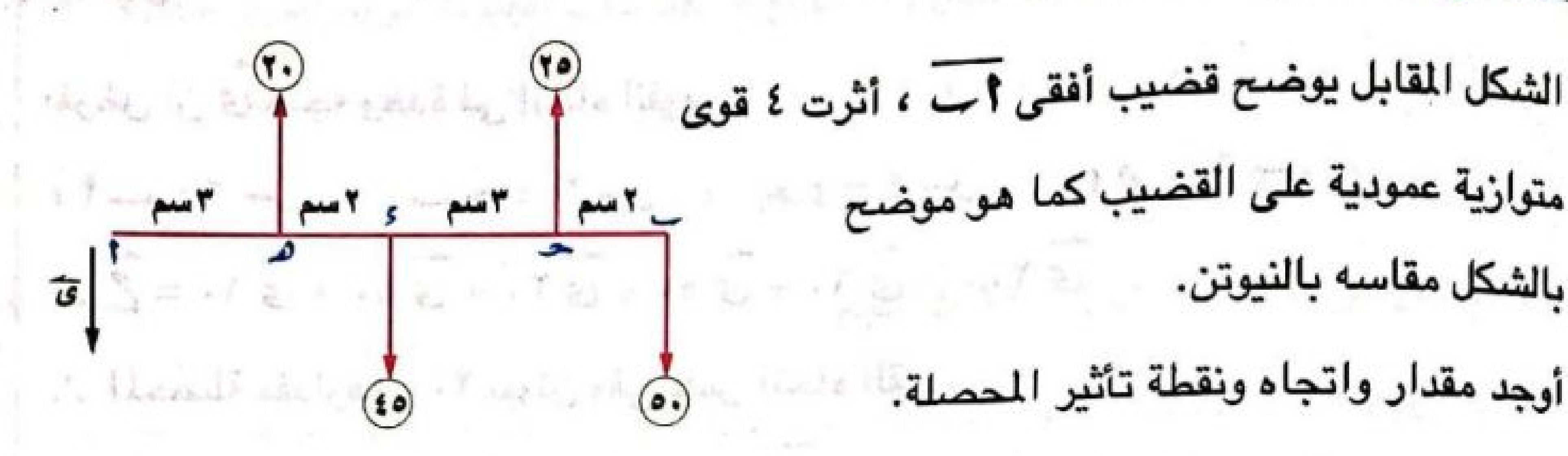
أى أن : م ∈ هـ أ ، م ∉ أهـ

∴ − ع × أم = −٢٤٠ أى −٢ × أم = −٢٤٠ ∴ أم = ١٢٠ سم

∴ خط عمل المحصلة يمر بنقطة م ∈ هـ أ ، م ∉ أهـ بحيث أم = ١٢٠ سم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٩



الشكل المقابل يوضح قضيب أفقى $\overline{\text{أب}}$ ، أثرت ٤ قوى متوازية عمودية على القضيب كما هو موضح بالشكل مقاسه بالنيوتن.

أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير المحصلة.

الحل

نفرض ى متجه وحدة فى اتجاه رأسى لأسفل

∴ ح = −٢٠ ى + ٤٥ ى − ٢٥ ى + ٥٠ ى = ٥٠ ى

∴ المحصلة مقدارها ٥٠ نيوتن وفى اتجاه رأسى لأسفل وبفرض أن خط عمل المحصلة يمر بنقطة تبعد مسافة س سم عن أ

، ∵ عزم المحصلة حول أ = مجموع عزوم القوى حول أ

∴ − ٥٠ × س = ٢٠ × ٣ − ٤٥ × ٥ + ٢٥ × ٨ − ٥٠ × ١٠

∴ س = ٩,٣ سم

أى أن : خط عمل المحصلة يمر بنقطة على القضيب تبعد مسافة ٩,٣ سم من أ

مثال ١٠

إذا كانت أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس نقط على استقامة واحدة ومرتبة فى اتجاه واحد

بحيث : أب : ب حـ : حـ ء : ء هـ = ٢ : ٣ : ٤ : ٦

وأثرت خمس قوى متوازية وفى نفس الاتجاه مقاديرها ١٠ ، ٥٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٦٠ نيوتن فى النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ على الترتيب عمودية على $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$

أثبت أن : المحصلة تقسم $\overline{\text{أهـ}}$ بنسبة ٨ : ٧

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل

نفرض أن ى⃖ متجه وحدة فى اتجاه القوى

، أب = ٢ س ، ب حـ = ٣ س ، حـ ء = ٤ س ، ء هـ = ٦ س

∴ ح⃖ = ١٠ ى⃖ + ٥٠ ى⃖ + ٣٠ ى⃖ + ٥٠ ى⃖ + ٦٠ ى⃖ = ٢٠٠ ى⃖

∴ المحصلة مقدارها ٢٠٠ نيوتن وفى نفس اتجاه القوى

وبفرض أن المحصلة توثر فى نقطة و ∈ أهـ

، ∵ عزم المحصلة حول أ = مجموع عزوم القوى حول أ

∴ − ٢٠٠ × أ و = − ٥٠ × ٢ س − ٣٠ × ٥ س − ٥٠ × ٩ س − ٦٠ × ١٥ س

∴ أ و = ٨ س ∴ و هـ = ١٥ س − ٨ س = ٧ س

∴ $\frac{\text{أو}}{\text{وهـ}} = \frac{\text{٨ س}}{\text{٧ س}} = \frac{٨}{٧}$

∴ المحصلة تؤثر فى نقطة (و) التى تقسم أهـ من الداخل بنسبة ٨ : ٧

مثال ١١

أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط على استقامة واحدة ومرتبة فى اتجاه واحد بحيث :

أب = ١٠ سم ، ب حـ = ٣٠ سم ، حـ ء = ٤٠ سم أثرت قوتان مقداراهما ٨ ، ق١ ث.كجم فى النقطتين أ ، ء فى اتجاه واحد عمودى على أء كما أثرت قوة قدرها ق٢ ث.كجم فى نقطة حـ فى اتجاه مضاد لاتجاه القوتين السابقتين فإذا كان محصلة القوى الثلاث مقدارها ٤ ث.كجم وتعمل فى اتجاه ق٢ وخط عملها يمر بالنقطة ب **فأوجد مقدار كل من : ق١ ، ق٢**

الحـــل

نعتبر ى⃖ متجه وحدة فى اتجاه ح⃖

∴ ٤ ى⃖ = ق٢ ى⃖ − ٨ ى⃖ − ق١ ى⃖

= (ق٢ − ٨ − ق١) ى⃖

∴ ق٢ − ٨ − ق١ = ٤

∴ ق٢ − ق١ = ١٢

(١)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ القياس الجبرى لعزم المحصلة حول ء = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ء

∴ $-٤ \times ٧٠ = ٨ \times ٨٠ - ق_{٢} \times ٤٠$ ∴ $٤٠ ق_{٢} = ٦٤٠ + ٢٨٠ = ٩٢٠$

∴ $ق_{٢} = ٢٣$ ث.كجم

وبالتعويض فى (١) : ∴ $ق_{١} = ١١$ ث.كجم.

ملاحظة

إذا كان : $\overleftarrow{ق_{١}} \parallel \overleftarrow{ق_{٢}}$ فإن :

① $\overleftarrow{ق_{١}} = ك\,\overleftarrow{ق_{٢}}$ حيث ك ثابت لا يساوى الصفر

ويكون : $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ فى اتجاه واحد إذا كان ك > ٠

، $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ فى اتجاهين متضادين إذا كان ك < ٠

② ميل المتجه $\overleftarrow{ق_{١}}$ = ميل المتجه $\overleftarrow{ق_{٢}}$

③ $\overleftarrow{ق_{١}} \times \overleftarrow{ق_{٢}} = \overleftarrow{٠}$

مثال ⑫

$\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان فى اتجاهى محورى الإحداثيات $\overleftarrow{وس}$ ، $\overleftarrow{وص}$

، القوتان $\overleftarrow{ق_{١}} = ٣\overleftarrow{س} + ل\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}} = -٦\overleftarrow{س} + ٨\overleftarrow{ص}$ متوازيتان.

عيِّن قيمة الثابت ل وإذا أثرت القوتان فى النقطتين ا (١ ، ٠) ، ب (٦ ، ٠) على الترتيب

فأوجد نقطة تقاطع خط عمل محصلتهما مع $\overleftarrow{وس}$

الحل

∵ $\overleftarrow{ق_{١}} \parallel \overleftarrow{ق_{٢}}$

∴ $\overleftarrow{ق_{١}} = ك\,\overleftarrow{ق_{٢}}$

∴ $٣\overleftarrow{س} + ل\overleftarrow{ص} = ك(-٦\overleftarrow{س} + ٨\overleftarrow{ص})$

∴ $٣\overleftarrow{س} + ل\overleftarrow{ص} = -٦ك\overleftarrow{س} + ٨ك\overleftarrow{ص}$

$\therefore -6 ك = 3$

$\therefore ك = \frac{1}{2}$ ، ل = ٨ ك

$\therefore ل = 8 \times \frac{1}{2} = -4$

$\therefore \overleftarrow{ق_1} = 3\overleftarrow{س} - 4\overleftarrow{ص}$

$\therefore ق_1 = \|\overleftarrow{ق_1}\| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

، $\because \overleftarrow{ق_2} = -6\overleftarrow{س} + 8\overleftarrow{ص}$

$\therefore ق_2 = \|\overleftarrow{ق_2}\| = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ $\therefore ق_2 > ق_1$

، $\because \overleftarrow{ق_1} = -\frac{1}{2}\overleftarrow{ق_2}$ $\therefore \overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ فى اتجاهين متضادين

وبفرض أن المحصلة $\overleftarrow{ح}$ تؤثر فى نقطة حـ حيث حـ $\in \overleftrightarrow{أب}$ ، حـ $\notin \overline{أب}$

$\therefore$ حـ $\in \overleftrightarrow{و س}$ وبفرض أن حـ (س ، ٠)

$\therefore ق_1 \times$ أحـ $= ق_2 \times$ ب حـ $\therefore 5 \times (5 +$ ب حـ$) = 10 \times$ ب حـ

$\therefore 25 + 5$ ب حـ $= 10$ ب حـ $\therefore$ ب حـ $= 5$

$\therefore$ س $= 1 + 5 + 5 = 11$ $\therefore$ حـ $= (11 ، 0)$

$\therefore$ نقطة تقاطع خط عمل المحصلة مع $\overleftrightarrow{و س}$ هى حـ (١١ ، ٠)

لاحظ أن

$\because \overleftarrow{ق_1} // \overleftarrow{ق_2}$

$\therefore$ ميل المتجه $\overleftarrow{ق_1}$ = ميل المتجه $\overleftarrow{ق_2}$

$\therefore \frac{ل}{3} = \frac{8}{-6}$ $\therefore ل = -4$

حل آخر :

$\because \overleftarrow{ق_1} // \overleftarrow{ق_2}$

$\therefore \overleftarrow{ق_1} \times \overleftarrow{ق_2} = \overleftarrow{0}$

$\therefore (3 ، ل) \times (-6 ، 8) = \overleftarrow{0}$

$\therefore 3 \times 8 + ل \times 6 = 0$

$\therefore ل = -4$

$\therefore \overleftarrow{ق_1} = 3\overleftarrow{س} - 4\overleftarrow{ص}$

$\therefore \overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} = -3\overleftarrow{س} + 4\overleftarrow{ص}$

لاحظ أن

إذا كان : $\overleftarrow{ق_1} // \overleftarrow{ق_2}$

فإن : $\overleftarrow{ق_1} \times \overleftarrow{ق_2} = \overleftarrow{0}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

، ∵ $\overleftarrow{و أ} \times \overleftarrow{ق} + \overleftarrow{و ب} \times \overleftarrow{ق_٢} = \overleftarrow{و حـ} \times \overleftarrow{ح}$

∴ (١ ، ٠) × (٣ ، –٤) + (٦ ، ٠) × (–٦ ، ٨) = (س ، ٠) × (–٣ ، ٤)

∴ –٤ + ٤٨ = ٤ س   ∴ س = ١١

∴ نقطة تقاطع خط عمل المحصلة مع $\overleftrightarrow{و س}$ هى (١١ ، ٠)

معلومة إثرائية

إذا كان $ق_١$ ، $ق_٢$ ، ... ، $ق_ن$ هى القياسات الجبرية لعدة قوى متوازية تؤثر فى النقط

$أ_١$ (س$_١$ ، ص$_١$) ، $أ_٢$ (س$_٢$ ، ص$_٢$) ، ... ، $أ_ن$ (س$_ن$ ، ص$_ن$) على الترتيب

فإن القياس الجبرى للمحصلة $ح = ق_١ + ق_٢ + ... + ق_ن$

وتؤثر المحصلة فى نقطة ب (س ، ص) وباستخدام مبدأ ونظرية العزوم نجد أن :

$$س = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر س_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر} \quad ، \quad ص = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر ص_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر}$$

فمثلًا : إذا أثرت القوى المتوازية التى مقاديرها ٥ ، ١١ ، ١٤ نيوتن فى اتجاه واحد

فى النقطة أ = (١ ، –٢) ، ب = (٠ ، ٣) ، حـ = (٥ ، –١) على الترتيب.

أوجد نقطة تأثير محصلة هذه القوى.

فإن المحصلة (ح) = ٥ + ١١ + ١٤ = ٣٠ نيوتن

وبفرض أن نقطة تأثير المحصلة هى (س ، ص) فإن :

$$س = \frac{\sum_{ر=١}^{٣} ق_ر س_ر}{\sum_{ر=١}^{٣} ق_ر} = \frac{ق_١ س_١ + ق_٢ س_٢ + ق_٣ س_٣}{ق_١ + ق_٢ + ق_٣} = \frac{٥ \times ١ + ١١ \times ٠ + ١٤ \times ٥}{٣٠} = ٢,٥$$

$$، ص = \frac{\sum_{ر=١}^{٣} ق_ر ص_ر}{\sum_{ر=١}^{٣} ق_ر} = \frac{ق_١ ص_١ + ق_٢ ص_٢ + ق_٣ ص_٣}{ق_١ + ق_٢ + ق_٣} = \frac{٥ \times -٢ + ١١ \times ٣ + ١٤ \times -١}{٣٠} = ٠,٣$$

∴ نقطة تأثير المحصلة هى (٢,٥ ، ٠,٣)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١٣

تؤثر القوتان $\overleftarrow{ق_١} = ٢\overleftarrow{س} - ٣\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = ٤\overleftarrow{س} - ٦\overleftarrow{ص}$ فى النقطتين

أ (١ ، ٣) ، ب (٤ ، ٩) على الترتيب.

أوجد محصلة القوتين ونقطة تقاطع خط عملها مع $\overleftrightarrow{أب}$

الحل

$\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} = ٦\overleftarrow{س} - ٩\overleftarrow{ص}$

نلاحظ أن $\overleftarrow{ق_٢} = ٢\overleftarrow{ق_١}$

أى أن : القوتين متوازيتان وفى نفس الاتجاه

نفرض المحصلة تؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overline{أب}$ حيث : $\frac{أحـ}{حـب} = \frac{٢}{١}$

ومن قانون نقطة التقسيم

$\therefore$ حـ = $\left(\frac{٢ \times ٤ + ١ \times ١}{٢ + ١} ، \frac{٢ \times ٩ + ١ \times ٣}{٢ + ١}\right) = (٣ ، ٧)$

حل آخر :

بفرض أن إحدى نقط تأثير المحصلة هى حـ (س ، ص) ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ فإن :

٦ × س = ٢ × ١ + ٤ × ٤

$\therefore$ س = ٣

، −٩ × ص = −٣ × ٣ − ٦ × ٩

$\therefore$ ص = ٧

$\therefore$ نقطة تقاطع المحصلة $\overleftarrow{ح}$ مع $\overleftrightarrow{أب}$ هى (٣ ، ٧)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



تمارين 5 على محصلة القوى المتوازية المستوية

اختبار تفاعلي



من أسئلة الكتاب المدرسي

أولًا تمارين على محصلة قوتين متوازيتين

١ إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتين متوازيتين ومتحدتي الاتجاه تؤثران في النقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٥٧ سم وكان $ق_١$ = ٢٣ نيوتن ، $ق_٢$ = ١٥ نيوتن فأوجد محصلة هاتين القوتين.

«٣٨ نيوتن ، تبعد نقطة تأثيرها عن أ مسافة $٢٢\frac{١}{٢}$ سم»

٢ (مصر ١٩٨٨) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان متوازيتان ومتضادتان في الاتجاه تؤثران في النقطتين أ ، ب حيث : أ ب = ١٢,٥ سم فإذا كان : $ق_١$ = ٨٠ نيوتن ، $ق_٢$ = ٣٠ نيوتن

فأوجد محصلة هاتين القوتين.

«٥٠ نيوتن ، نقطة تأثيرها تبعد عن أ مسافة ٧,٥ سم»

٣ قوتان متوازيتان مقداراهما ٣٠ ، ٧٠ نيوتن تؤثران في نقطتين أ ، ب حيث :

أ ب = ٢٠٠ سم ، أوجد محصلة القوتين وبُعد نقطة تأثيرها عن أ إذا كانت القوتان :

(١) في اتجاه واحد. (٢) في اتجاهين متضادين.

«١٠٠ نيوتن ، ١٤٠ سم ، ٤٠ نيوتن ، ٣٥٠ سم»

٤ إذا كان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتين متوازيتين متضادتين في الاتجاه وتؤثران في النقطتين أ ، ب وكانت $\overleftarrow{ح}$ محصلتهما تؤثر في نقطة حـ $\in \overleftrightarrow{أ ب}$ أجب عما يأتي :

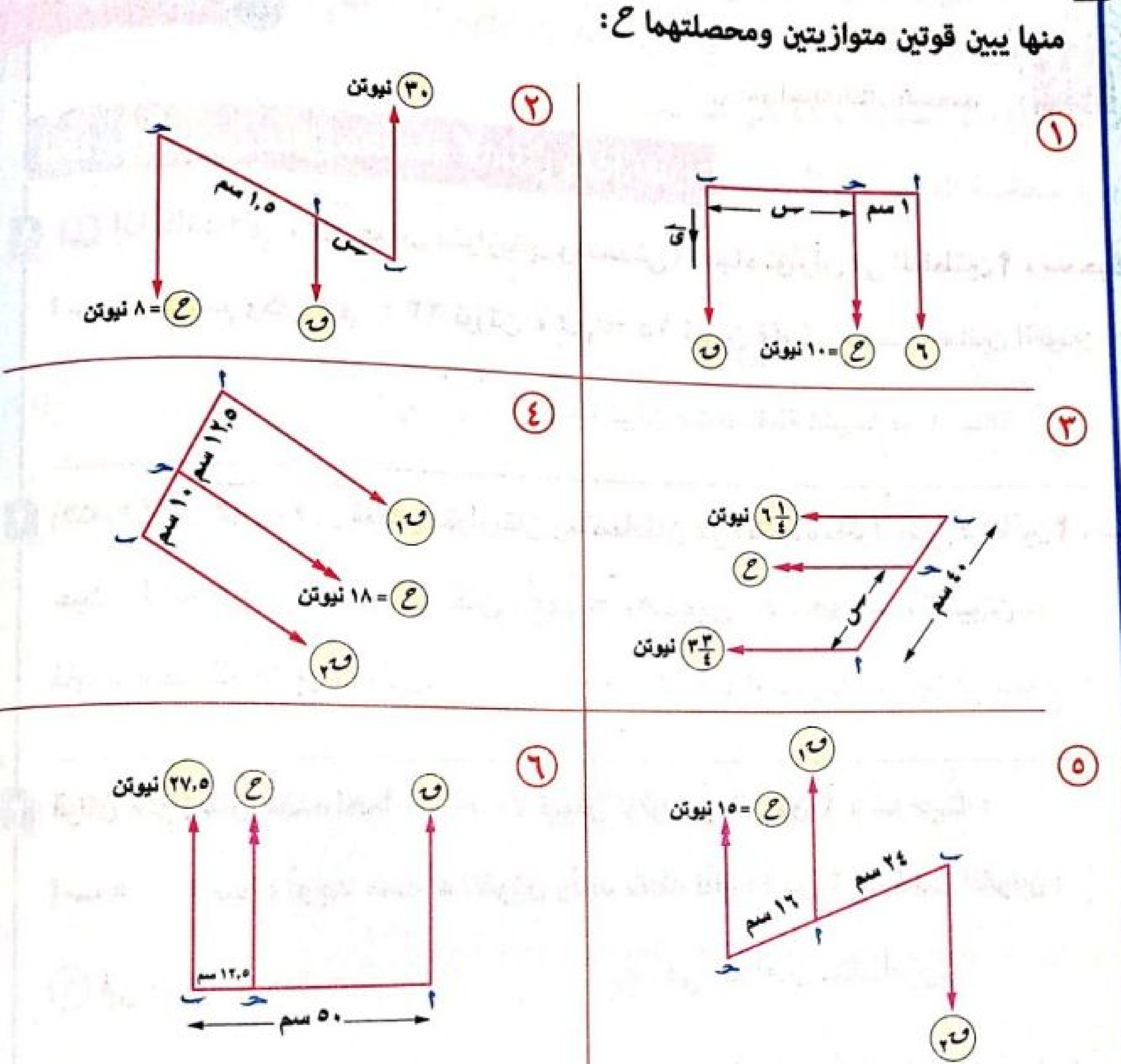
(١) $ق_١$ = ١٥ نيوتن ، ح = ٢٠ نيوتن ، أ حـ = ٧٠ سم

أوجد : $ق_٢$ ، أ ب

(٢) $ق_٢$ = ٦ نيوتن ، أ حـ = ٢٤ سم ، حـ $\notin \overline{أ ب}$ ، أ ب = ٥٦ سم

أوجد : $ق_١$ ، ح

٥ في كل مما يأتى عيّن مقادير القوى والأبعاد المجهولة الموضحة فى الأشكال المرسومة والتى كل منها يبين قوتين متوازيتين ومحصلتهما ح:



٦ قوتان متوازيتان ومتضادتان فى الاتجاه مقداراهما ٩ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى النقطتين أ ، ب حيث أب عمودى على خط عمل القوتين فإذا كان خط عمل المحصلة يبعد ٩ متر عن أ أوجد طول : أب

«٣,٦ م»

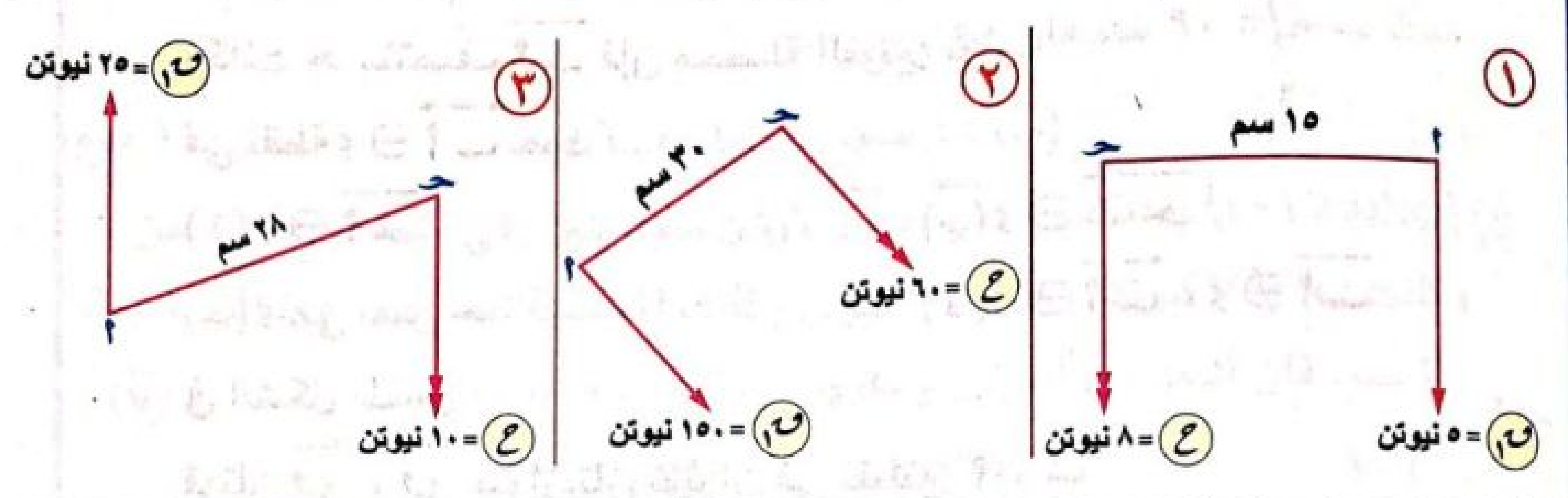
٧ إذا كانت محصلة القوتين المتوازيتين ٧ ى ، ٥ ى نيوتن تؤثر فى نقطة تبعد $٢\frac{١}{٣}$ متر عن خط عمل القوة الصغرى. أوجد المسافة بين خطى عمل القوتين.

«٤ م»

٨ إذا كانت محصلة القوتين ٩ ى ، −٧ ى تؤثر فى نقطة تبعد $٤\frac{١}{٢}$ سم عن خط عمل القوة الصغرى. أوجد المسافة بين خطى عمل القوتين.

«١ سم»

٩ في كل مما يأتي الشكل المرسوم يوضح معيارى قوتين متوازيتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ ومحصلتهما $\overline{ح}$ عيِّن $\overline{ق_٢}$:



١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت القوتان $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ متوازيتين وفى اتجاهين متضادين وكان : $ق_١$ = ١٤ نيوتن ، $ق_٢$ = ١٠ نيوتن فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ٢٤ (ب) ٤ (جـ) ١٤٠ (د) ١,٤

② قوتان متوازيتان متحدتا الاتجاه مقدار إحداهما ضعف مقدار الأخرى ومقدار محصلتهما = ٣٩ نيوتن فإن مقدار أصغرهما = ... نيوتن.

(أ) ١٩,٥ (ب) ٣٩ (جـ) ٢٦ (د) ١٣

③ $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ قوتان متوازيتان محصلتهما $\overline{ح}$ إذا كان : $ق_١$ = ٨ نيوتن ، ح = ١١ نيوتن فإن : $ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) ٣ (ب) ١٩ (جـ) ١٦ أ ٢٢ (د) ٣ أ ١٩

④ إذا كانت : $\overline{ق_١}$ // $\overline{ق_٢}$ وفى اتجاه واحد حيث : $ق_١$ = ٥٠ ث.جم ، $ق_٢$ = ٦٠ ث.جم والبُعد بينهما ٤٤ سم فإن بُعد $\overline{ح}$ عن $\overline{ق_١}$ = ... سم.

(أ) ١٦ (ب) ١٨ (جـ) ٢٠ (د) ٢٤

⑤ قوتان متوازيتان مقدارهما $ق_١$ ، $ق_٢$ تؤثران فى نفس الاتجاه ومقدار محصلتيهما ح فإن : ح ....

(أ) أكبر من $ق_١$ (ب) أقل من $ق_٢$

(جـ) تساوى $ق_٢ - ق_١$ (د) تساوى $ق_٢ - ق_١$

⑥ في الشكل المقابل :

قوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ متوازيتان تؤثران في نقطتين أ ، ب
وكانت حـ منتصف $\overline{أب}$ فإن محصلة القوتين تؤثر
في نقطة ء ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث ....

(أ) ء ∈ $\overline{أحـ}$
(ب) ء ∈ $\overline{بحـ}$
(جـ) ء هي نفس حـ
(د) ء ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، ء ∉ $\overline{أب}$

أ ، حـ ، ب ، ٦ ، ٨

⑦ في الشكل المقابل :

قوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ متوازيتان تؤثران في نقطتين أ ، ب
وكانت حـ منتصف $\overline{أب}$ فإن محصلة القوتين تؤثر في
نقطة ء ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث ....

(أ) ء ∈ $\overline{أحـ}$
(ب) ء ∈ $\overline{بحـ}$
(جـ) ء هي نفس حـ
(د) ء ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، ء ∉ $\overline{أب}$

$ق_٢$ = ١٥ ، أ ، حـ ، ب ، $ق_١$ = ٥

⑧ قوتان متوازيتان ويعملان في نفس الاتجاه مقداراهما ق ، ٣ ق وتؤثران في النقطتين أ ، ب على الترتيب حيث أب = ٦٠ سم فإن المحصلة تؤثر في نقطة حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أحـ = ... سم.

(أ) ٣٦ (ب) ٤٠ (جـ) ٤٥ (د) ٥٠

⑨ إذا كانت $\overleftarrow{ح}$ هي محصلة القوتان المتوازيتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ وكان : $ق_١ < ح < ق_٢$
فإن : ....

(أ) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ في نفس الاتجاه.
(ب) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ متضادان في الاتجاه.
(جـ) $\overleftarrow{ح}$ في اتجاه $\overleftarrow{ق_١}$
(د) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} - \overleftarrow{ق_٢}$

⑩ إذا كانت ح هي محصلة القوتين المتوازيتين ٣٠ ، ق نيوتن وكانت ح = ١٠ نيوتن
فإن ....

(أ) ق = ٢٠ نيوتن وتعمل عكس اتجاه القوة ٣٠ نيوتن.
(ب) ق = ٢٠ نيوتن وتعمل في نفس اتجاه القوة ٣٠ نيوتن.
(جـ) ق = ٤٠ نيوتن وتعمل عكس اتجاه المحصلة.
(د) ق = ٤٠ نيوتن وتعمل في نفس اتجاه القوة ٣٠ نيوتن.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١١) إذا كانت $ق_١$ ، $ق_٢$ قوتين متوازيتين تؤثران فى النقطتين أ ، ب حيث $ق_١$ = ٣٠ ث.كجم ، $ق_١$ > $ق_٢$ وكانت محصلتهما ح مقدارها ١٠ ث.كجم وتؤثر فى نقطة جـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث ب جـ = ٩٠ سم فإن : أ ب = ...

(أ) ٣٠ سم. (ب) ٤٥ سم. (جـ) ٦٠ سم. (د) ١٢٠ سم.

(١٢) (دور أول ٢٠١٧) إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتين متوازيتين وفى اتجاهين متضادين وكانت $ق_١$ = ٧ نيوتن ، $ق_٢$ = ٩ نيوتن وكانت المحصلة تبعد عن القوة الثانية بمقدار ٣٥ سم. فإن البعد بين القوتين يساوى .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ١٦ (جـ) ٣٥ (د) ٧٠

(١٣) (دور أول ٢٠١٩) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان متوازيتان فى نفس الاتجاه تؤثران عند أ ، ب على الترتيب ، محصلتهما $\overleftarrow{ح}$ ، تؤثر عند نقطة جـ ∈ $\overline{أب}$ حيث $ق_١$ = ٨ نيوتن ، ح = ١٣ نيوتن ، أ جـ = ١٠ سم

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٣ (جـ) ٢٦ (د) ٦

(١٤) (دور ثان ٢٠١٩) فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، قوتان متوازيتان فى نفس الاتجاه تؤثران عند أ ، ب على الترتيب ، محصلتهما $\overleftarrow{ح}$ تؤثر عند نقطة جـ ∈ $\overline{أب}$ ، إذا كانت $ق_٢$ = ٦ نيوتن ، أ جـ = ٢٤ سم ، أ ب = ٥٦ سم فإن : ....

(أ) $ق_١$ = ٨ نيوتن ، ح = ١٤ نيوتن (ب) $ق_١$ = ٢٤ نيوتن ، ح = ٣٢ نيوتن

(جـ) $ق_١$ = ٣٢ نيوتن ، ح = ٣٨ نيوتن (د) $ق_١$ = ٨ نيوتن ، ح = ٢ نيوتن

(١٥) قوتان متوازيتان $ق_١$ ، $ق_٢$ ومتحدتا الاتجاه مقدار محصلتهما ٢٥ نيوتن وتؤثر فى نقطة تبعد ٤ سم عن القوة الأولى و ٦ سم عن القوة الثانية

فإن : $ق_١$ − $ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٠ (د) ٥

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(11) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٢٥٠ نيوتن وإحدى القوتين مقدارها ١٥٠ نيوتن وخط عملها يبعد ٤٠ سم عن خط عمل المحصلة. أوجد القوة الثانية وكذا البُعد بين القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان :

(١) فى اتجاه واحد. (٢) فى اتجاهين متضادين.

«١٠٠ نيوتن ، ١٠٠ سم ، ٤٠٠ نيوتن ، ٢٥ سم»

(12) قوتان متوازيتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ مقدار الأولى ٥٠ نيوتن ومقدار محصلتهما ٧٥ نيوتن والبُعد بين خطى عمل القوة الأولى والمحصلة ٢٥ سم. عيِّن مقدار واتجاه وخط عمل $\overleftarrow{ق_٢}$ إذا كان :

(١) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ح}$ فى اتجاه واحد. (٢) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ح}$ فى اتجاهين متضادين.

«٢٥ نيوتن ، ٧٥ سم ، ١٢٥ نيوتن ، ١٥ سم»

(13) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٤٠ نيوتن وإحدى القوتين مقدارها ٨٠ نيوتن وخط عملها يبعد عن خط عمل المحصلة بمقدار ٣٠ سم. أوجد القوة الثانية والبُعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت المحصلة والقوة المعلومة تعملان :

(١) فى اتجاه واحد. (٢) فى اتجاهين متضادين.

«٤٠ نيوتن ، ٣٠ سم ، ١٢٠ نيوتن ، ١٠ سم»

(14) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٣٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ٥٠٠ نيوتن وتعمل على بُعد ٥١ سم من المحصلة. أوجد القوة الثانية والبُعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان :

(١) فى اتجاه واحد. (٢) فى اتجاهين متضادين.

«١٥٠ نيوتن ، ١١٩ سم ، ٨٥٠ نيوتن ، ٢١ سم»

(15) (دور أول ١٩٩٥) قوتان متوازيتان مقداراهما ١٥ ، ق نيوتن حيث ق > ١٥ وتؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ، إذا كان مقدار المحصلة يساوى ٥ نيوتن وتؤثر فى نقطة ح ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث : ب ح = ٤٥ سم فأوجد : أ ب

«١٥ سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٦ قوتان متوازيتان أصغرهما ٣٠ نيوتن وتؤثر فى الطرف أ عموديًا على قضيب خفيف أب والكبرى تؤثر فى الطرف الآخر ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠ سم ، فما طول القضيب ؟ «٣٠ سم»

١٧ $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان متوازيتان متحدتان فى الاتجاه والبُعد بين خطى عملهما ٢٠ سم فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن خط عمل $\overleftarrow{ق_١}$ مسافة ٤ سم ، أوجد مقدار كل من القوتين. «٤٠ ، ١٠ نيوتن»

١٨ قوتان متوازيتان متضادتان فى الاتجاه مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ حيث : $ق_١ > ق_٢$ تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب من جسم متماسك فإذا كان : أب = ٤٠ سم ومقدار محصلتهما ٥٤ ثقل جرام وتؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث : بحـ = ٦٠ سم.

أوجد كلاً من : $ق_١$ ، $ق_٢$ «٨١ ، ٢٧ ثقل جرام»

١٩ (دور أول ١٩٩١) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان متوازيتان ومتضادتان فى الاتجاه تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ، $ق_١ > ق_٢$ إذا كانت محصلة $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوة معيارها ٩٠ ثقل كجم وتؤثر فى النقطة حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث : أب = ٣٦ سم ، أحـ = ١٦ سم.

فأوجد : $ق_١$ ، $ق_٢$ «١٣٠ ، ٤٠ ثقل كجم»

٢٠ قوتان متوازيتان تؤثران فى نقطتين أ ، ب فإذا كانت محصلتهما = ٢٠ نيوتن وتؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث : أب = ٤٠ سم ، أحـ = ١٠ سم. أوجد مقدار كل من القوتين :

(١) إذا كانتا فى اتجاه واحد. (٢) إذا كانتا فى اتجاهين متضادين.

«١٥ ، ٥ ، ٢٥ ، ٥ نيوتن»

٢١ أ ، ب ، حـ ثلاث نقط على استقامة واحدة حيث : أب = ٦٠ سم ، بحـ = ٤٠ سم ، أثرت قوتان متوازيتان فى النقطتين أ ، ب فإذا كان مقدار محصلتهما = ٢٤ نيوتن وتؤثر فى نقطة حـ فأوجد مقدار كل من القوتين. «١٦ ، ٨ أو ١٦ ، ٤٠ نيوتن»

٢٢ قوتان متوازيتان تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث : أب = ١٠٠ سم ، وتؤثر محصلتهما فى نقطة حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، فإذا كانت القوتان فى اتجاه واحد فإن : بحـ = ٢٥ سم ، وإذا كانتا متضادتين فى الاتجاه فإن المحصلة = ١٠ نيوتن. أوجد مقدار كل من القوتين. «٥ ، ١٥ نيوتن»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٣ قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقاديرها ٥ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطتين ا ، ب حيث : ا ب = ٣٩ سم. إذا اضيف للقوة الأولى قوة أخرى مقدارها ق فى نفس الاتجاه فإن المحصلة تتحرك ٨ سم. أوجد : ق «٦,٥ نيوتن»

٢٤ قوتان متوازيتان وفى اتجاه واحد مقداراهما ق ، ق تؤثران فى النقطتين ا ، ب فإذا تحركت إحداهما موازية لنفسها مسافة قدرها س على المستقيم $\overleftrightarrow{اب}$ فاثبت أن محصلتهما تتحرك مسافة قدرها $\frac{١}{٢}$ س فى نفس الاتجاه.

٢٥ قوتان متوازيتان وفى نفس الاتجاه مقداراهما ق ، ٢ ق تؤثران فى نقطتين ا ، ب إذا تحركت القوة ٢ ق موازية نفسها فى اتجاه $\overleftarrow{اب}$ مسافه س سم.
أثبت أن محصلة القوتين تتحرك فى نفس الاتجاه مسافة قدرها $\frac{٢}{٣}$ س

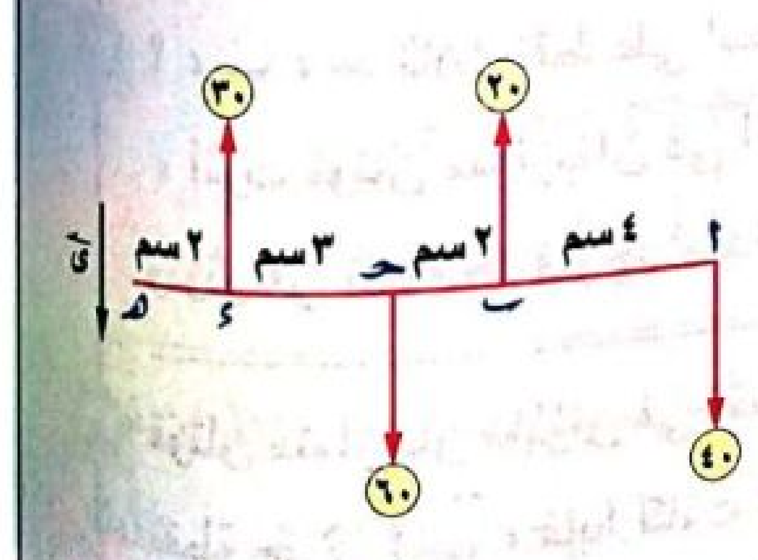
٢٦ قوتان متوازيتان فى اتجاهين متضادين مقداراهما ٥ ، ٩ نيوتن تؤثران فى النقطتين ا ، ب على الترتيب من جسم متماسك. فإذا انتقلت نقطة تأثير القوة ٩ نيوتن مسافة قدرها س سم على الشعاع $\overleftarrow{اب}$ بحيث تظل هذه القوة موازية للقوة الأخرى. أثبت أن نقطة تأثير محصلتها تنتقل مسافة $\frac{٩}{٤}$ س

٢٧ قوتان متوازيتان وفى اتجاه واحد مقداراهما ق ، ك تؤثران فى النقطتين ا ، ب على الترتيب. فإذا تحركت القوة ق موازية لنفسها مسافة قدرها س على الشعاع $\overleftarrow{اب}$ فاثبت أن محصلتهما تتحرك مسافة قدرها $\frac{ق}{ق + ك} \times$ س فى نفس الاتجاه.

ثانيًا تمارين على محصلة عدة قوى متوازية

١ فى الشكل المقابل :

ا ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس نقط تقع على خط مستقيم أفقى واحد أثرت القوتان ٢٠ ، ٣٠ نيوتن رأسيًا لأعلى عند النقطتين ب ، ء واثرت القوتان ٤٠ ، ٦٠ نيوتن رأسيًا لأسفل عند النقطتين ا ، حـ
أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير المحصلة.



«٥٠ $\overline{ى}$ ، ام = ٠.٢ سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢ ثلاث قوى متوازية ومتحدة الاتجاه مقاديرها ٥ ، ٧ ، ٩ ثقل كيلوجرام وبالترتيب حسب موضعها والبُعد بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية ٣٠ سم وبين خطى عمل الثانية والثالثة ٤٠ سم عيِّن محصلة القوى الثلاث.

«ح = ٢١ ثقل كجم ، والبعد بينهما وبين خط عمل القوة الأولى = ٤٠ سم»

---

٣ أ ، ب ، حـ ثلاث نقط تقع على مستقيم أفقى حيث : أب = ١ متر ، أحـ = ٣ متر ، ب ∈ $\overline{أحـ}$ أثرت القوى التى مقاديرها ٢ ، $\frac{1}{2}$ نيوتن رأسيًا لاسفل فى النقطتين أ ، حـ على الترتيب كما أثرت قوة مقدارها ٤ نيوتن فى نقطة ب رأسيًا لأعلى.

أوجد مقدار واتجاه المحصلة وبُعد نقطة تأثيرها عن نقطة أ «١ $\frac{1}{2}$ نيوتن ، $\frac{5}{3}$ م»

---

٤ أربع قوى متوازية ومتحدة فى الاتجاه مقاديرها ٣ ، ٤ ، ١ ، ٢ ث.كجم تؤثر عند النقطة أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب على خط مستقيم واحد عمودى على اتجاه القوى. عيِّن محصلة هذه القوى علمًا بأن : أب = ب حـ = ١٠٠ سم ، ء ∈ $\overleftarrow{ب حـ}$ بحيث : حـ ء = ١٥٠ سم.

«ح = ١٠ ث.كجم وتعمل على بُعد ١٣٠ سم من أ»

---

٥ (مصر ١٩٨٩) أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط مختلفة على مستقيم واحد بحيث : أب = ب حـ = حـ ء = ٣٠ سم أثرت قوتان مقداراهما ٨ ، ٩ ثقل كجم فى النقطتين أ ، ء بالترتيب فى اتجاه واحد عمودى على $\overleftrightarrow{أء}$ ، كما أثرت قوتان مقداراهما ٤ ، ٧ ثقل كجم فى النقطتين ب ، حـ على الترتيب فى اتجاه مضاد لاتجاه القوتين السابقتين.

عيِّن محصلة مجموعة هذه القوى. «ح = ٦ ثقل كجم ، أم = ٤٥ سم»

---

٦ أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط تقع على خط مستقيم واحد حيث : أب = ٣٢ سم ، ب حـ = ٤٠ سم ، حـ ء = ٨ سم أثرت القوتان المتوازيتان ٨ ، ١٠ نيوتن فى أ ، حـ على الترتيب فى اتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{أء}$ وأثرت القوتان ٧ ، ٣ نيوتن فى ب ، ء فى اتجاه مضاد للقوتين عند أ ، حـ عيِّن محصلة هذه المجموعة وبُعد نقطة تأثيرها عن أ

«ح = ٨ نيوتن ، أم = ٣٢ سم»

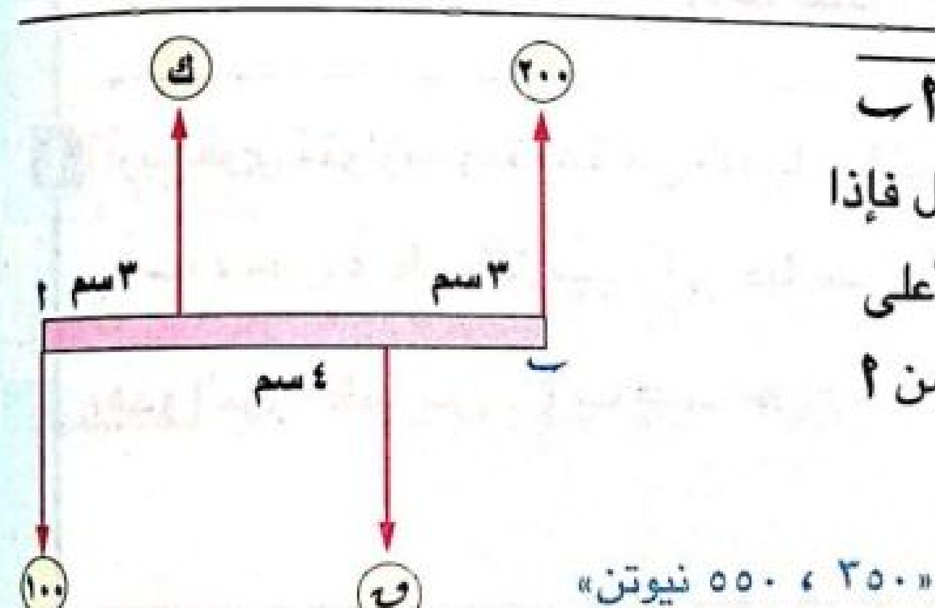
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٧ أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث :
أب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم ، حـ ء = ٨ سم ، ء هـ = ١٠ سم. أثرت خمس قوى مقاديرها ٦٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٤٠ ث. كجم فى النقط أ ، حـ ، ء ، ب ، هـ على الترتيب فى اتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{أء}$ وفى اتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{أهـ}$ بحيث كانت القوى الثلاث الأولى متحدة الاتجاه ، القوتان الأخريان فى الاتجاه المضاد. عيِّن محصلة المجموعة.

«ح = ٢٠ ث.كجم ، أ م = ١٢ سم حيث : م ∈ $\overleftrightarrow{أهـ}$ ، م ∉ $\overline{أهـ}$»

٨ إذا كانت حـ ، ء ، هـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث : أحـ : حـ ء : ء هـ : هـ ب = ١ : ٣ : ٥ : ٧ أثرت قوى متوازية وفى نفس الاتجاه ومتساوية فى المقدار فى النقط أ ، حـ ، ء ، هـ ، ب فى اتجاه عمودى على $\overline{أب}$ برهن أن خط عمل المحصلة تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٣ : ٥

٩ الشكل المقابل يوضح قضيب خفيف $\overline{أب}$ أثرت عليه القوى المتوازية الموضحة بالشكل فإذا كانت مقدار المحصلة ٣٠٠ نيوتن وتعمل لأعلى وتؤثر فى نقطة على القضيب تبعد ٤ سم من أ
أوجد : ق ، ك



«٢٥٠ ، ٥٥٠ نيوتن»

١٠ أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط ∈ مستقيم أفقى واحد ومرتبه فى اتجاه واحد بحيث :
أب = ٢ ب حـ = حـ ء = ٤ سم أثرت القوى المتوازية التى مقاديرها ٣ ، ٤ ، ٥ ، ق ثقل كجم عمودية على $\overline{أء}$ وعند النقط أ ، ب ، حـ ، ء وفى اتجاه واحد فإذا كانت المحصلة تؤثر عند م ∈ $\overline{أء}$ حيث : أ م = ٨ سم. أوجد قيمة ق ومحصلة هذه القوى.

«٢٥ ث.كجم ، ٣٧ ث.كجم»

١١ أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس نقط ∈ مستقيم واحد ومرتبه فى اتجاه واحد بحيث :
أب = ٢ ب حـ = حـ ء = ٢ ء هـ = ١٠ سم أثرت القوى ٦ ، ٢ ، ٣ ، ٨ ، ق نيوتن فى النقط بالترتيب بحيث كانت عمودية على $\overline{أهـ}$ وكانت القوتان ٦ ، ٨ فى اتجاه واحد والقوتان ٢ ، ٢ فى الاتجاه المضاد ، فإذا كانت محصلة هذه القوى تؤثر عند نقطة ن ∈ $\overline{أهـ}$ حيث أ ن = ٥ سم. فأوجد مقدار واتجاه كل من القوة $\overrightarrow{ق}$ ، المحصلة $\overrightarrow{ح}$

«ق = ٣,٦ نيوتن فى اتجاه القوتين ٢ ، ٣ ، ح = ٥,٤ نيوتن فى اتجاه القوتين ٦ ، ٨»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٢ ثلاث قوى متوازية مستوية مقاديرها ٨ ، ٧ ، ق ث.كجم تؤثر فى النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب من مستقيم معلوم حيث : أب = ١٢ سم ، حـ ∈ $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، حـ ∉ $\overline{\text{أب}}$ فإذا كانت القوتان الأولى والثانية متضادتين فى الاتجاه وكانت محصلة القوى الثلاث معيارها ٤ ث.كجم فى اتجاه القوة الثانية وخط عملها يقطع $\overleftarrow{\text{أب}}$ فى نقطة ء حيث : أء = ٥٠ سم فأوجد مقدار ق وكذلك طول $\overline{\text{بحـ}}$ «ق = ٥ ثقل كجم ، بحـ = ١١,٢ سم»

١٣ أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس نقط فى مستقيم أفقى واحد ومرتبه فى اتجاه واحد بحيث :
أب = ١٢ سم ، بحـ = ٤ سم ، حـء = ٦ سم ، ءهـ = ٣ سم.
أثرت القوى ٤ ، ق ، ٨ نيوتن رأسيًا لأسفل عند النقط أ ، حـ ، هـ على الترتيب وأثرت القوتان ٧ ، ك رأسيًا لأعلى عند النقط ب ، ء على الترتيب. فإذا كانت محصلة القوى = ٧ نيوتن وتؤثر عند نقطة ن ∈ $\overline{\text{أهـ}}$ حيث : أن = ١٠ سم وتعمل رأسيًا لأسفل فأوجد قيمتى : ق ، ك «١٥ ، ١٣ نيوتن»

ثالثًا تمارين متنوعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ قوتين متوازيتين : $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ك $\overleftarrow{\text{ص}}$
، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ = −٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٨ $\overleftarrow{\text{ص}}$ فإن الثابت ك = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{1}{4}$٤ (جـ) −٤ (د) −٢

(٢) من بين مجموعات القوى التالية توجد قوتان متوازيتان وتعملان فى اتجاهين متضادين هما ....

(أ) $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$

(ب) $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ = −٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ = ٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$

(د) $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ = −٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$

(٣) إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ // $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ وفى اتجاهين متضادين فإن : $\overleftarrow{\text{ح}}$ = ...

(أ) $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ − $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ (ب) $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ + $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ × $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ (د) $\overleftarrow{\text{ق}_1}$. $\overleftarrow{\text{ق}_2}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ إذا كان : $\overrightarrow{ق_١} \,//\, \overrightarrow{ق_٢}$ وكانت محصلتهما القوة $\overrightarrow{ح}$ بحيث :

$\overrightarrow{ق_٢} = -٩\overrightarrow{س} + ١٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ح} = -٢\overrightarrow{ق_١}$ فإن : $\overrightarrow{ق_١} =$ ....

(أ) $-١٥\overrightarrow{س} + ٢٠\overrightarrow{ص}$ (ب) $-٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$

(جـ) $٣\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص}$ (د) $١٥\overrightarrow{س} - ٢٠\overrightarrow{ص}$

⑤ إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١} \,//\, \overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_١} = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\|\overrightarrow{ق_٢}\| = ٤\sqrt{٥}$ وحدة

فإن : $\overrightarrow{ق_٢} =$ ....

(I) $٤\overrightarrow{س} - ٨\overrightarrow{ص}$ (II) $-٤\overrightarrow{س} + ٨\overrightarrow{ص}$ (III) $٢\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص}$

(أ) I فقط (ب) III فقط

(جـ) I ، II فقط (د) II ، III فقط

⑥ إذا كان مقدارا قوتان متوازيتان تعملان في نفس الاتجاه هما $\frac{س}{ص}$ ، $\frac{ص}{س}$ نيوتن ومحصلتهما ٢ نيوتن فإن ....

(أ) $س = ص$ (ب) $س = ٢ص$

(جـ) $ص = ٢س$ (د) $س = \frac{١}{٢}ص$

⑦ قوتان $ق_١$ ، $ق_٢$ متوازيتان وتعملان في نفس الاتجاه إذا بدلت مكانيهما فإن محصلتهما لا تغير مكانها فإن ....

(أ) $ق_١ = ق_٢$ (ب) $ق_١ = ٢ق_٢$

(جـ) $٢ق_١ = ق_٢$ (د) $ق_١ = \frac{١}{٢}ق_٢$

⑧ في الشكل المقابل :

نقطة تأثير محصلة القوى تنتمي إلى ....

(أ) $\overline{أجـ}$ (ب) $\overline{جـء}$

(جـ) $\overline{ءهـ}$ (د) $\overline{هـب}$

⑨ $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ قوتان متوازيتان البعد بين خطي عمليهما = ١٠ سم وكان خط عمل محصلتهما يبعد عن خط عمل $\overrightarrow{ق_١}$ بمقدار ١٢ سم فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ في نفس الاتجاه. (ب) $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ متضادان في الاتجاه.

(جـ) $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} - \overrightarrow{ق_٢}$ (د) $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢}$

(١٠) إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان بحيث ٣ $\overleftarrow{ق_١}$ = ٢ $\overleftarrow{ق_٢}$ ومحصلتهما تبعد عن $\overleftarrow{ق_١}$ مسافة ١٥ سم فإن بعد المحصلة عن $\overleftarrow{ق_٢}$ = ... سم.

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٢٥

(١١) إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ قوتان تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث ٢ $\overleftarrow{ق_١}$ = −٣ $\overleftarrow{ق_٢}$ ومحصلتهما تؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ فإن : ....

(أ) أحـ : حـب = ٢ : ١ (ب) أحـ : أب = ٢ : ٣

(جـ) بحـ : أحـ = ٣ : ٢ (د) بحـ : أب = ٣ : ٢

(١٢) قوتان متوازيتان فى اتجاه واحد مقداراهما ق ، ٣ ق وتؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب فإذا بدلت القوتان مكانيهما فإن محصلتهما تتحرك مسافة ....

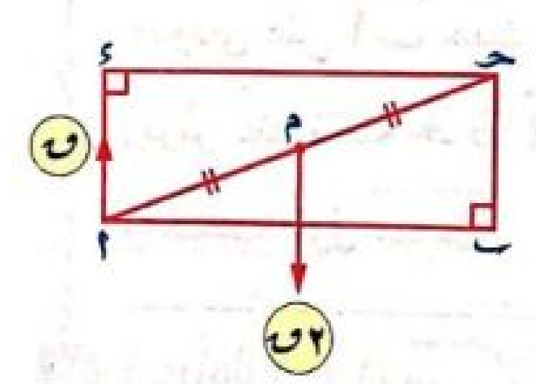
(أ) $\frac{٣}{٤}$ أب (ب) $\frac{١}{٢}$ أب (جـ) $\frac{١}{٣}$ أب (د) $\frac{١}{٤}$ أب

(١٣) إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ // $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $ق_١ > ق_٢$ وكان مقدار محصلتهما = ح إذا كانتا فى اتجاهين متضادين ومقدار محصلتهما = ٥ ح إذا كان لهم نفس الاتجاه

فإن : $ق_١$ = ... $ق_٢$

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{٧}{٣}$

(١٤) فى الشكل المقابل :



أبحـء مستطيل أثرت القوتان المتوازيتان التى مقدارهما ق ، ٢ ق

فإن خط عمل المحصلة هو ....

(أ) $\overleftrightarrow{أء}$ (ب) $\overleftrightarrow{بحـ}$

(جـ) $\overleftrightarrow{أحـ}$ (د) $\overleftarrow{حـء}$

(١٥) إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ = −٢ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى أ (−٢ ، ٠) ، $\overleftarrow{ق_٢}$ // $\overleftarrow{ق_١}$ حيث $\overleftarrow{ح}$ = ٦ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى حـ (٦ ، ٠) فإن نقطة تقاطع خط عمل $\overleftarrow{ق_٢}$ مع $\overleftrightarrow{أحـ}$ هى ....

(أ) (٤ ، ٠) (ب) (٨ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (٠ ، ٠)

(١٦) قوتان متوازيتان فى اتجاه واحد مقداراهما ٣ نيوتن ، ٢ نيوتن تؤثران فى أ ، ب على الترتيب بحيث كان : أب = ٥ وحدة طول وانتقلت القوة ٣ فى الاتجاه $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ثلاث وحدات طول وانتقلت القوة ٢ فى الاتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ وحدتين طول فإن مقدار المحصلة ينتقل فى اتجاه .... مسافة .... وحدة طول.

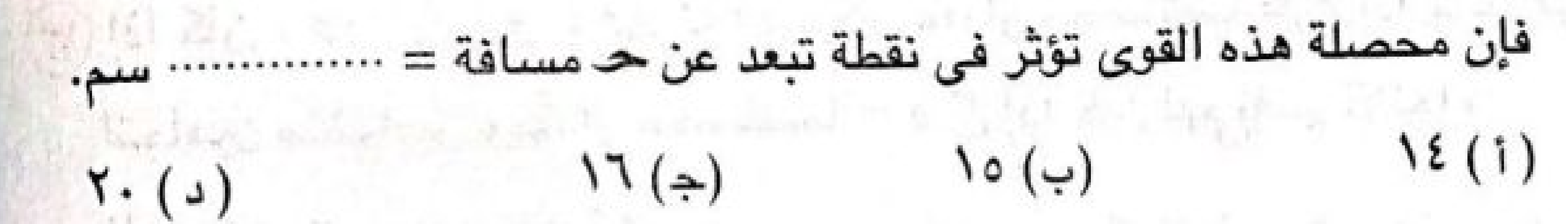
(أ) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، ١ (ب) $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، ١ (جـ) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، ٢ (د) $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، ٢

(١٧) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ

القوى ق ، ق ، ٥ ق ، ٣ ق قوى متوازية وفى اتجاه واحد تقع خطوط عملها فى مستوى المثلث

فإذا كان طول المتوسط $\overline{\text{حـ ء}}$ = ٣٠ سم



فإن محصلة هذه القوى تؤثر فى نقطة تبعد عن حـ مسافة = ... سم.

(أ) ١٤ (ب) ١٥ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

---

(٢) (دور أول ٢٠١٠) قوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تؤثران عند النقطتين أ ، ب على الترتيب فى اتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ ب = ٣٠ سم وكانت محصلتهما $\overleftarrow{ح}$ = − ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$ وتؤثر عند نقطة حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ فإذا علمت أن $\overleftarrow{ق_٢}$ = − ٦ $\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$ فعيِّن $\overleftarrow{ق_١}$ واحسب طول $\overline{\text{ب حـ}}$

«$\overleftarrow{ق_١}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$ ، ب حـ = ٣٠ سم»

---

(٣) (دور أول ١٩٩٣) $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان فى اتجاهى محورى الإحداثيات $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ والقوتان $\overleftarrow{ق_١}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + أ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = − ٦ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ متوازيتان. عيِّن قيمة أ وإذا أثرت القوتان فى النقطتين (١ ، ٠) ، (٥ ، ٠) على الترتيب. فأوجد نقطة تقاطع خط عمل محصلتهما مع $\overleftarrow{\text{و س}}$

«−١ ، (٧ ، ٠)»

---

(٤) تؤثر القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = −٩ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ فى النقطتين أ (−١ ، ٠) ، ب (١ ، ٢) على الترتيب.

أوجد محصلة القوتين وعين نقطة تقاطع خط عملها مع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

«−٦ $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، (٢ ، ٣)»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥ إذا كانت القوتان $\overrightarrow{ق_١} = -٢ \overrightarrow{س} + ك \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٨ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}$ متوازيتين.
عيِّن قيمة ك وإذا أثرت $\overrightarrow{ق_١}$ فى النقطة (– ٢ ، ٠) وأثرت $\overrightarrow{ق_٢}$ فى النقطة (٤ ، ٠) عيِّن نقطة تقاطع خط عمل محصلتهما مع محور السينات وأوجد معادلة خط عمل المحصلة.

«١ ، (٦ ، ٠) ، س + ٢ ص – ٦ = ٠»

---

٦ تؤثر القوتان المتوازيتان $\overrightarrow{ق_١} = ٢ \overrightarrow{س} - ٣ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ فى النقطتين أ (١ ، ٣) ، ب (٤ ، ٩) على الترتيب فإذا كانت محصلة القوتين تؤثر فى نقطة حـ (٣ ، ٧)
فأوجد : $\overrightarrow{ق_٢}$

«$٤ \overrightarrow{س} - ٦ \overrightarrow{ص}$»

---

٧ قوتان متوازيتان تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث : أب = ٢٠ سم ، فإذا كانت $\overrightarrow{ق_١} = ٦ \overrightarrow{س} + ٨ \overrightarrow{ص}$ وتؤثر فى أ وكانت ح = ٥ نيوتن وتؤثر فى نقطة حـ ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$
فأوجد كلاً من : $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ح}$ ، وطول أحـ فى كل حالة.

«$\overrightarrow{ق_٢} = -٣ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ح} = ٣ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص}$ ، أحـ = ٢٠ سم
أ، $\overrightarrow{ق_٢} = -٩ \overrightarrow{س} - ١٢ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ح} = -٣ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}$ ، أحـ = ٦٠ سم»

---

٨ أثرت القوى المتوازية $\overrightarrow{ق_١} = -٢ \overrightarrow{س} + ٦ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = \overrightarrow{س} - ٣ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = ٥ \overrightarrow{س} - ١٥ \overrightarrow{ص}$ فى النقط : أ (٢ ، ٣) ، ب (–٣ ، ١) ، حـ (–١ ، ٢) على الترتيب. أوجد معادلة خط عمل محصلة هذه القوى.

«١٢ س + ٤ ص + ٣١ = ٠»

---

٩ أثرت القوى المتوازية $\overrightarrow{ق_١} = \overrightarrow{س} + م \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٣ \overrightarrow{س} - ١٥ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = ن \overrightarrow{س} + ١٠ \overrightarrow{ص}$ عند النقط أ (٣ ، ١) ، ب (٣ ، ٠) ، حـ (٣ ، ٥) على الترتيب. أوجد قيمتى م ، ن ، معادلة خط عمل محصلة هذه القوى.

«–٥ ، –٢ ، ١٠ س + ٢ ص – ٢١ = ٠»

---

١٠ تؤثر القوى المتوازية التى مقاديرها ٥ ، ٨ ، ١٢ نيوتن فى اتجاه واحد فى النقط أ (٢ ، –٢) ، ب (٠ ، ٣) ، حـ (٤ ، –١) على الترتيب.
أوجد نقطة تأثير محصلة هذه القوى.

«$\left(\frac{٥٨}{٢٥} ، \frac{٢}{٢٥}\right)$»

١١ أ ب حـ مثلث أثرت فى رؤوسه ثلاث قوى متوازية ومتساوية فى المقدار ومتحدة الاتجاه. أثبت أن خط عمل محصلتها يمر بنقطة تقاطع متوسطات المثلث.

١٢ أ ب حـ ء مربع تؤثر فى رؤوسه أ ، ب ، حـ ، ء أربع قوى متساوية ومتوازية وفى اتجاه واحد. أثبت أن محصلة هذه القوى الأربع تمر بنقطة تقاطع قطرى المربع.

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{ق_1} // \overrightarrow{ق_2}$ وتؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ومحصلتهما $\overrightarrow{ح}$ تؤثر فى النقطة م $\in \overleftrightarrow{أب}$

أولاً : إذا كان : $ح > ق_2 > ق_1$ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) $ح > 2\,ق_1$ (ب) أ م = أ ب − ب م

(جـ) $ح = ق_1 + ق_2$ (د) $\frac{ق_2}{ق_1} = \frac{ب م}{أ م}$

ثانيًا : إذا كان : $ق_1 > ق_2 > ح$ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أ م < ب م (ب) أ ب = ب م − أ م

(جـ) $ق_1 < 2\,ق_2$ (د) $ق_1 = ح + ق_2$

ثالثًا : إذا كان : $ق_1 > ق_2$ ، $ق_2 = ح$ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) $ح = \frac{1}{2}\,ق_1$ (ب) $ح = ق_1 - ق_2$

(جـ) ب م = ٢ أ ب (د) أ م = م ب

رابعًا : إذا كان : $ق_1 > ح > ق_2$ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) $\overrightarrow{ح}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ فى اتجاهين متضادين (ب) $ح = ق_1 - ق_2$

(جـ) $ق_1 < 2\,ق_2$ (د) م $\in \overleftarrow{أب}$

(٢) فى الشكل المرسوم قوتان متوازيتان مقدارهما

١٥ ، ق نيوتن تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب

ومحصلتيهما تؤثر فى النقطة حـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث كان

أحـ = ٤٠ سم ، حـب = س سم فإذا كانت ق بالنيوتن ∈ [١٠ ، ٢٠]

فإن : س بالسنتيمترات ∈ ....

(أ) [٣٠ ، ٦٠] (ب) [٦٠ ، ٩٠]

(جـ) [٢٠ ، ٤٠] (د) [٤٠ ، ٨٠]

١٤ ن من القوى المستوية المتوازية المتساوية مقدار كل منها = ق تؤثر فى اتجاه يوازى المحور الصادى وهى بالتتالى متضادة الاتجاه وتؤثر أولها فى الاتجاه الموجب للمحور الصادى وعلى بُعد منه = ٢ سم وكان البُعد بين كل قوة والتالية لها = ٢ سم . فإذا كانت ن عددًا فرديًا. فأثبت أن المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول نقطة الأصل يساوى (ن + ١) × ق

١٥ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم مركزه م ، $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى مستوى الشكل ويوازى $\overrightarrow{حـ أ}$ أثرت القوى ١٦ $\overrightarrow{ى}$ ، −٦ $\overrightarrow{ى}$ ، −٨ $\overrightarrow{ى}$ ، ٣٠ $\overrightarrow{ى}$ ، −١٨ $\overrightarrow{ى}$ فى أ ، ب ، م ، ء ، هـ على الترتيب. أثبت أن محصلة هذه القوى = ١٤ $\overrightarrow{ى}$ وتؤثر فى نقطة على $\overline{ب هـ}$ وتبعد عن م مسافة تساوى $\frac{٥}{١٤}$ ل حيث ل طول ضلع السداسى.





الدرس **2**

اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

إذا أثرت مجموعة من القوى المتوازية فى جسم متماسك وظل هذا الجسم ساكنًا فإنه يُقال أن هذا الجسم متزن تحت تأثير هذه القوى كما يُقال أن مجموعة القوى المؤثرة على الجسم متوازنة.

قاعدة **(شروط توازن عدة قوى متوازية مستوية)**

إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

(١) مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) يساوى صفرًا.

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أية نقطة فى مستويها = صفرًا.

والشرط الأول يعنى أن محصلة هذه القوى تنعدم وبالتالى فلا يحدث فى الجسم حركة انتقالية.
والشرط الثانى يعنى أن مجموعة هذه القوى لا تحدث حركة دورانية فى الجسم.
وكما نعلم فإننا فى حالة القوى المتلاقية فى نقطة فإن الشرط الأول يكون كافٍ وحده لحدوث الاتزان.
أما بالنسبة للقوى غير المتلاقية فى نقطة فإن الأمر يتطلب توفر الشرط الثانى أيضاً حتى نضمن عدم حدوث حركة دورانية فى الجسم.

مثال (١)

يرتكز قضيب منتظم وزنه ٥ ثقل كجم فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه والبُعد بينهما ٨٠ سم ، علقت كتلة مقدارها ١٢ كجم فى نقطة تبعد عن أحد الحاملين بمقدار ٣٠ سم.
أوجد مقدار الضغط على كل من الحاملين.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل

القضيب متزن بتأثير ٤ قوى متوازية مستوية هى :

ر$_1$ رد فعل الحامل عند أ ، ر$_2$ رد فعل الحامل عند ب

، ووزن القضيب ٥ ثقل كجم عند حـ منتصف $\overline{أب}$

، والثقل المعلق ١٢ ثقل كجم عند ء حيث أء = ٣٠ سم



فحسب شروط التوازن يكون :



(١) مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرًا

∴ ر$_1$ + ر$_2$ − ٥ − ١٢ = ٠   ∴ ر$_1$ + ر$_2$ = ١٧   (١)

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ = صفرًا

∴ ١٢ × أء + ٥ × أحـ − ر$_2$ × أب = ٠

أى : ١٢ × ٣٠ + ٥ × ٤٠ − ر$_2$ × ٨٠ = ٠

∴ ٨٠ ر$_2$ = ٣٦٠ + ٢٠٠ = ٥٦٠

∴ ر$_2$ (رد فعل الحامل عند ب) = ٧ ثقل كجم وهو يساوى الضغط على الحامل عند ب

وبالتعويض فى (١) :

∴ ر$_1$ (رد فعل الحامل عند أ) = ١٧ − ٧ = ١٠ ثقل كجم

وهو يساوى الضغط على الحامل عند أ

ملاحظة

من الممكن الحصول على ر$_1$ ، ر$_2$ بإيجاد مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى مرة حول أ فنحصل على ر$_2$ كما سبق ثم بإيجاد مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى مرة أخرى حول ب فنحصل على ر$_1$ إذ نجد أن :

مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ب = ر$_1$ × ٨٠ − ١٢ × ٥٠ − ٥ × ٤٠ = صفرًا

أى : ٨٠ ر$_1$ = ٨٠٠

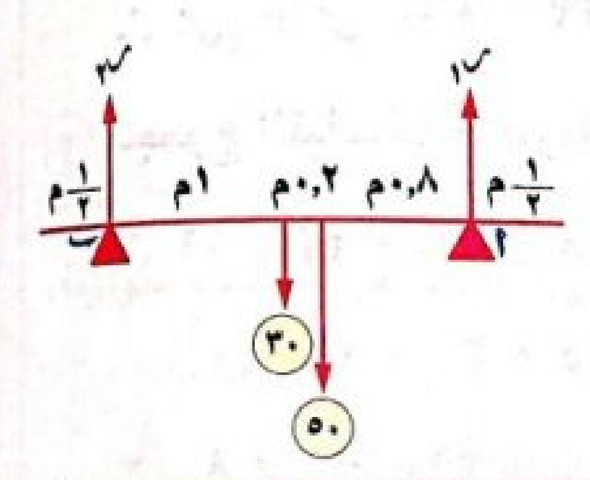
∴ ر$_1$ = ١٠ ثقل كجم وتكون ر$_2$ = ٧ ثقل كجم.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٢

رجلان أ ، ب يحملان لوحًا منتظمًا من الخشب طوله ٣ متر ووزنه ١٠ ث.كجم لكل متر من طوله يحمل صندوقًا وزنه ٥٠ ث.كجم كما بالشكل المقابل.
أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم عيِّن على اللوح موضع كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطان.

الحـل



∵ اللوح منتظم فإن وزنه يؤثر فى منتصفه
وزن اللوح = ١٠ × ٣ = ٣٠ ث.كجم

، من شروط الاتزان نجد أن :

$ر_١ + ر_٢$ = ٥٠ + ٣٠ = ٨٠ (١)

، $جـ_أ$ = صفر

∴ ٥٠ × ٠,٨ + ٣٠ × ١ − $ر_٢$ × ٢ = صفر

∴ $ر_٢$ = ٣٥ ث.كجم ∴ الضغط على كتف الرجل (ب) = ٣٥ ث.كجم

وبالتعويض فى (١) : ∴ $ر_١$ = ٨٠ − ٣٥ = ٤٥ ث.كجم

∴ الضغط على كتف الرجل (أ) = ٤٥ ث.كجم

ونفرض أن موضع كتف الرجل (ب) يبعد س سم عن موضع كتف الرجل (أ) فى الحالة التى يتساوى فيها الضغطان أى : $ر_١ = ر_٢ = \frac{٨٠}{٢}$ = ٤٠ ث.كجم

، ∵ $جـ_أ$ = ٠

∴ ٥٠ × ٠,٨ + ٣٠ × ١ − ٤٠ × س = ٠ ∴ س = ١,٧٥ متر

أى أن : الرجل (ب) يتحرك $\frac{١}{٤}$ متر ناحية الرجل (أ) حتى يتساوى الضغطان.

لاحظ أن

رد فعل كتف الرجل على اللوح يساوى ضغط اللوح على كتف الرجل.

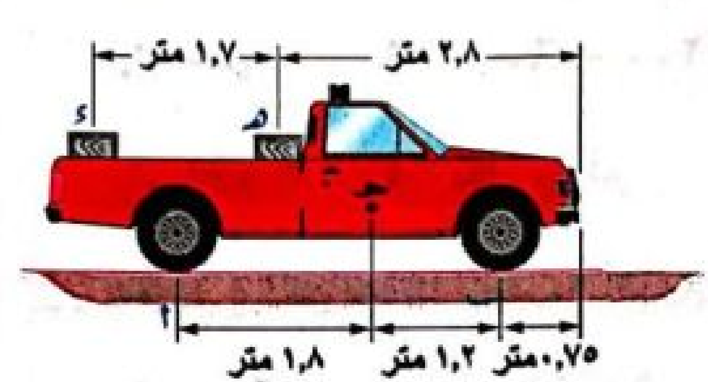
ملاحظة

فى المثال السابق كلما اقترب الصندوق من كتف الرجل (أ) كلما زاد الضغط على كتفه وبالتالى زاد رد الفعل عنده وقل الضغط على كتف الرجل (ب) وبالتالى يقل رد الفعل عنده.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ③

الشكل المقابل يوضح عربة نصف نقل كتلتها ١٢٠٠ كجم ووزنها يؤثر فى الخط الرأسى المار بالنقطة (حـ) ووضع بصندوق العربة صندوقان كتلة كل منهما ٣٠٠ كجم فى الأوضاع المبينة بالشكل. أوجد رد فعل الأرض على كل من العجلتين.



الحــل

من شروط الاتزان نجد أن :

$ر_1 + ر_2 = ١٢٠٠ + ٣٠٠ + ٣٠٠ = ١٨٠٠$ ث.كجم (١)

، ∵ $ج_ب$ = صفر

∴ $١٢٠٠ \times ١,٢ + ٣٠٠ \times ٢,٠٥ + ٣٠٠ \times ٣,٧٥ - ر_2 \times ٣ = ٠$

∴ $ر_2 = ١٠٦٠$ ث.كجم

أى أن : رد فعل الأرض على العجلة الخلفية = ١٠٦٠ ث.كم

وبالتعويض فى (١) : ∴ $ر_1 = ٧٤٠$ ث.كجم

أى أن : رد فعل الأرض على العجلة الأمامية = ٧٤٠ ث.كجم.

مثال ④

قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ٤٠ سم ووزنه ٦٠٠ ثقل جرام ، علق فى طرفيه أ ، ب جسمان كتلتاهما ٦٠٠ ، ١٢٠٠ جرام على الترتيب فمن أى نقطة على القضيب يجب تعليقه حتى يتزن أفقيًا ؟

الحــل

نفرض أن نقطة التعليق هى حـ فيكون القضيب متزنًا بتأثير أربع قوى متوازية مستوية هى : وزنه ٦٠٠ ثقل جرام ويؤثر فى م منتصف $\overline{أب}$ ، الثقلين ٦٠٠ ، ١٢٠٠ ثقل جرام المعلقين عند أ ، ب ، الشد فى خيط التعليق عند حـ وليكن ش

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

فحسب شروط التوازن يكون :

① مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرًا

∴ ش − ٦٠٠ − ٦٠٠ − ١٢٠٠ = ٠

∴ ش = ٢٤٠٠ ثقل جرام

② مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ = صفرًا

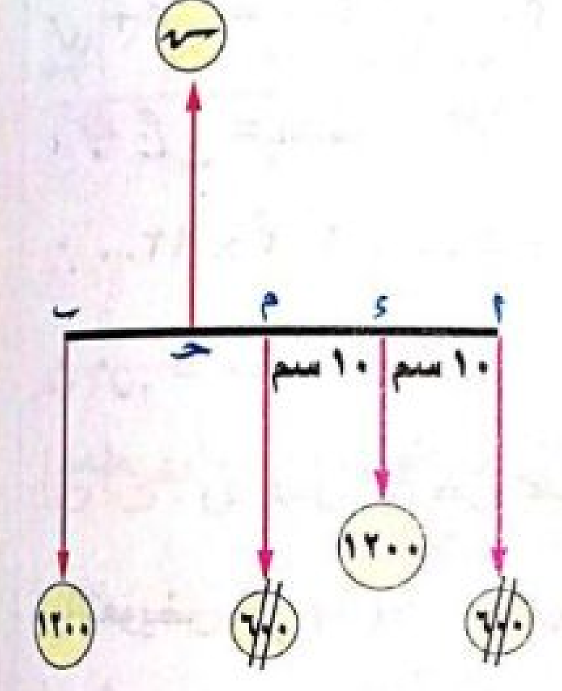
∴ ٦٠٠ × أم + ١٢٠٠ × أب − ش × أحـ = ٠

أى : ٦٠٠ × ٢٠ + ١٢٠٠ × ٤٠ − ٢٤٠٠ أحـ = ٠

∴ ٢٤٠٠ أحـ = ١٢٠٠٠ + ٤٨٠٠٠ = ٦٠٠٠٠

∴ أحـ = ٢٥ سم

أى أن : نقطة التعليق تبعد عن الطرف أ بمقدار ٢٥ سم



حل آخر :

∵ محصلة القوتين ٦٠٠ ، ٦٠٠ هى ١٢٠٠

تؤثر فى النقطة ء منتصف $\overline{\text{أم}}$

وكذلك القوتين ١٢٠٠ ، ١٢٠٠

تؤثر فى النقطة حـ منتصف $\overline{\text{ءب}}$

∴ بُعد الشد عن أ = ٢٥ سم.

مثال ⑤

ساق من الحديد طولها ١٢٠ سم ووزنها ٩ ث.كجم يؤثر فى منتصفها ، ترتكز فى وضع أفقى على حاملين البُعد بينهما ٧٢ سم فإذا كان مقدار الضغط على أحد الحاملين ضعف مقدار الضغط على الحامل الآخر. فأوجد بُعد كل من الحاملين عن طرفى الساق.

الحــل

بفرض أن مقدار رد فعل الحامل الأول = ر

وأن الحامل الأول يبعد مسافة س سم عن نقطة منتصف الساق م

∴ مقدار رد فعل الحامل الثانى = ٢ ر

ويبعد الحامل الثانى مسافة (٧٢ − س) سم عن نقطة منتصف الساق

، ∵ الساق متزن تحت تأثير القوى التى مقاديرها ر ، ٢ ر ، ٩ ث.كجم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ $ر + ٢ ر = ٩$ ∴ $٣ ر = ٩$ ∴ $ر = ٣$ ث.كجم

، ∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول م = صفر

∴ ٣ × س − ٦ × (٧٢ − س) = صفر ∴ س = ٢ (٧٢ − س)

∴ س = ١٤٤ − ٢ س ∴ ٣ س = ١٤٤

∴ س = ٤٨ سم ∴ م حـ = ٤٨ سم ، م ء = ٧٢ − ٤٨ = ٢٤ سم

∴ بُعد الحامل الأول عن الطرف أ = ٦٠ − ٤٨ = ١٢ سم

، بُعد الحامل الثانى عن الطرف ب = ٦٠ − ٢٤ = ٣٦ سم

ملاحظة

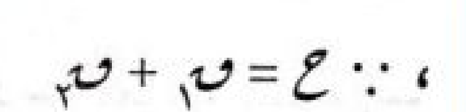
إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير ثلاث قوى متوازية مستوية فإن كل قوة من القوى الثلاثة تساوى فى المقدار وتضاد فى الاتجاه محصلة القوتين الأخريين ويكون لهما نفس خط العمل.

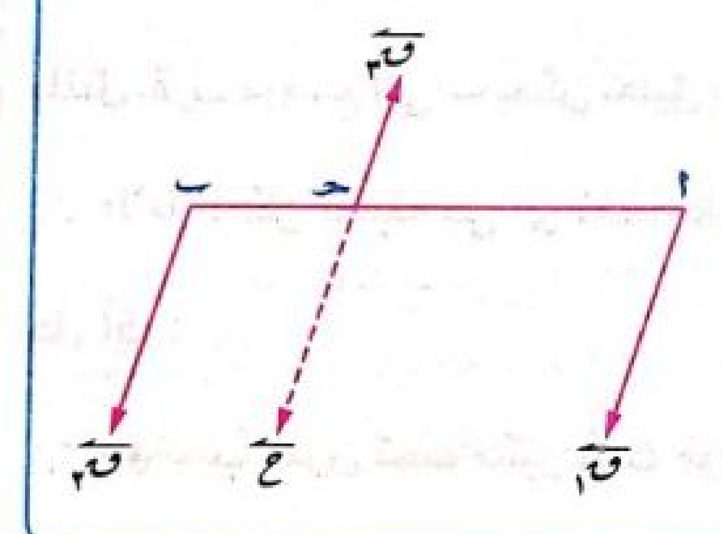
فإذا أثرت القوى $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ ، $\overline{ق_٣}$ المتوازية المستوية فى النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب من جسم متماسك فاتزن الجسم وكانت $\overline{ح}$ هى محصلة القوتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ فإن :

$\overline{ق_٣}$ ، $\overline{ح}$ متساويتان فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه وخط عملهما واحد

، ∵ $ح = ق_١ + ق_٢$

∴ $ق_٣ = ق_١ + ق_٢$





، ∵ حـ نقطة تأثير المحصلة

∴ $ق_١ \times أحـ = ق_٢ \times بحـ$

مثال ٦

$\overline{أب}$ قضيب خفيف طوله ٤٠ سم معلق من طرفيه أ ، ب بخيطين رأسيين لا يتحمل أى منها شد يزيد عن ٣٥ نيوتن فعيِّن المواضع من القضيب الذى يمكن تعليق ثقل قدره ٥٠ نيوتن منها دون أن ينقطع الخيط.

الحل

بفرض أن أقرب نقطة إلى نقطة أ يمكن تعليق الثقل منها دون أن ينقطع الخيط عند أ هى حـ

، بفرض أن : أحـ = س سم ∴ ب حـ = ٤٠ − س سم

∴ الشد عند أ أكبر ما يمكن ∴ ش١ = ٣٥ نيوتن

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها ٣٥ ، ٥٠ ، ش٢ نيوتن

وباستخدام الملاحظة السابقة

∴ ٣٥ + ش٢ = ٥٠ ∴ ش٢ = ١٥ نيوتن

، ش١ × أحـ = ش٢ × ب حـ ∴ ٣٥ × س = ١٥ (٤٠ − س)

∴ ٧ س = ٣ (٤٠ − س) ∴ ٧ س = ١٢٠ − ٣ س

∴ ١٠ س = ١٢٠ ∴ س = ١٢ سم

∴ أقرب موضع إلى أ يمكن تعليق الثقل منه دون انقطاع الخيط عند أ يبعد ١٢ سم عن أ

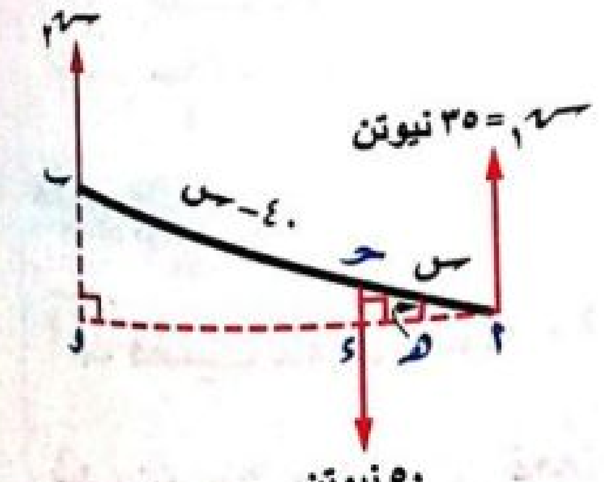
بالمثل أقرب موضع إلى ب يمكن تعليق الثقل منه دون انقطاع الخيط عند ب يبعد ١٢ سم عن ب

∴ الثقل يمكن تعليقه فى أى نقطة على القضيب لا يقل بُعدها عن ١٢ سم عن أ أو ب

حل آخر :

∵ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها ٣٥ ، ٥٠ ، ش٢ نيوتن

∴ ٣٥ + ش٢ = ٥٠ ∴ ش٢ = ١٥ نيوتن



، ∵ جـأ = صفر ∴ ٥٠ × أ ء − ١٥ × أ و = صفر

∴ ٥٠ × س جتا هـ − ١٥ × ٤٠ جتا هـ = ٠

∴ ٥٠ س = ٦٠٠ ∴ س = ١٢ سم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل ثالث :

$\because$ ش$_1$ + ش$_2$ = ٥٠ ، $\because$ أى من الخيطين لا يتحمل شدًا يزيد عن ٣٥ نيوتن

$\therefore$ أقل شد فى الخيط الأخر = ٥٠ − ٣٥ = ١٥ نيوتن

$\therefore$ ١٥ ≥ الشد فى أى خيط ≥ ٣٥

، $\because$ ج$_1$ = صفر $\therefore$ ش$_2$ × ٤٠ = ٥٠ × س

$\therefore$ ش$_2$ = $\frac{٥٠ س}{٤٠}$ = $\frac{٥ س}{٤}$ $\therefore$ ١٥ ≥ $\frac{٥ س}{٤}$ ≥ ٣٥ $\therefore$ ١٢ ≥ س ≥ ٢٨

أى أن : الثقل يمكن أن يعلق على بُعد بين ١٢ سم ، ٢٨ سم من أ أو عندهما.

ملاحظة

إذا ارتكز قضيب $\overline{\text{أب}}$ مقدار وزنه و على حاملين عند نقطتين حـ ، ء منه وعلق ثقل مقداره و$_1$ من أحد طرفيه وليكن أ

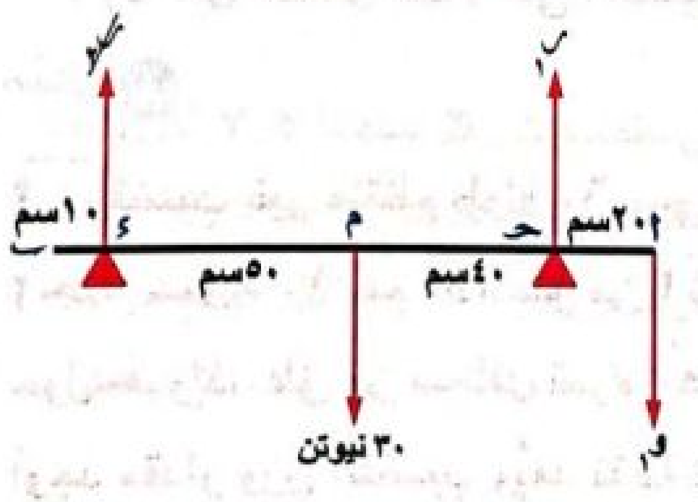
وذكر أن : الثقل المعلق من أ أكبر ثقل يجعل القضيب متزنًا أو يجعل القضيب على وشك الدوران أو الانقلاب حول حـ أو يجعل القضيب على وشك الانفصال عن الحامل ء فهذا يعنى أن : مقدار رد فعل القضيب عند ء = صفر

أى أن : ر$_2$ = صفر

مثال ٧

$\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ومقدار وزنه ٣٠ نيوتن يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند نقطتين حـ ، ء منه بحيث : أحـ = ٢٠ سم ، ب ء = ١٠ سم فأوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من أ ، ب كل على حدة دون أن يختل توازن القضيب وأوجد مقدار رد الفعل على القضيب فى كل حالة.

الحـــل



• **الحالة الأولى (أكبر ثقل معلق عند أ) :**

بفرض أن مقدار أكبر ثقل معلق عند أ ويجعل الجسم متزن = و$_1$

$\therefore$ مقدار رد الفعل عند ء = صفر أى أن : ر$_2$ = ٠

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها و$_1$ ، ر$_1$ ، ٣٠ نيوتن

∴ ر$_1$ = و$_1$ + ٣٠ (١)

، و$_1$ × أ حـ = ٣٠ × م حـ

∴ و$_1$ × ٢٠ = ٣٠ × ٤٠

∴ و$_1$ = $\frac{٣٠ \times ٤٠}{٢٠}$ = ٦٠ نيوتن

لاحظ أن

$\frac{و_1}{٤٠} = \frac{٣٠}{٢٠} = \frac{ر_1}{٦٠}$

∴ و$_1$ = ٦٠ نيوتن ، ر$_1$ = ٩٠ نيوتن.

وبالتعويض فى (١) : ∴ ر$_1$ = ٦٠ + ٣٠ = ٩٠ نيوتن

∴ مقدار أكبر ثقل يمكن تعليقه عند أ دون أن يختل توازن القضيب = ٦٠ نيوتن

، رد فعل الحامل عند حـ على القضيب = ٩٠ نيوتن.



- **الحالة الثانية (أكبر ثقل معلق عند ب) :**

بفرض أن مقدار أكبر ثقل معلق عند ب

ويجعل الجسم متزن = و$_2$

∴ مقدار رد الفعل عند حـ = صفر

أى أن : ر$_1$ = ٠

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها و$_2$ ، ر$_2$ ، ٣٠ نيوتن

∴ ر$_2$ = ٣٠ + و$_2$ (٢)

، و$_2$ × ب ء = ٣٠ × م ء

∴ و$_2$ × ١٠ = ٣٠ × ٥٠

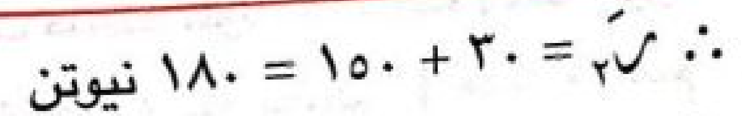
∴ و$_2$ = $\frac{٣٠ \times ٥٠}{١٠}$ = ١٥٠ نيوتن

لاحظ أن

$\frac{٣٠}{١٠} = \frac{و_2}{٥٠} = \frac{ر_2}{٦٠}$

∴ و$_2$ = ١٥٠ نيوتن ، ر$_2$ = ١٨٠ نيوتن.

وبالتعويض فى (٢) :



∴ ر$_2$ = ٣٠ + ١٥٠ = ١٨٠ نيوتن

∴ مقدار أكبر ثقل يمكن تعليقه من ب دون أن يختل توازن القضيب = ١٥٠ نيوتن

، رد فعل الحامل عند ء على القضيب = ١٨٠ نيوتن.

مثال ٨

أب قضيب غير منتظم طوله ٦٠ سم يرتكز فى وضع أفقى على وتدين حـ ، ء حيث :
أ حـ = ب ء = ١٠ سم فإذا عُلق من أ ثقل قدره ٩٠ ثقل جرام يصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ وإذا علق من ب ثقل قدره ١٥٠ ثقل جرام يصبح القضيب على وشك الدوران حول ء
أوجد مقدار وزن القضيب وبُعد نقطة تأثيره عن الطرف أ

الحـل

بفرض أن مقدار وزن القضيب = و ث.جم

ويؤثر في نقطة م حيث : حـ م = س سم

- **عند تعليق الثقل ٩٠ ث.جم من أ :**

∵ القضيب على وشك الدوران حول حـ

∴ $ر_٢$ = صفر

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها $ر_١$ ، ٩٠ ، و ث.جم

∴ ٩٠ × أ حـ = و × س ∴ ٩٠ × ١٠ = و × س

∴ و س = ٩٠٠ (١)



- **عند تعليق الثقل ١٥٠ ث.جم من ب :**

∵ القضيب على وشك الدوران حول ء

∴ $ر_١'$ = صفر

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها

$ر_٢'$ ، و ، ١٥٠ ث.جم

∴ و × م ء = ١٥٠ × ب ء ∴ و (٤٠ − س) = ١٥٠ × ١٠

∴ ٤٠ و − و س = ١٥٠٠ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢) : ∴ ٤٠ و − ٩٠٠ = ١٥٠٠

∴ ٤٠ و = ٢٤٠٠ ∴ و = ٦٠ ث.جم

وبالتعويض في (١) : ∴ ٦٠ × س = ٩٠٠ ∴ س = ١٥ سم

∴ مقدار وزن القضيب = ٦٠ ث.جم

وبُعد نقطة تأثير وزنه عن أ = ١٥ + ١٠ = ٢٥ سم.

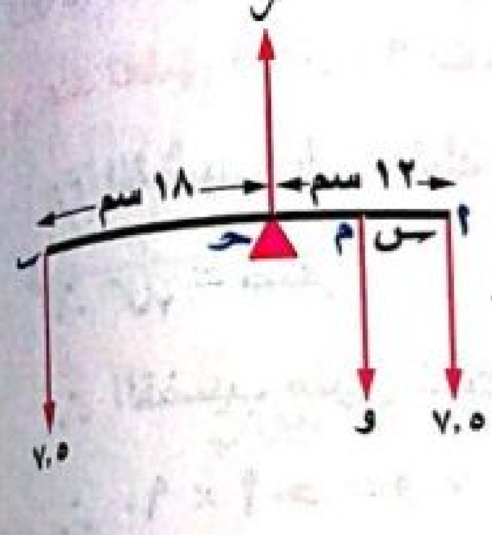
مثال ٩

ساق غير منتظمة أ ب طولها ٣٠ سم عُلق من طرفيها ثقلان متساويان كل منهما ٧,٥ ثقل كجم فاتزنت الساق في وضع أفقي عند ارتكازها على محور عند نقطة حـ حيث : أ حـ = ١٢ سم وعندما أُضيف إلى كلٍ من الثقلين المعلقين من الطرفين ثقلٌ آخر قدره ١٠,٥ ثقل كجم اتزنت الساق في وضع أفقي عند تعليقها من نقطة ء حيث : أ ء = ١٣ سم. أوجد وزن الساق وبُعد نقطة تأثير الوزن عن الطرف أ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل

نفرض أن وزن الساق = و ثقل كجم وأنه يؤثر فى نقطة م حيث أ م = س سم



فى الحالة الأولى : الساق متزنة بتأثير أربع قوى هى :

الثقلين ٧,٥ ، ٧,٥ ثقل كجم المعلقين عند الطرفين

ووزن الساق و عند م ، ورد فعل الحامل عند حـ وليكن ر

فحسب شروط التوازن يكون :

(١) مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرًا

∴ ر − و − ٧,٥ − ٧,٥ = ٠   **أى :** ر − و = ١٥   (١)

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول حـ = صفرًا

∴ −٧,٥ × أ حـ − و × م حـ + ٧,٥ × حـ ب = صفرًا

∴ −٧,٥ × ١٢ − و (١٢ − س) + ٧,٥ × ١٨ = ٠

∴ −٩٠ − و (١٢ − س) + ١٣٥ = ٠   **أى :** و (١٢ − س) = ٤٥   (٢)

فى الحالة الثانية : الساق متزنة بتأثير أربع قوى هى :

الثقلين ١٨ ، ١٨ ثقل كجم عند الطرفين ، وزن الساق و عند م

، الشد فى خيط التعليق عند ء وليكن ش

فحسب شروط التوازن يكون :

(١) مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرًا

∴ ش − ١٨ − و − ١٨ = ٠   **أى :** ش − و = ٣٦   (٣)

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ء = صفرًا

∴ −١٨ × أ ء − و × م ء + ١٨ × ب ء = صفرًا

∴ −١٨ × ١٣ − و (١٣ − س) + ١٨ × ١٧ = ٠

∴ −٢٣٤ − و (١٣ − س) + ٣٠٦ = ٠   **أى :** و (١٣ − س) = ٧٢   (٤)

من (٢) ، (٤) بالقسمة :

∴ $\frac{١٢ - س}{١٣ - س} = \frac{٤٥}{٧٢}$ ∴ $\frac{١٢ - س}{١٣ - س} = \frac{٥}{٨}$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ ٦٥ – ٥ س = ٩٦ – ٨ س   ∴ ٨ س – ٥ س = ٩٦ – ٦٥

∴ ٣ س = ٣١

∴ س (بُعد نقطة تأثير وزن الساق عن أ) = ١٠ $\frac{١}{٣}$ سم

وبالتعويض فى (٢) :

∴ و (١٢ – ١٠ $\frac{١}{٣}$) = ٤٥   ∴ $\frac{٥}{٣}$ و = ٤٥

∴ و (وزن الساق) = ٤٥ × $\frac{٣}{٥}$ = ٢٧ ثقل كجم

وإذا أريد الحصول على رد فعل الحامل عند حـ نعوض فى المعادلة (١)

وإذا أريد إيجاد الشد فى الخيط المعلق عند ء نعوض فى المعادلة (٣)

مثال ١٠

أب قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ٤ ثقل كجم يرتكز أفقيًا على حاملين أحدهما عند حـ حيث : أحـ = ٩ سم والثانى عند ء ، عُلق من طرفيه أ ، ب الثقلان ١٤ ، ٦ ثقل كجم على الترتيب.

أوجد موضع النقطة ء إذا كان الضغط على الحامل عند حـ ضعف الضغط على الحامل عند ء

أوجد أيضًا أكبر ثقل يُضاف إلى الثقل المعلق عند أ دون أن يختل توازن القضيب.

الحل

① ∵ الضغط على الحامل عند حـ ضعف الضغط على الحامل عند ء

∴ رد فعل الحامل عند حـ ضعف رد فعل الحامل عند ء

وبفرض أن رد فعل الحامل عند ء = ر

يكون رد فعل الحامل عند حـ = ٢ ر

ويكون القضيب متزنًا بتأثير خمس قوى متوازية هى :

الثقلين ١٤ ، ٦ ثقل كجم المعلقين عند الطرفين أ ، ب ، وزن القضيب ٤ ثقل كجم عند م منتصف أب ، ردى فعل الحاملين عند حـ ، ء وهما ٢ ر ، ر

∴ حسب شروط الاتزان يكون :

(١) المجموع الجبرى لقياسات القوى = صفر

∴ ٢ ر + ر – ١٤ – ٤ – ٦ = ٠   أى : ٣ ر = ٢٤   ∴ ر = ٨

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢) المجموع الجبرى لقياسات عزوم القوى حول ا = صفرًا

∴ ٤ × ا م + ٦ × ا ب − ٢ ر × ا حـ − ر × ا ء = صفرًا

∴ ٤ × ٢٠ + ٦ × ٤٠ − ٢ ر × ٩ − ر × ا ء = صفرًا

وبالتعويض عن ر = ٨ ∴ ٨٠ + ٢٤٠ − ١٤٤ − ٨ ا ء = ٠

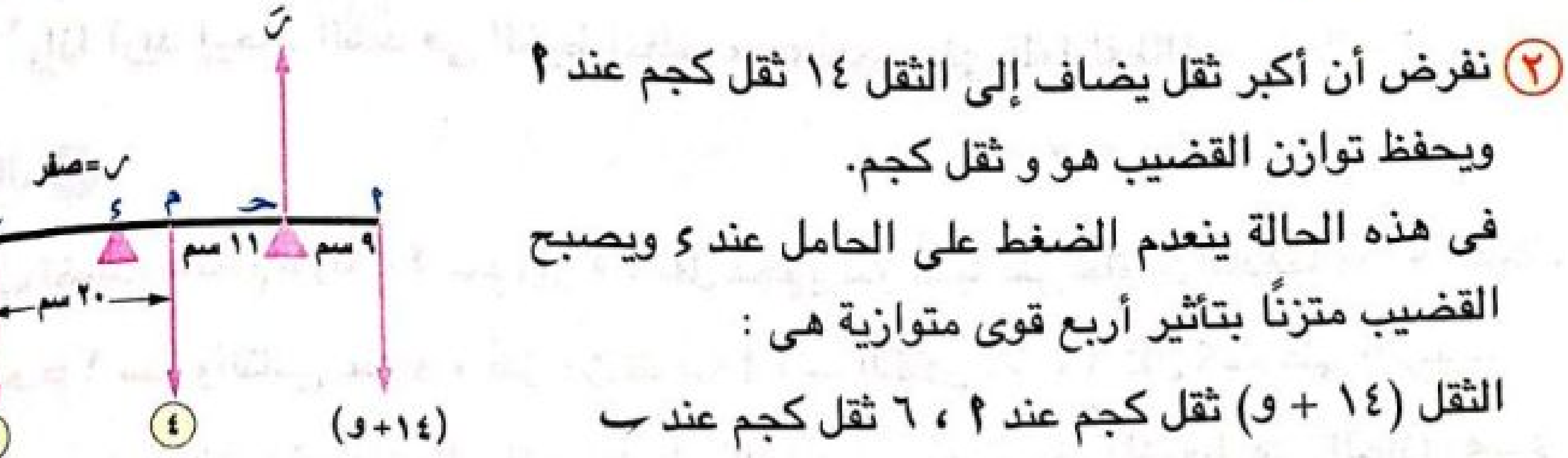
∴ ٨ ا ء = ١٧٦ ∴ ا ء = ٢٢ سم

أى أن : ء تبعد عن الطرف ا مسافة ٢٢ سم.

(٢) نفرض أن أكبر ثقل يضاف إلى الثقل ١٤ ثقل كجم عند ا ويحفظ توازن القضيب هو و ثقل كجم.

فى هذه الحالة ينعدم الضغط على الحامل عند ء ويصبح القضيب متزنًا بتأثير أربع قوى متوازية هى :

الثقل (١٤ + و) ثقل كجم عند ا ، ٦ ثقل كجم عند ب



، وزن القضيب ٤ ثقل كجم عند م منتصف $\overline{اب}$ ، رد فعل الحامل عند حـ وليكن رَ

∴ حسب شروط الاتزان يكون :

(١) المجموع الجبرى لقياسات القوى = صفر

∴ رَ − (١٤ + و) − ٤ − ٦ = ٠ ∴ رَ − و = ٢٤ (١)

(٢) المجموع الجبرى لقياسات عزوم القوى حول حـ = صفرًا

∴ − (١٤ + و) × ا حـ + ٤ × حـ م + ٦ × حـ ب = ٠

∴ − (١٤ + و) × ٩ + ٤ × ١١ + ٦ × ٣١ = ٠

∴ − ١٢٦ − ٩ و + ٤٤ + ١٨٦ = ٠ ∴ ٩ و = ١٠٤

∴ و = $11\frac{5}{9}$ ثقل كجم

مثال (١١)

أربع قوى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ ، $\overleftarrow{ق_4}$ متوازية ومتزنة تؤثر فى النقط

ا (٥ ، ١) ، ب (١ ، ٢) ، حـ (−٢ ، −٤) ، ء (−٣ ، ٠) على الترتيب

فإذا كانت : $\overleftarrow{ق_1}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$ ، $\|\overleftarrow{ق_2}\|$ = ١٠ نيوتن وتضاد فى الاتجاه $\overleftarrow{ق_1}$

أوجد كلًا من : $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ ، $\overleftarrow{ق_4}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ توازى $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ وتضادها فى الاتجاه

∴ $\overrightarrow{\text{ق}}_2 = -\text{ك}\ \overrightarrow{\text{ق}}_1$

∴ $\overrightarrow{\text{ق}}_2 = -\text{ك}\ (3\ \overrightarrow{\text{س}} + 4\ \overrightarrow{\text{ص}})$

$= -3\ \text{ك}\ \overrightarrow{\text{س}} - 4\ \text{ك}\ \overrightarrow{\text{ص}}$

لاحظ أن

$\overrightarrow{\text{ق}}_2 = \|\overrightarrow{\text{ق}}_2\| \times$ متجه وحدة فى اتجاهها

∴ $\overrightarrow{\text{ق}}_2 = \frac{10\ (-3\ ،\ -4)}{\sqrt{9+16}} = (-6\ ،\ -8)$

، ∵ $\|\overrightarrow{\text{ق}}_2\| = 10$ نيوتن

∴ $\sqrt{9\ \text{ك}^2 + 16\ \text{ك}^2} = 10$

∴ $\sqrt{25\ \text{ك}^2} = 10$

∴ $5\ \text{ك} = 10$

∴ $\text{ك} = 2$

∴ $\overrightarrow{\text{ق}}_2 = -6\ \overrightarrow{\text{س}} - 8\ \overrightarrow{\text{ص}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{ق}}_3$ توازى $\overrightarrow{\text{ق}}_1$

∴ $\overrightarrow{\text{ق}}_3 = \text{ل}\ \overrightarrow{\text{ق}}_1$

∴ $\overrightarrow{\text{ق}}_3 = \text{ل}\ (3\ \overrightarrow{\text{س}} + 4\ \overrightarrow{\text{ص}}) = 3\ \text{ل}\ \overrightarrow{\text{س}} + 4\ \text{ل}\ \overrightarrow{\text{ص}}$

، ∵ القوى متزنة

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة ء $= \overrightarrow{0}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{ءأ}} = (5\ ،\ 1) - (-3\ ،\ 0) = (8\ ،\ 1)$

∴ $\overrightarrow{\text{ءأ}} = 8\ \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{ءب}} = (1\ ،\ 2) - (-3\ ،\ 0) = (4\ ،\ 2)$

∴ $\overrightarrow{\text{ءب}} = 4\ \overrightarrow{\text{س}} + 2\ \overrightarrow{\text{ص}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{ءح}} = (-2\ ،\ -4) - (-3\ ،\ 0) = (1\ ،\ -4)$

∴ $\overrightarrow{\text{ءح}} = \overrightarrow{\text{س}} - 4\ \overrightarrow{\text{ص}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ءأ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}_1 + \overrightarrow{\text{ءب}} \times \overrightarrow{\text{ق}}_2 + \overrightarrow{\text{ءح}} \times \overrightarrow{\text{ق}}_3 = \overrightarrow{0}$

∴ $(8\ \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}) \times (3\ \overrightarrow{\text{س}} + 4\ \overrightarrow{\text{ص}}) + (4\ \overrightarrow{\text{س}} + 2\ \overrightarrow{\text{ص}}) \times (-6\ \overrightarrow{\text{س}} - 8\ \overrightarrow{\text{ص}})$

$+ (\overrightarrow{\text{س}} - 4\ \overrightarrow{\text{ص}}) \times (3\ \text{ل}\ \overrightarrow{\text{س}} + 4\ \text{ل}\ \overrightarrow{\text{ص}}) = \overrightarrow{0}$

∴ $29\ \overrightarrow{\text{ع}} + (-20\ \overrightarrow{\text{ع}}) + 16\ \text{ل}\ \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{0}$

∴ $9 + 16\ \text{ل} = 0$

∴ $\text{ل} = \frac{-9}{16}$

∴ $\overrightarrow{\text{ق}}_3 = \frac{-27}{16}\ \overrightarrow{\text{س}} - \frac{9}{4}\ \overrightarrow{\text{ص}}$

، ∵ القوة متزنة

∴ مجموع القوى $= \overrightarrow{0}$

∴ $(3\ \overrightarrow{\text{س}} + 4\ \overrightarrow{\text{ص}}) + (-6\ \overrightarrow{\text{س}} - 8\ \overrightarrow{\text{ص}}) + \left(\frac{-27}{16}\ \overrightarrow{\text{س}} - \frac{9}{4}\ \overrightarrow{\text{ص}}\right) + \overrightarrow{\text{ق}}_4 = \overrightarrow{0}$

∴ $\left(-\frac{75}{16}\ \overrightarrow{\text{س}} - \frac{25}{4}\ \overrightarrow{\text{ص}}\right) + \overrightarrow{\text{ق}}_4 = \overrightarrow{0}$

∴ $\overrightarrow{\text{ق}}_4 = \frac{75}{16}\ \overrightarrow{\text{س}} + \frac{25}{4}\ \overrightarrow{\text{ص}}$



على اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية



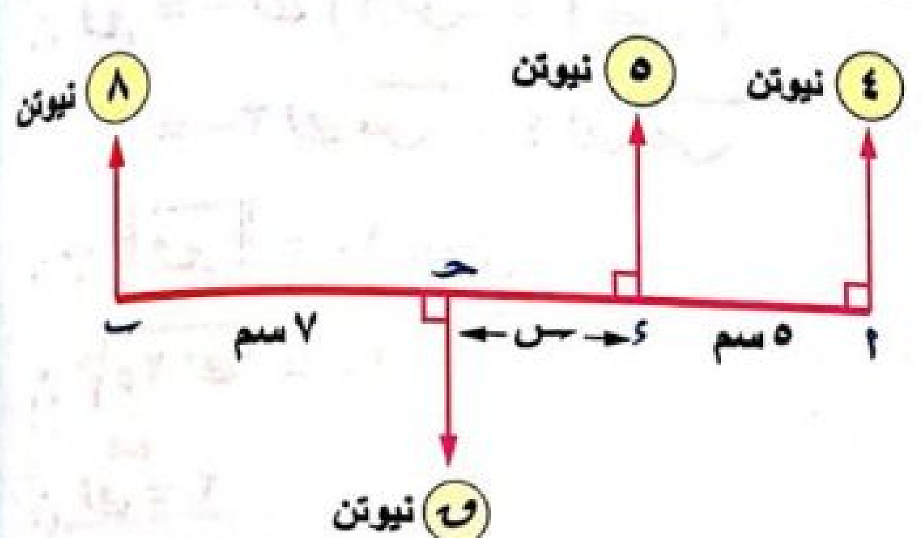


١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① **(دور أول ٢٠١٧)** فى الشكل المقابل :

أ ب قضيب متزن أفقيًا فإن

البعد س = ... سم.



(أ) ٥٦

(ب) ٣٦

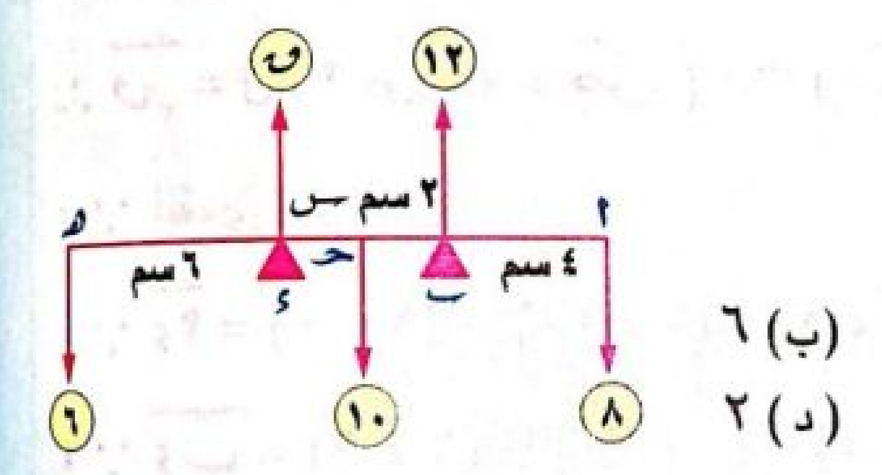
(جـ) ٢٧

(د) ٤

② فى الشكل المقابل :

إذا كان القضيب متزن

فإن : س = ... سم.



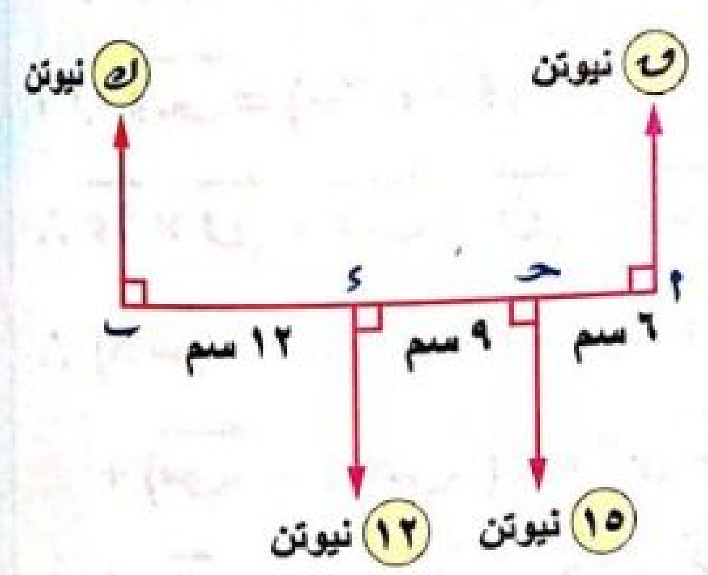
(أ) ٨ (ب) ٦

(جـ) ٤ (د) ٢

③ فى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب قضيب خفيف متزن أفقيًا

فإن : ....



(أ) ق = ١٥ نيوتن ، ك = ١٢ نيوتن

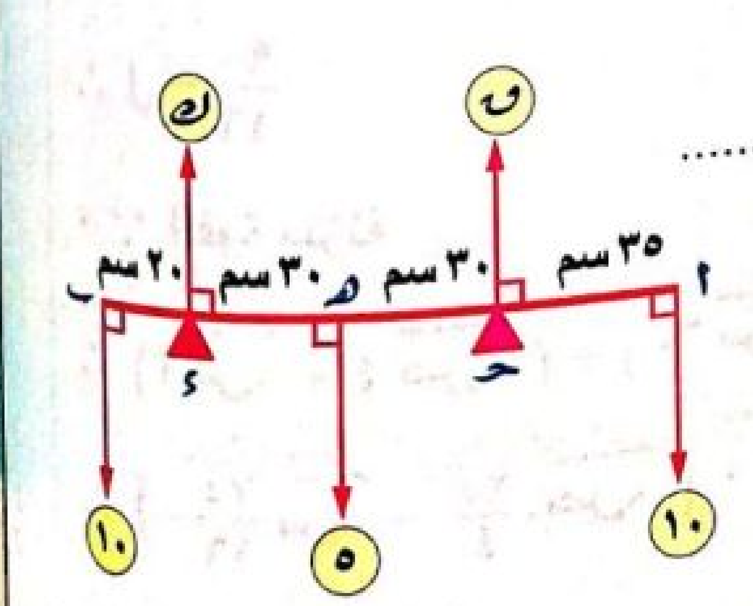
(ب) ق = ١٧ نيوتن ، ك = ١٠ نيوتن

(جـ) ق = ١١ نيوتن ، ك = ١٦ نيوتن

(د) ق = ١٠ نيوتن ، ك = ١٧ نيوتن

④ **(دور أول ٢٠١٩)** فى الشكل المقابل :

إذا كان القضيب خفيف ومتزن أفقيًا فإن ....



(أ) ق = ١٥ نيوتن ، ك = ١٠ نيوتن

(ب) ق = ١٠ نيوتن ، ك = ١٥ نيوتن

(جـ) ق = ١٠ نيوتن ، ك = ١٠ نيوتن

(د) ق = ١٢,٥ نيوتن ، ك = ١٢,٥ نيوتن

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢ ترتكز ساق من الحديد طولها ٣٠ سم ووزنها ٢٠ نيوتن (يؤثر عند منتصف الساق) فى وضع أفقى على حاملين، أحدهما عند أحد الطرفين والآخر على بُعد ١٠ سم من الطرف الآخر. أوجد رد فعل كلٍ من الحاملين على الساق.
«٥ ، ١٥ نيوتن»

٣ $\overline{أب}$ قضيب طوله متر ووزنه ١٢ ث.كجم يؤثر عند نقطة على بُعد ٣٠ سم من الطرف أ وضع على حامل أملس عند منتصفه. أوجد مقدار الثقل الذى يجب أن يعلق من الطرف ب ليتزن القضيب فى وضع أفقى وكذلك رد فعل الحامل.
«٤,٨ ث.كجم ، ١٦,٨ ث.كجم»

٤ قضيب خفيف $\overline{أب}$ مهمل الوزن طوله ٩٠ سم ، علق فى وضع أفقى من طرفيه أ ، ب بواسطة حبلين رأسيين ثم عُلق جسم وزنه ١٥٠ ث.جم من نقطة حـ على القضيب بحيث : أحـ = ٣٦ سم. احسب مقدار الشد فى كلٍ من الحبلين عندما يكون القضيب متزنًا أفقيًا.
«٩٠ ، ٦٠ ث.جم»

٥ يرتكز قضيب منتظم ثقله ٨ وزن كجم فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه البُعد بينهما ٢٠ سم عُلقت كتلة قدرها ١٢ كجم من نقطة تبعد عن أحد طرفيه مسافة $\frac{1}{2}$٧ سم.
أوجد مقدار الضغط الواقع على كل من الحاملين.
« $\frac{1}{2}$١١ ، $\frac{1}{2}$٨ ثقل كجم »

٦ قضيب منتظم طوله ١ متر ووزنه ٥٠ نيوتن (يؤثر فى منتصفه) معلق أفقيًا عند طرفيه بحبلين رأسيين ويحمل القضيب ثقلين أحدهما ١٥ نيوتن على بُعد ٢٠ سم من أحد الطرفين والآخر ٢٠ نيوتن على بُعد ٣٠ سم من الطرف الآخر.
أوجد مقدار الشد فى كلٍ من الحبلين.
«٤٣ ، ٤٢ نيوتن»

٧ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه = ٢٥ نيوتن يستند على وتد أملس عند منتصفه. عُلق من نقطة حـ على بُعد ٢٠ سم من أ ثقل قدره ١٠ نيوتن وحفظ توازنه أفقيًا بخيط رأسى عند أ
أوجد الشد فى الخيط ورد فعل الوتد.
«٥ نيوتن ، ٣٠ نيوتن»

٨ (دور أول ٢٠١٧) $\overline{أب}$ لوح خشبى منتظم الكتلة كتلته ١٠ كجم وطوله ٤ متر يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند أ والآخر عند نقطة تبعد ١ متر عن ب
بين أين يقف على اللوح طفل وزنه ٥٠ ث.كجم لكى يتساوى ردا الفعل على الحاملين.
«١,٤ م من أ»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٩ 📖 عُلق قضيب مهمل الوزن طوله ١٢٠ سم فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيه ثم عُلق فيه ثقلان مقداراهما ٥ نيوتن ، ٨ نيوتن عند نقطتى تثليثه.

أوجد الشد فى كلٍ من الخيطين.

«٦ ، ٧ نيوتن»

١٠ يرتكز قضيب مهمل الوزن طوله ٩٠ سم فى وضع أفقى على حاملين عند نقطتى تثليثه وعُلق من طرفيه ثقلان مقداراهما ٢٠ ، ٣٠ نيوتن. عيِّن الضغط على كل من الحاملين.

«١٠ ، ٤٠ نيوتن»

١١ (دور أول ٢٠٠٥) أ ب قضيب منتظم طوله ١,٥ مترًا ووزنه ١٤٠ نيوتن يؤثر فى نقطة منتصفه ويرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند الطرف أ والثانى عند نقطة حـ من القضيب. فإذا كان مقدار رد فعل الحامل عند أ يساوى ثلثى مقدار رد فعل الحامل عند حـ

أوجد : (١) مقدار رد الفعل عند كلٍ من الحاملين.

(٢) بُعد حـ عن الطرف ب

« ٥٦ ، ٨٤ نيوتن ، ٢٥ سم»

١٢ ساق منتظمة طولها ١٠٠ سم ووزنها ١٥٠٠ ث.جم ترتكز فى وضع أفقى على حاملين المسافة بينهما ٧٥ سم فإذا كان الضغط على أحد الحاملين $\frac{٢}{٣}$ الضغط على الحامل الآخر. أوجد بُعد كل حامل عن الطرف القريب منه.

«٥ ، ٢٠ سم»

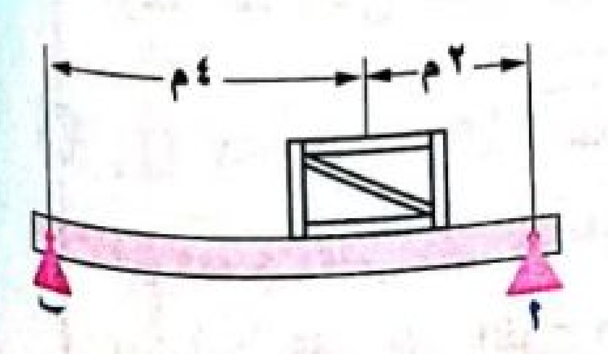
١٣ قضيب منتظم طوله ١ متر ، وزنه ٧٥ نيوتن يرتكز فى وضع أفقى على حاملين البُعد بينهما ٢٤ سم فإذا كان الضغط على أحد الحاملين يساوى ضعف الضغط على الحامل الآخر. أوجد بُعد كل حامل عن الطرف القريب للقضيب.

«٤٢ سم ، ٣٤ سم»

١٤ 📖 الشكل المقابل :

يوضح لوح خشبى منتظم كتلته ٣٠ كجم لكل متر من طوله يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أ ، ب ويحمل صندوق كتلته ٢٤٠ كجم.

أوجد الضغط الواقع على كل حامل.



«٢٥٠ ث.كجم ، ١٧٠ ث.كجم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٥ **فى الشكل المقابل :**

وضعت أربعة أثقال مقدارها ١ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ث.كجم على قضيب خفيف كما بالشكل.

عيِّن نقطة تعليق على القضيب بحيث يظل القضيب أفقيًا.

أ ، ب ، ١ متر ، ١ متر ، ١ متر

١ ث.كجم ، ٧ ث.كجم ، ٥ ث.كجم ، ٣ ث.كجم

«١ $\frac{٥}{٨}$ م من أ»

---

١٦ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ، وزنه ٨ ث.كجم عُلق فى وضع أفقى من نقطتين تبعد كل منهما ١٠ سم عن أحد طرفيه بخيطين رأسيين لا يتحمل كل منهما شدًا أكثر من ١٦ ث.كجم. فإذا عُلق ثقل قدره (و) على بُعد ٢٠ سم من منتصف القضيب ، أوجد مقدار (و) التى تجعل أحد الخيطين على وشك أن ينقطع ثم أوجد مقدار الشد فى الخيط الآخر.

«١٦ ، ٨ ث.كجم»

---

١٧ قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ٤ متر وكتلته ٦ كجم علق فى طرفيه أ ، ب جسمان كتلتاهما ٦ ، ١٢ كجم على الترتيب فمن أى نقطة يجب تعليق القضيب كى يتزن أفقيًا ؟ « ٢,٥ متر من أ »

---

١٨ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ، وزنه ٤ ثقل كجم علق من طرفه أ ثقل قدره ٥ ثقل كجم ومن طرفه ب ثقل آخر فإذا كان القضيب فى حالة اتزان فى وضع أفقى مرتكزًا على قائم رأسى عند نقطة منه تبعد عن أ بمقدار ٤٠ سم. أوجد مقدار الثقل المُعلق عند ب وكذلك رد الفعل عند نقطة الارتكاز. « ١ $\frac{١}{٢}$ ثقل كجم ، ١٠ $\frac{١}{٢}$ ثقل كجم »

---

١٩ ساق منتظمة طولها متر ووزنها ٨٠ ثقل جم ترتكز فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيها ومُعلق بها الأثقال ٤٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ثقل جم على بُعد ٣٠ ، ٦٠ ، ٨٠ سم من أحد طرفيها. أوجد الضغط الواقع على كل من الحاملين. «٩٠ ، ١١٠ ثقل جم»

---

٢٠ ساق مهملة الوزن طولها ١٢٠ سم ترتكز فى وضع أفقى عند طرفيها على حاملين. عند أى موضع من الساق يجب تعليق ثقل قدره ١٢ ث.كجم حتى يصبح مقدار رد الفعل عند أحد الطرفين مساويًا لضعف قيمته عند الطرف الثانى ؟ «٤٠ سم من أى من الطرفين»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

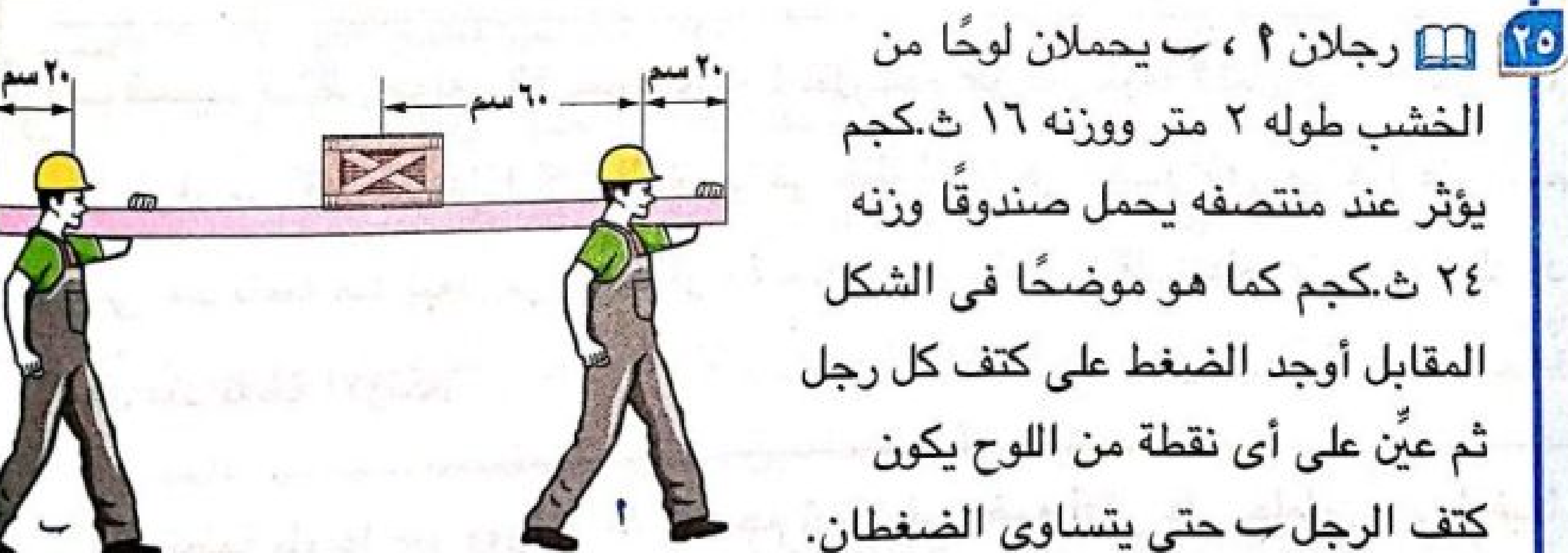
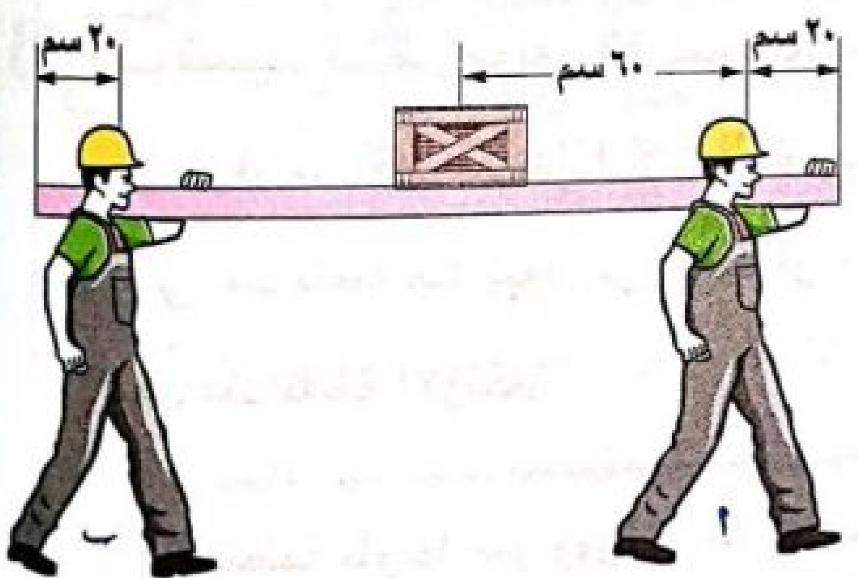
٢١ (دور ثان ٢٠١٧) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٩٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن مُعلق فى وضع أفقى بخيطين رأسيين من طرفيه أ ، ب أين يُعلق ثقل مقداره ١٥٠ نيوتن حتى يكون مقدار الشد عند أ ضعف مقدار الشد عند ب ؟
«٢٤ سم من أ»

٢٢ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٤٠ ث.كجم وطوله ١ متر يتزن عندما يرتكز بطرفه أ على نضد أفقى أملس ويرتفع طرفه الآخر ب بتأثير قوة رأسية تؤثر عند نقطة على بُعد ٢٠ سم من الطرف ب أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل النضد.
«٢٥ ، ١٥ ث.كجم»

٢٣ $\overline{أحـ}$ قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم ، وزنه ٦٠ نيوتن عُلق فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند ب ، حـ حيث : أب = ٣٠ سم فكان الشد فى الخيط عند ب ثلاثة أمثال الشد فى الخيط عند حـ عيِّن نقطة تأثير وزن القضيب ومقدار قوة الشد فى كلٍ من الخيطين.
«أم = ٥٢,٥ سم ، $ش_ب$ = ٤٥ نيوتن ، $ش_حـ$ = ١٥ نيوتن»

٢٤ $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم طوله ٤ متر يرتكز أفقيًا على حاملين أحدهما عند أ والآخر عند ب فإذا كان مقدار ردى الفعل عند كل من أ ، ب هما ٥ نيوتن ، ٣ نيوتن على الترتيب ، إذا اتزن هذا القضيب أفقيًا على حامل واحد. أوجد بُعد هذا الحامل من نقطة أ
«١,٥ م»

٢٥ رجلان أ ، ب يحملان لوحًا من الخشب طوله ٢ متر ووزنه ١٦ ث.كجم يؤثر عند منتصفه يحمل صندوقًا وزنه ٢٤ ث.كجم كما هو موضحًا فى الشكل المقابل أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم عيِّن على أى نقطة من اللوح يكون كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطان.

«٢٣ ، ١٧ ث.كجم ، ١٣٦ سم من أ»

٢٦ $\overline{أبحـ ء}$ قضيب غير منتظم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أملسين عند ب ، حـ حيث : أب = حـ ء = ٣٥ سم ، ب حـ = ٨٠ سم فإذا كان القضيب يصبح على وشك الدوران حول ب إذا عُلق من الطرف أ ثقل قدره ١٢ ثقل كجم ، كما يصبح على وشك الدوران حول حـ إذا عُلق من الطرف ء ثقل قدره ٢٠ ثقل كجم.
فأوجد ثقل القضيب وبُعد مركز ثقله عن الطرف أ
«١٤ ثقل كجم ، ٦٥ سم من أ»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٧ (دور أول ٢٠٠٤) أ ب قضيب غير منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ٤٠ نيوتن معلق من منتصفه بواسطة خيط خفيف رأسى. إذا اتزن القضيب أفقيًا عندما عُلق ثقل مقداره ١٠ نيوتن عند أ فأوجد بُعد نقطة تأثير الوزن عن أ وإذا رفع الثقل المعلق فأوجد مقدار القوة الرأسية التى تؤثر عند ب بحيث يظل القضيب متزنًا فى وضع أفقى. «٦٢,٥ سم من أ ، ١٠ نيوتن»

٢٨ أ ب قضيب غير منتظم وزنه ٥ ثقل كجم وطوله ٢٤ سم يرتكز أفقيًا على حاملين عند حـ ، ء حيث : أ حـ = ب ء = ٥ سم عُلق من أ ثقل قدره ١٠ ثقل كجم فأصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ عيِّن مركز ثقل القضيب ثم أوجد أكبر ثقل يعلق من ب دون أن يفقد القضيب توازنه مع بقاء الثقل المعلق من أ «على بُعد ١٥ سم من أ ، ٤٢ ثقل كجم»

٢٩ (دور أول ٢٠٠٩) يرتكز قضيب منتظم أ ب (وزنه يؤثر عند نقطة منتصفه) وطوله ٨٠ سم فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه ويحمل القضيب ثقلين مقدار أحدهما ٥ نيوتن عند نقطة تبعد ٦٠ سم عن أ ومقدار الآخر ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ٥ سم عن ب ، فإذا كانت قيمة رد فعل الحامل عند ب مساوية ضعف قيمتها عند أ

فأوجد مقدار وزن القضيب وأيضًا مقدارى ردى الفعل عند كل من أ ، ب «٣٥ ، ٢٠ ، ٤٠ نيوتن»

٣٠ أ ب قضيب غير منتظم طوله ٩٠ سم وزنه ٣٠ نيوتن يؤثر عند نقطة تبعد ٤٠ سم من أ ويرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ب حيث : أ حـ = ١٠ سم عُلق ثقل ١٠ نيوتن عند نقطة على بُعد ٣٠ سم من الطرف ب أوجد أين يُعلق ثقل قدره ٢٠ نيوتن حتى يكون رد فعل الحامل عند حـ ضعف قيمته عند ب «٢٠ سم من أ»

٣١ يرتكز قضيب أ ب طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٠ نيوتن ويؤثر عند نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين ، أحدهما عند أ والآخر على بُعد ٢٥ سم من ب ما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه عند الطرف ب للقضيب بحيث تصبح قيمة رد الفعل عند الحامل القريب من هذا الطرف مساويًا ستة أمثال قيمتها عند أ وما قيمتى ردى الفعل عندئذٍ ؟

«٤ ، ٢ ، ١٢ نيوتن»

٣٢ أ ب قضيب غير منتظم طوله ١٤٠ سم محمول أفقيًا بخيطين رأسيين أحدهما عند ب والآخر يبعد ٤٠ سم من أ ، فإذا كان الشد فى الخيط الأول $\frac{1}{4}$ الشد فى الخيط الثانى ، فعيِّن نقطة تأثير وزن القضيب. وإذا عُلم أن أكبر ثقل يلزم تعليقه من أ دون أن يختل التوازن هو ١٢ نيوتن فأوجد وزن القضيب. «أ م = ٦٠ سم حيث م نقطة تأثير الوزن ، و = ٢٤ نيوتن»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣٣ (دور أول ٢٠١١) قضيب أب طولـه ١٠٠ سـم ووزنه ٢٠ نيوتن يؤثـر عند نقطة منتصفه ، يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما يبعد ٣٠ سـم عن أ والآخر يبعد ٢٠ سـم عن ب أوجـد مقـدار الضغط الواقع على كلٍ من الحاملين. ما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب حتى يكون القضيب على وشك الدوران ؟ وما هى قيمة الضغط على الحامل الأقرب لنقطة ب عندئذ ؟

«١٢ ، ٨ ، ٣٠ ، ٥٠ نيوتن»

---

٣٤ يرتكز قضيب أب طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠٠ ث.جم يؤثر عند نقطة منتصفه على وتد يبعد ٢٠ سم من أ حفظ القضيب أفقيًا فى حالة اتزان بواسطة خيط خفيف رأسى يتصل بطرفه ب أوجد :

(١) مقدار كل من الشد فى الخيط ورد فعل الوتد.

(٢) مقدار الثقل الذى يلزم تعليقه من أ ليجعل الشد فى الخيط على وشك أن ينعدم.

«١٠٠ ، ٣٠٠ ث.جم ، ٢٠٠ ث.جم»

---

٣٥ قضيب منتظم طوله ١٤٠ سم ووزنه ١٥٠ ث.جم يرتكز أفقيًا على حاملين يبعدان ٤٠ سم ، ٢٠ سم عن منتصفه على الترتيب. أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من كل طرف دون أن يختل توازن القضيب ومقدار الضغط على كلٍ من الحاملين فى كل حالة.

«$و_١$ = ٢٠٠ ث.جم ، $ض_١$ = ٣٥٠ ث.جم ، $و_٢$ = ٦٠ ث.جم ، $ض_٢$ = ٢١٠ ث.جم»

---

٣٦ أب قضيب غير منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه ٢٠ ث.كجم ، يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ى حيث : أحـ = بى = ١٠ سم ، عُلق من أ ثقل قدره ٤٠ ث.كجم فأصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ أوجد بعد نقطة تأثير وزن القضيب عن أ ثم أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من ب دون أن يختل التوازن مع رفع الثقل المُعلق من أ ؟

«٣٠ سم ، ٨٠ ث.كجم»

---

٣٧ (دور أول ٢٠٠٦) أب حـ ى قضيب غير منتظم يرتكز فى وضع الاتزان أفقيًا على حاملين أملسين عند ب ، حـ حيث : أب = ٦ سم ، حـى = ٧ سم ونقطة تأثير وزن القضيب تقسمه بنسبة ٢ : ٣ من جهة الطرف أ وجد أنه لو عُلق من الطرف أ ثقل قدره ١٢٠ ثقل جرام أو من الطرف ى ثقل قدره ١٨٠ ثقل جرام كان القضيب على وشك الدوران. أوجد وزن القضيب والبُعد بين الحاملين.

«٩٠ ث.جم ، ٢٢ سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣٨ أ ب قضيب غير منتظم طوله ١ متر يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند ﺟ ، ء حيث : أ ﺟ = ٢٠ سم ، ب ء = ١٠ سم. فإذا كان أكبر ثقل يُعلق من الطرف أ لحفظ التوازن ٥ ث. كجم. وأكبر ثقل يُعلق من ب لحفظ التوازن ٤ ث.كجم. أوجد وزن القضيب ونقطة تأثيره.
«٢ ث.كجم ، ٧٠ سم من أ»

٣٩ يرتكز قضيب أ ب طوله ٩٠ سم ووزنه ٥٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين ، أحدهما عند الطرف أ والآخر عند نقطة تبعد ٣٠ سم عن ب ويحمل ثقلاً مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ١٥ سم عن ب عيِّن قيمة الضغط على كلٍ من الحاملين ، أوجد أيضًا مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران وما هى قيمة الضغط على الحامل عندئذ ؟ «$\frac{1}{2}$٧ ، $\frac{1}{2}$٦٢ ، ١٥ ، ٨٥ نيوتن»

٤٠ (دور أول ٢٠٠٧) أ ب قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٠٠ نيوتن (يؤثر فى منتصفه) ﺟ ، ء نقطتان عليه ، يرتكز القضيب أفقيًا على حاملين أحدهما عند الطرف أ والآخر عند النقطة ﺟ حيث : ب ﺟ = ٢٠ سم عُلق ثقل مقداره ٨٠ نيوتن من نقطة ء حيث : ب ء = ١٠ سم أوجد مقدار الضغط على كل من الحاملين ، ثم أوجد الثقل الذى يمكن تعليقه من الطرف ب حتى يكون القضيب على وشك الدوران. «ض$_{أ}$ = $\frac{1}{2}$٢٧ ، ض$_{ﺟ}$ = $\frac{1}{2}$١٥٢ ، ١١٠ نيوتن»

٤١ أ ب قضيب منتظم وزنه ٥٠ نيوتن وطوله ١٦٠ سم مُعلق بواسطة خيطين رأسيين عند ﺟ ، ء حيث : أ ﺟ = ب ء = ٤٠ سم فإذا عُلق من الطرف ب ثقل قدره ١٠ نيوتن ، أوجد الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف أ ليتزن القضيب فى وضع أفقى ويكون الشد فى الخيط عند ﺟ ضعف الشد فى الخيط عند ء
«٢٤ نيوتن»

٤٢ (دور أول ٢٠٠٨) أ ب قضيب غير منتظم طوله ٦٥ سم إذا ثبت عند طرفه ب ثقل قدره ٢ نيوتن وعُلق من أ ثقل قدره ٧ نيوتن فإن القضيب يتزن أفقيًا عند نقطة تبعد ٢٠ سم من أ وإذا انقص الثقل الموجود عند أ وصار ٤,٢ نيوتن فإن القضيب يتزن أفقيًا عند نقطة تبعد ٢٥ سم من أ أوجد وزن القضيب وبُعد نقطة تأثير وزنه عن الطرف أ
«٥ نيوتن ، ٣٠ سم»

٤٣ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ، وزنه ٣٠ نيوتن معلق من طرفيه فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين لا يتحمل أى منهما شدًا يزيد عن ٢٠ نيوتن. أوجد مواضع النقط التى يمكن أن يعلق منها ثقل مقداره ٧,٥ نيوتن دون أن يقطع أى من الخيطين.

«على مسافة لا تقل عن ٤٠ سم من كل طرف»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤٤ ساق منتظمة طولها ٨٠ سم ووزنها ٣ ثقل كجم عُلقت من طرفيها فى وضع أفقى بخيطين رأسيين كل منهما يتحمل شدًا لا يزيد عن ٥ ثقل كجم. عيِّن نقطة تعليق كتلة قدرها ٤ كجم دون أن ينقطع أى من الخيطين. «على بُعد لا يقل عن ١٠ سم من أى من الطرفين»

٤٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى الشكل المقابل :

قضيب منتظم يرتكز على حامل عند منتصفه ، وضع عليه جسم كما بالشكل ، أى من القوى الآتية تحدث توازن للقضيب ؟

(أ) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بُعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب.

(ب) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بُعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب.

(جـ) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بُعد ٥ سم على يسار منتصف القضيب.

(د) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بُعد ٥ سم على يسار منتصف القضيب.

② فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم ومتزن تحت تأثير القوى الموضحة بالشكل فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٠

(جـ) ١٥ (د) ٢٠

③ فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ١٠ نيوتن فإذا كان أكبر ثقل يمكن تعليقه من الطرف أ دون أن يختل التوازن هو ك

فإن : ك = ...

(أ) ٢٥ نيوتن. (ب) ٢٠ نيوتن. (جـ) ١٥ نيوتن. (د) ٥ نيوتن.

④ فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٤٠ ث.كجم وطوله ٦٠ سم فإذا كان القضيب مرتكز فى وضع أفقى على وتد على بُعد ٢٠ سم من أ ، ومُعلق من طرفه ب بخيط خفيف فإن : ر − س = ... ث.كجم

(أ) ١٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٠ (د) ٢٠

⑤ ثلاث قوى متوازية $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ تؤثر على قضيب فى النقط أ ، ب ، حـ والتى تبعد ٢ سم ، ٨ سم ، ٦ سم على الترتيب من أحد الطرفين فإذا كان القضيب متزن فإن : $ق_١$: $ق_٢$: $ق_٣$ = ...

(أ) ١ : ٢ : ٣ (ب) ٢ : ٣ : ١ (جـ) ٣ : ٢ : ١ (د) ١ : ٣ : ٢

⑥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٤ ث.كجم استند فى وضع أفقى على وتدين عند أ ، حـ حيث : ب حـ = ٢٠ سم. أثرت عليه قوة رأسية ق عند الطرف ب فكان القضيب على وشك الدوران حول حـ فإن مقدار رد فعل الوتد عند حـ = ... ث.كجم

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑦ ساق خفيفة طولها ٣٦ سم معلقة أفقيًا بخيطين رأسيين أحدهما مثبت فى الساق من نقطة على بُعد ٩ سم من أحد الطرفين والآخر من نقطة على بُعد ١٥ سم من الطرف الآخر ومعلق من الطرفين ثقلان متساويان. فإذا كان كل من الخيطين يتحمل شدًا لا يزيد عن ٥٤ ثقل جم فإن أكبر قيمة لكل من الثقلين = ... ثقل.جم

(أ) ١٨ (ب) ٣٦ (جـ) ٤٢ (د) ٥٤

---

٤٦ تؤثر القوى المستوية المتزنة والمتوازية $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ ، $\overrightarrow{ق_٤}$ فى النقط أ(٢ ، −١) ، ب(−٤ ، −٣) ، حـ(٣ ، ٥) ، ء(−١ ، ٠) على الترتيب

فإذا كانت : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، $\|\overrightarrow{ق_٢}\|$ = ٢٠ نيوتن فى نفس اتجاه $\overrightarrow{ق_١}$

أوجد كلًا من $\overrightarrow{ق_٣}$ ، $\overrightarrow{ق_٤}$ إذا كانتا تعملان فى اتجاه مضاد لاتجاه $\overrightarrow{ق_١}$

«$\overrightarrow{ق_٣}$ = −٩ $\overrightarrow{س}$ − ١٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٤}$ = −٦ $\overrightarrow{س}$ − ٨ $\overrightarrow{ص}$»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

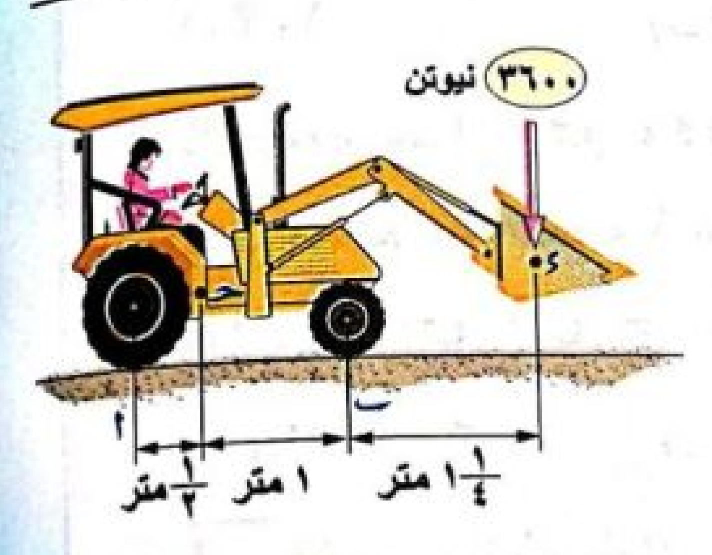
٤٧ أثرت القوى المتوازية $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ ، $\overrightarrow{ق_٤}$ عند النقط أ (١ ، ١) ، ب (-٢ ، ١) ، حـ (٠ ، ٣) ، ء (-٢ ، ٠) على الترتيب فاتزنت فإذا كانت : $\overrightarrow{ق_١} = \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص}$ ، $\|\overrightarrow{ق_٢}\| = ٢\sqrt{٥}$ نيوتن وتضاد $\overrightarrow{ق_١}$

أوجد كلاً من : $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ ، $\overrightarrow{ق_٤}$

« $\overrightarrow{ق_٢} = -٢ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = -٧ \overrightarrow{س} - ١٤ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٤} = ٨ \overrightarrow{س} + ١٦ \overrightarrow{ص}$ »

٤٨ في الشكل المقابل :

جرار وزنه ٨٤٠٠ نيوتن يؤثر في الخط الرأسي المار بالنقطة حـ يستخدم في رفع ٣٦٠٠ نيوتن من المخلفات التي تؤثر في الخط الرأسي المار بالنقطة ء حدد رد فعل الأرض على كل من العجلتين في وضع الاتزان.

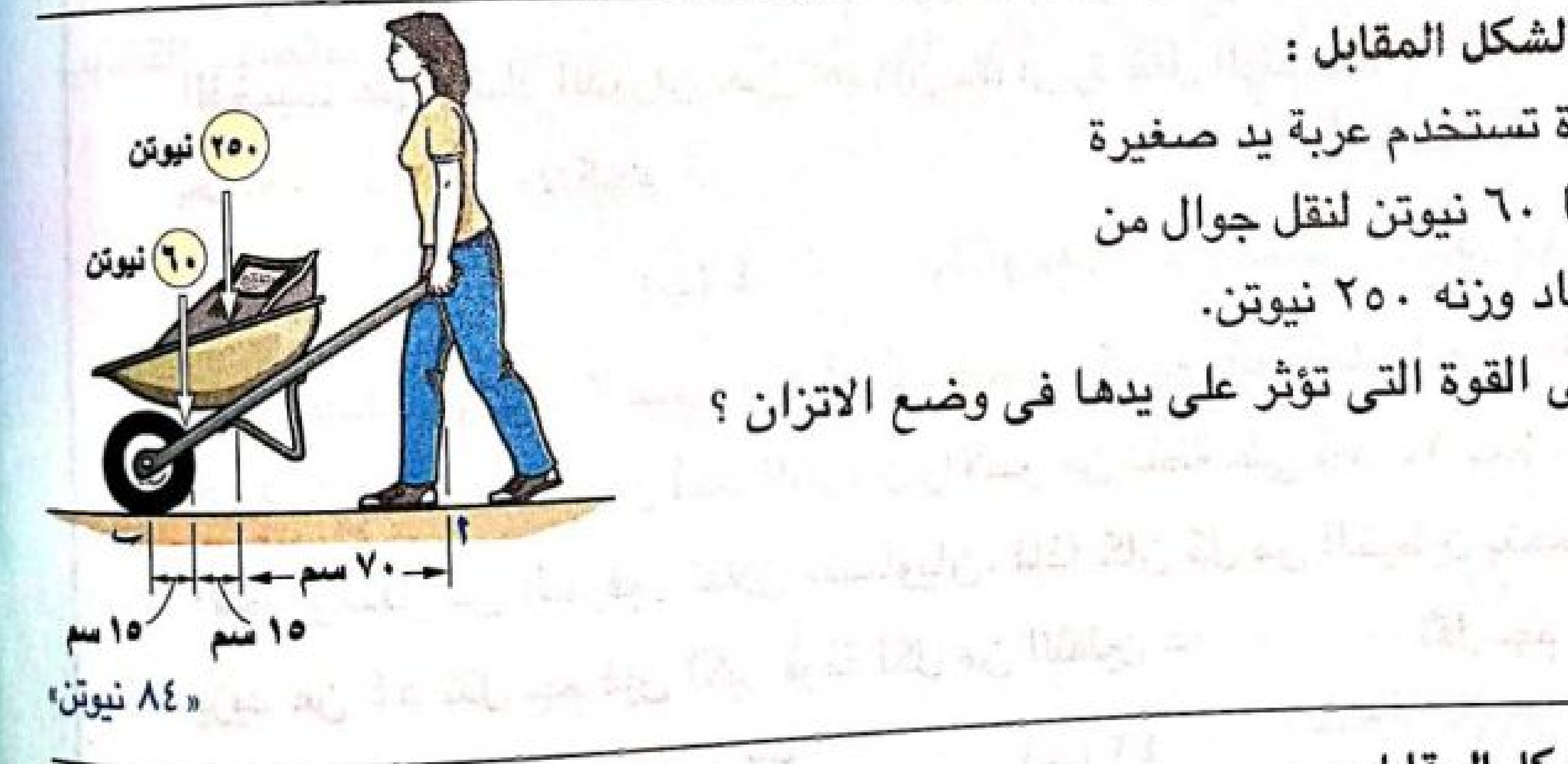


« ٩٤٠٠ ، ٢٦٠٠ نيوتن »

٤٩ في الشكل المقابل :

سيدة تستخدم عربة يد صغيرة وزنها ٦٠ نيوتن لنقل جوال من السماد وزنه ٢٥٠ نيوتن.

ما هي القوة التي تؤثر على يدها في وضع الاتزان ؟

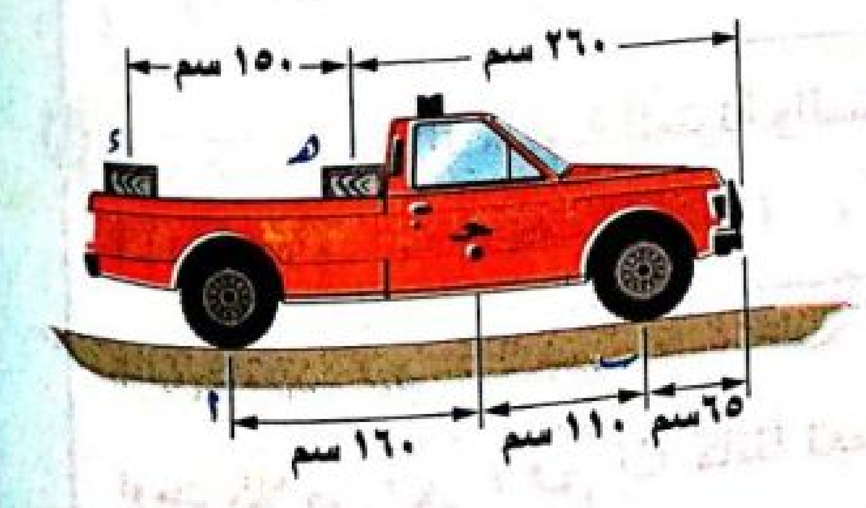


« ٨٤ نيوتن »

٥٠ في الشكل المقابل :

عربة نصف نقل كتلتها ١٦٠٠ كجم ووزنها يؤثر في الخط الرأسي المار بالنقطة حـ ووضع بصندوق العربة صندوقان ء ، هـ كتلة الأول ٥٠٠ كجم وكتلة الثاني ٤٠٠ كجم في الوضع المبين بالشكل.

أوجد رد فعل الأرض على كل من العجلتين.



« ٩٢٠,٤ ، ١٥٧٩,٦ نيوتن »

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥١ **فى الشكل المقابل :**



دراجة نارية كتلتها ٢٠٠ كجم ووزنها يؤثر فى الخط الرأسى المار بمنتصف المسافة بين مركزى العجلتين فإذا كانت كتلة راكب الدراجة ٨٤ كجم ووزنه يؤثر فى الخط الرأسى الذى يبعد ١ متر خلف مركز العجلة الأمامية.

أوجد رد فعل الأرض على كل من العجلتين فى كل من الحالتين الآتيتين :

① الدراجة بدون الراكب.

② الدراجة مع وجود الراكب. «١٠٠ ، ١٠٠ ث.كجم ، ١٢٤ ، ١٦٠ ث.كجم»

---

٥٢ أب لوح من الخشب طوله ٢٠ متر ووزنه ٦٠ ثقل كجم يؤثر عند منتصفه موضوع أفقيًا بحيث يرتكز على حاملين عند حـ ، ء حيث : أحـ = ٣ متر ، بء = ٥ متر فإذا سار رجل وزنه ١٠٠ ثقل كجم على اللوح مبتدئًا من الطرف أ نحو ب فأوجد أكبر مسافة يمكن أن يسيرها دون أن ينقلب اللوح. «١٨ مترًا»

---

٥٣ أب قضيب غير منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ٦٠ ث.كجم معلق فى منتصفه بخيط خفيف رأسى وعندما عُلق ثقل ٣٠ ث.كجم من أحد طرفيه اتزن فى وضع أفقى. أوجد القوة الرأسية التى يجب أن تؤثر فى الطرف الآخر للقضيب (بعد رفع الثقل المُعلق) ليظل متزن فى وضع أفقى. «الوزن على بعد ٧٥ سم من أ ، ٣٠ ث.كجم»

---

٥٤ كوبرى طوله ٦٠ مترًا ووزنه ٧٠ ثقل طن يؤثر عند منتصفه ويرتكز على دعامتين عند طرفيه أ ، ب فإذا سارت سيارة كتلتها ٦ طن على الكوبرى. **فأوجد الضغط على كلٍ من الدعامتين عندما تكون السيارة :**

① على بُعد ٢٠ متر من الطرف أ ② فى منتصف الكوبرى.

③ على بُعد ٤٥ متر من الطرف أ

«٣٩ ، ٣٧ ثقل طن ، ٣٨ ، ٣٨ ثقل طن ، ٣٦,٥ ، ٣٩,٥ ثقل طن»

٥٥ كوبرى طوله ٣٠ مترًا ووزنه ٢٧ ثقل طن يؤثر فى منتصفه ويرتكز على دعامتين عند طرفيه أ ، ب فإذا سارت سيارة محملة كتلتها ١٣ طن على الكوبرى فأوجد موقع السيارة على الكوبرى عندما يكون الضغط على الدعامة أ = $\frac{٣}{٥}$ الضغط على الدعامة ب

« $\frac{٧}{١٣}$ ٢٦ مترًا من أ»

٥٦ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ٣٠٠ ثقل جرام مُعلق فى وضع أفقى من طرفيه بخيطين رأسيين. عُلق فى القضيب الثقلان ٥٠٠ ، ١٠٠ ثقل جرام الأول على بُعد ٤٠ سم من الطرف أ والثانى على بُعد ٢٠ سم من الطرف ب أوجد الشد فى كلٍ من الخيطين ثم أوجد موضع تعليق ثقل قدره ٦٠٠ ثقل جرام حتى يصبح الشدّان فى الخيطين متساويين.

«٥٠٠ ، ٤٠٠ ثقل جم ، ٧٠ سم من أ»

٥٧ مسطرة مدرجة منتظمة طولها متر ووزنها ٥٠ ثقل جم ترتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند التدريج ١٠ والآخر عند التدريج ٩٠ فإذا كان كلٍ من الحاملين يتحمل ضغطاً لا يزيد عن ٤٥ وزن جم فأوجد بين أى تدريجين بين الحاملين يمكن تعليق ثقل قدره ٢٥ ثقل جم دون أن يختل توازن المسطرة.

«بين التدريجين ٢٦ ، ٧٤ أو عند أحدهما»

٥٨ 📖 $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن يؤثر عند منتصفه ، يرتكز القضيب فى وضع أفقى على حامل عند طرفه ب ، ويحفظ فى حالة توازن بواسطة خيط رأسى مثبت من نقطة حـ على بُعد ٤٠ سم من أ ويحمل ثقلًا مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ٢٠ سم من أ عيِّن قيمة الشد فى الخيط والضغط على الحامل ، وما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه فى الطرف أ حتى يصبح القضيب على وشك الانفصال عن الحامل ، وما هى قيمة الشد فى الخيط عندئذ ؟

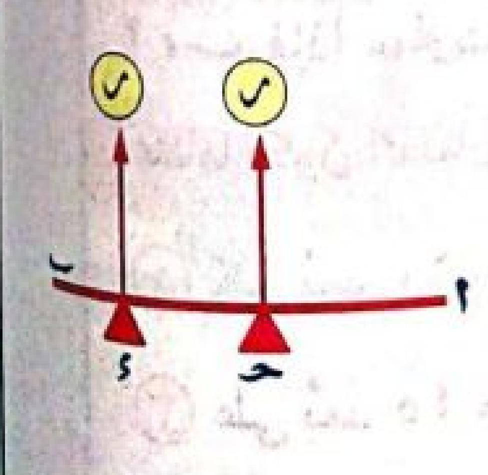
«٧٠ ، ١٠ نيوتن ، ٢٠ ، ١٠٠ نيوتن»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٥٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى الشكل المقابل :

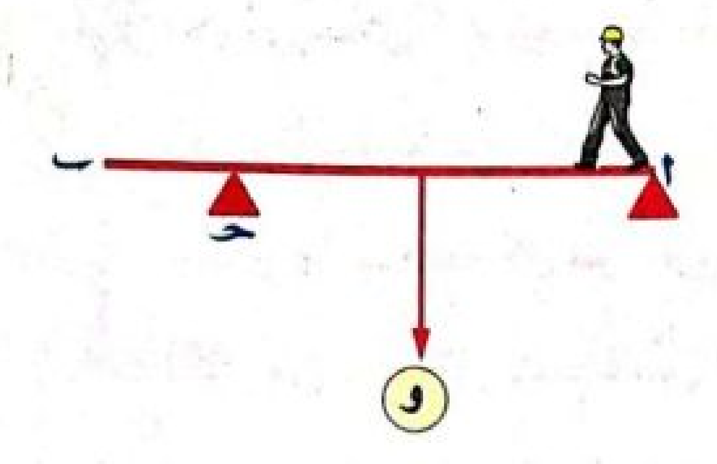
$\overline{أب}$ قضيب غير منتظم وزنه (و) يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء فإذا كان ردى الفعل عند الحاملين متساوٍ فإن نقطة تأثير وزن القضيب تقع فى نقطة منتصف ....



(أ) $\overline{أب}$ (ب) $\overline{حـ ء}$ (جـ) $\overline{أ ء}$ (د) $\overline{ب حـ}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢) **فى الشكل المقابل :**



قضيب منتظم $\overline{أب}$ يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحداهما عند الطرف أ والآخر عند نقطة حـ على القضيب فإذا تحرك رجل من نقطة أ متجهًا إلى ب مع الاحتفاظ باتزان القضيب فإن : ....

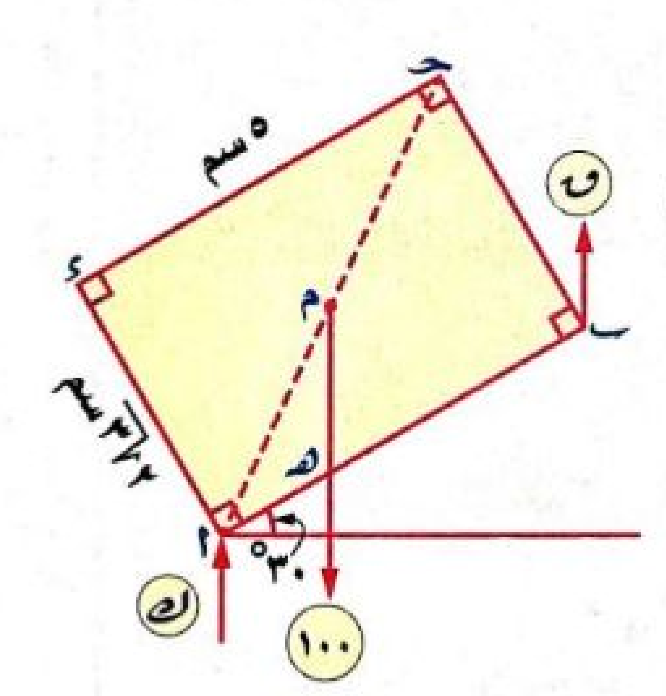
(أ) رد الفعل عند أ يزداد ورد الفعل عند حـ يقل.

(ب) رد الفعل عند أ يقل ورد الفعل عند حـ يزداد.

(جـ) رد الفعل عند أ ثابت ورد الفعل عند حـ ثابت.

(د) رد الفعل عند أ يقل حتى يصل الرجل لمركز القضيب ثم يزداد تدريجيًا.

(٣) **فى الشكل المقابل :**



إذا كانت الصفيحة أبحـء متزنة تحت تأثير القوى الموضحة بالشكل فإن : ك − ى = ...

(أ) ٤٠

(ب) ٥٠

(جـ) ٦٠

(د) ٧٠

---

٦٠ يرتكز قضيب أفقى $\overline{أء}$ على حاملين عند ب ، حـ حيث : أب = بحـ = حـء ، وقد وجد أن القضيب يكون على وشك الدوران إذا عُلق من نقطة أ ثقل قدره م ثقل جم أو إذا عُلق من نقطة ء ثقل قدره ٮ ثقل جرام أوجد وزن القضيب بدلالة م ، ٮ وإذا كانت ٮ = ٢ م = ١٠ ث.جم فأوجد وزن القضيب ثم أثبت أنه يؤثر فى نقطة تقسم $\overline{أء}$ بنسبة ٤ : ٥

«(م + ٮ)، ١٥ ثقل جرام»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

61 يحمل رجلان أ ، ب جسمًا كتلته ٩٠ كجم مُعلق من قضيب معدنى متين وخفيف ، فإذا كانت المسافة بين الرجلين ٦٠ سم وكانت نقطة تعليق الجسم تبعد ٢٠ سم من أ ، فما مقدار ما يتحمله كلٍ من الرجلين من هذا الثقل ؟ وإذا كان الرجل ب لا يمكنه أن يحمل أكثر من ٥٠ ثقل كجم فعيِّن أكبر مسافة من أ يمكن تعليق الثقل عندها حتى يتمكن الرجل ب من الاستمرار فى حمل القضيب. «٣٠ ، ٦٠ ثقل كجم ، $\frac{1}{3}$ ٣٣ سم»

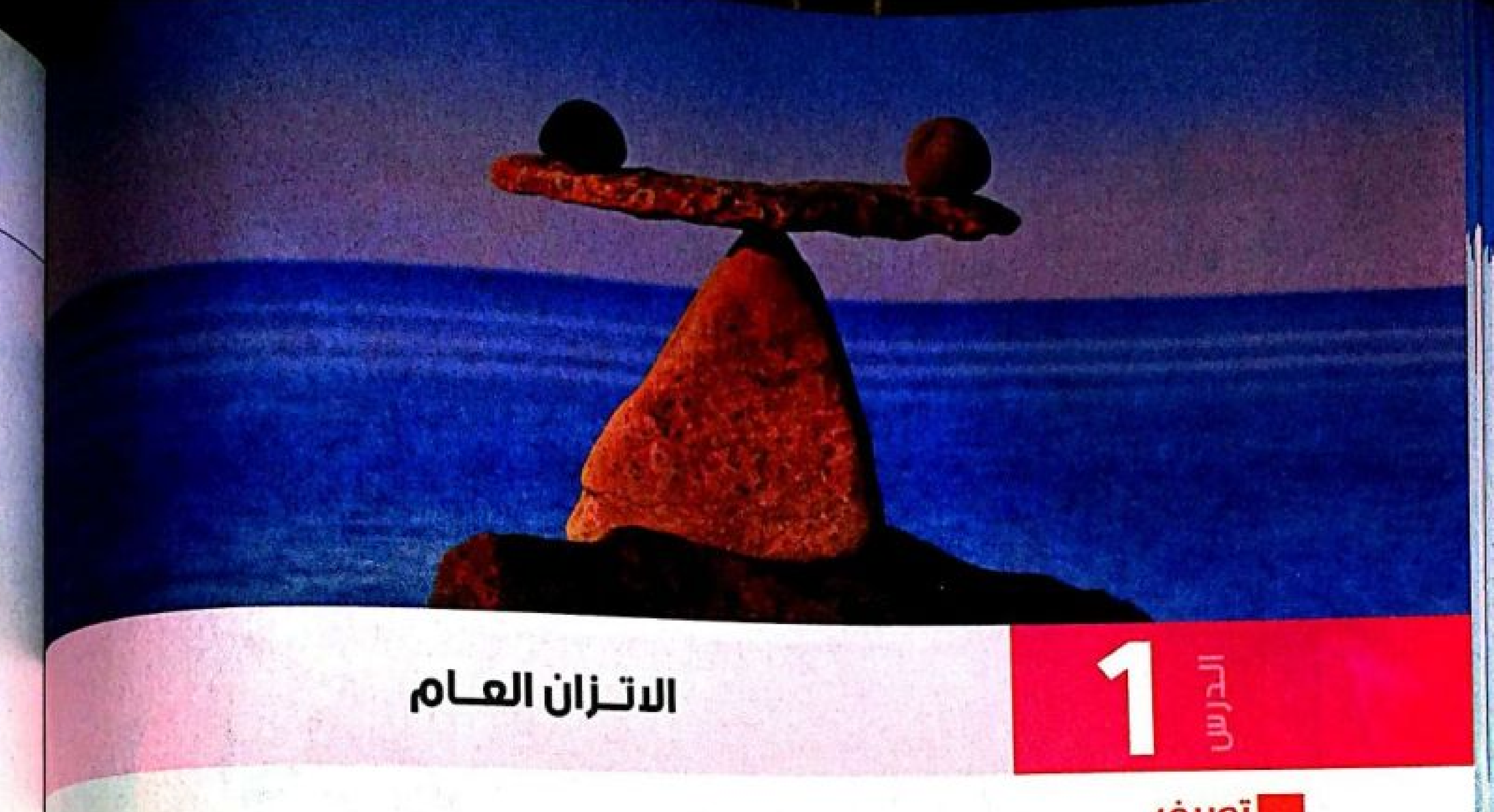
62 $\overline{أب}$ قضيب طوله ١٢٠ سم يتزن إذا ارتكز طرفه أ على سطح الأرض وارتفع طرفه ب بتأثير قوة مقدارها ٧٢ ثقل كجم تؤثر رأسيًا إلى أعلى فى نقطة تبعد عن ب مسافة ٢٠ سم. ويتزن القضيب أيضاً إذا ارتكز الطرف ب على الأرض وارتفع الطرف أ عنها بتأثير قوة مقدارها ٨٤ ثقل كجم تؤثر رأسيًا إلى أعلى فى نقطة أ؟

أوجد : (١) وزن القضيب. (٢) بُعد نقطة تأثير وزنه عن أ؟ «١٤٤ ثقل كجم ، ٥٠ سم»





الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الدرس 1

الاتــزان العــام

تعريف

إذا انعدم مجموع القوى لعدة قوى مستوية ($\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{٠}$) وانعدم عزم المجموعة بالنسبة لكل نقطة ($\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{٠}$) فى مستويها قيل إن «مجموعة القوى متوازنة» وإذا أثرت مثل هذه المجموعة من القوى على جسم ما قيل إن هذا الجسم «متزن».

نظرية

إذا انعدم مجموع القوى لمجموعة ما من القوى المستوية وانعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها كانت هذه المجموعة متزنة.

البرهان :

نفرض أن عزم المجموعة بالنسبة لنقطة (و) ينعدم أى أن $\overrightarrow{جـ}_{و} = \overrightarrow{٠}$

، ∵ متجه مجموع القوى ينعدم ($\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{٠}$)

∴ عزم المجموعة لا يتغير من نقطة لأخرى

، فإذا انعدم هذا العزم بالنسبة للنقطة (و) فإنه ينعدم بالنسبة لأى نقطة أخرى

∴ $\overrightarrow{جـ}$ ينعدم بالنسبة لأى نقطة أخرى

∴ المجموعة متزنة.

(وهو المطلوب)

ملاحظة

عكس النظرية يكون صحيحًا دائمًا :

أى أن : إذا كانت مجموعة القوى متوازنة فإن :

- $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{٠}$ أى ينعدم مجموع (محصلة) القوى.
- $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{٠}$ أى ينعدم عزم مجموعة القوى بالنسبة لأى نقطة.

بناء على النظرية السابقة نستنتج الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية :

الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية

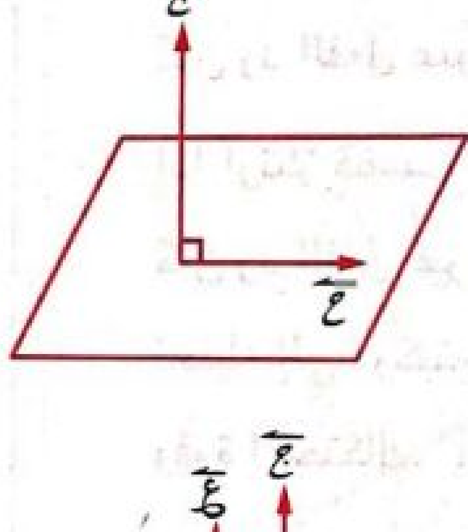
من النظرية السابقة نستنتج أن : لكى تتوازن مجموعة من القوى المستوية لابد أن يتحقق الشرطان التاليان :

(١) ينعدم متجه مجموع القوى. (٢) ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة.

صياغة مكافئة للشروط الكافية واللازمة للاتزان

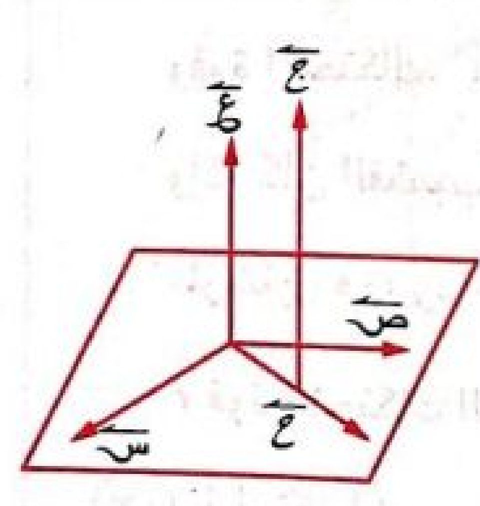
نعلم أن القوى المستوية المؤثرة تقع جميعها فى مستوٍ واحد كما أن النقط التى ننسب إليها عزوم هذه القوى تقع أيضًا فى نفس هذا المستوى.

ومن ذلك نجد أن :



(١) متجه مجموع القوى وهو $\overleftarrow{ح}$ يقع فى مستوى القوى.

(٢) متجه عزم مجموعة القوى وهو $\overleftarrow{ج}$ بالنسبة لأى نقطة واقعة فى مستوى القوى يكون عموديًا على هذا المستوى كما هو واضح بالشكل فإذا أدخلنا مجموعة متجهات الوحدة المتعامدة $\{\overleftarrow{س}، \overleftarrow{ص}، \overleftarrow{ع}\}$ بحيث يقع $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ فى مستوى القوى وبذلك يكون $\overleftarrow{ع}$ عموديًا على هذا المستوى وبذلك يمكن تحليل المتجه $\overleftarrow{ح}$ فى اتجاهى $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ بينما يوازى المتجه $\overleftarrow{ج}$ متجه الوحدة $\overleftarrow{ع}$ كما بالشكل الموضح



$$\therefore \overleftarrow{ح} = س \overleftarrow{س} + ص \overleftarrow{ص} \quad ، \quad \overleftarrow{ج} = ج \overleftarrow{ع}$$

حيث : س = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه $\overleftarrow{س}$

، ص = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه $\overleftarrow{ص}$

، ج = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى منسوبة إلى متجه الوحدة $\overleftarrow{ع}$

ومن ذلك نجد أنه إذا كان س = ص = ج = صفر

فإن : $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{0}$ ، $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{0}$ وحيث أننا لم نحدد اتجاهى $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ فى المستوى فإنه يمكن التوصل إلى الصياغة المكافئة التالية للشروط الكافية واللازمة للاتزان :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لكى تتوازن مجموعة من القوى يكفى ويلزم أن يتحقق الشرطان التاليان :

① ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى أى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها.

أى أن : س = ٠ ، ص = ٠

② ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها.

أى أن : ع = صفر

ملاحظة

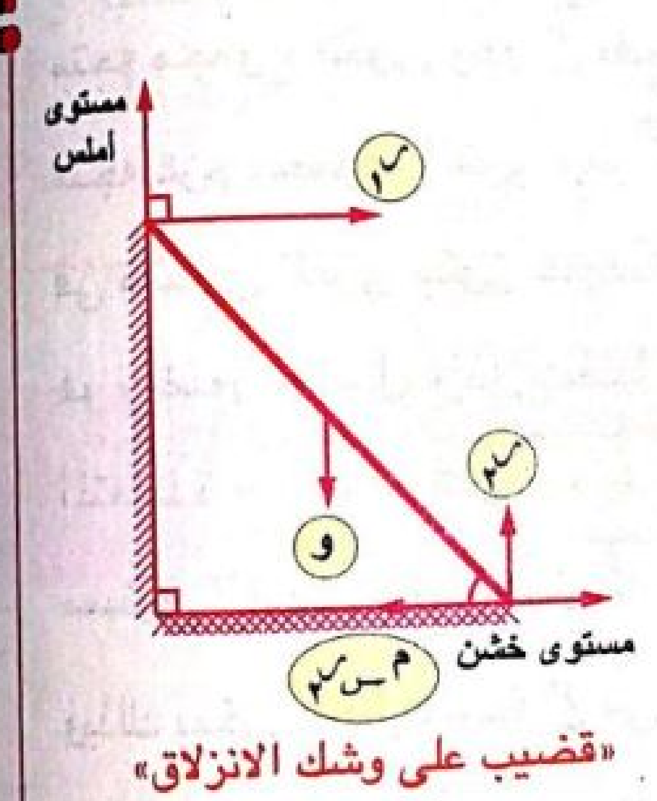
تظل الشروط الكافية واللازمة لتوازن مجموعة من القوى صحيحة فى حالة أن يكون متجها الوحدة $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ غير متوازيين (ولكن ليس متعامدين بالضرورة).

ملاحظات هامة عند تحديد رد الفعل

① إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى أملس كان رد الفعل عموديًا على المستوى.

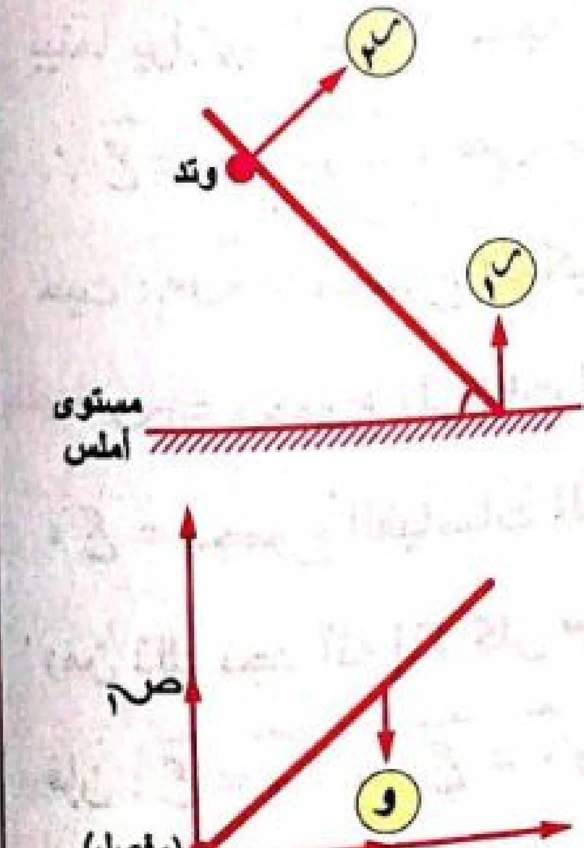
② إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى خشن كان رد الفعل غير معلوم الاتجاه ويمكن تحليله إلى مركبتين هما رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك.

وإذا كان القضيب على وشك الحركة تكون المركبتين هما رد الفعل العمودى (ر) ، قوة الاحتكاك النهائى (م س ر)



«قضيب على وشك الانزلاق»

③ إذا ارتكز قضيب بإحدى نقاطه الداخلية على (وتد – جسم آخر) كان رد الفعل عموديًا على القضيب.



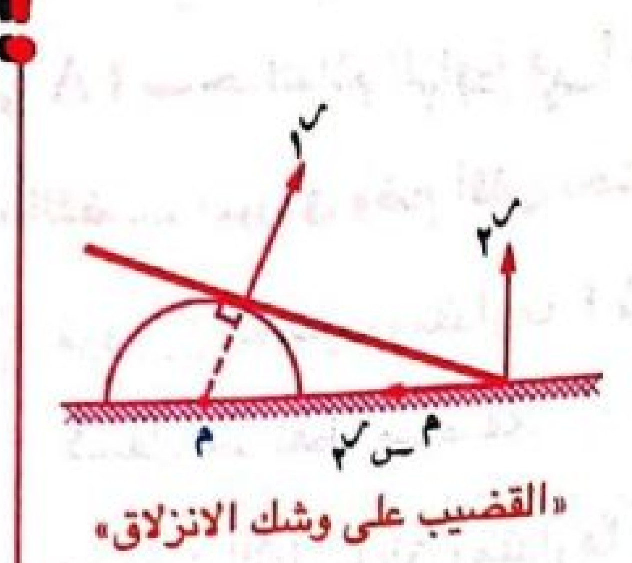
④ رد فعل المفصل يكون غير معلوم الاتجاه ويمكن تحليله إلى مركبتين هما :

$س_1$ (فى اتجاه $\overleftarrow{أس}$)

، $ص_1$ (فى اتجاه $\overleftarrow{أص}$)

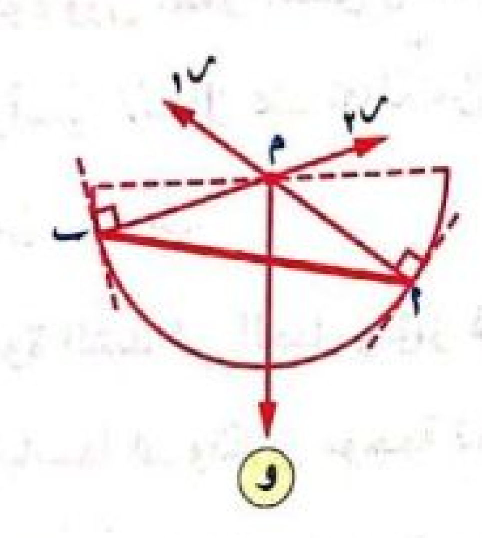
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ رد فعل نصف كرة ملساء على قضيب يستند مماسًا لسطحها يكون عموديًا على القضيب مارًا بمركز الكرة.



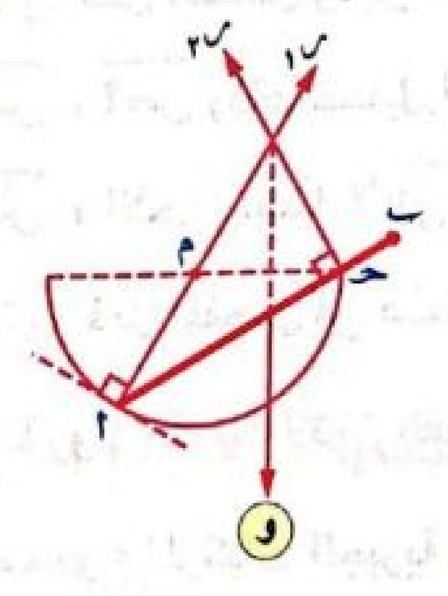
«القضيب على وشك الانزلاق»

⑥ عندما يستند قضيب داخل سطح نصف كروى أملس يكون ردى الفعل عند طرفيه عموديين على المماسين للكرة عند نقط الارتكاز ويمران بمركز الكرة. ويستقر القضيب فى الوضع الذى يجعل الخط الرأسى المار بمركز الكرة يمر بنقطة تأثير الوزن على القضيب.



⑦ عندما يستند قضيب $\overline{أب}$ على حافة وعاء نصف كروى بإحدى نقطة (حـ) فإن :

* رد الفعل عند أ يكون عموديًا على المماس للكرة عند أ ويمر بمركز الكرة.
* رد الفعل عند حـ يكون عموديًا على القضيب.



مثال ①

$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٤ ثقل كجم وطوله ١٢ ديسم يتصل بأحد طرفيه بمفصل مثبت عند طرفه أ والمفصل مُثبت فى حائط رأسى. عُلق ثقل قدره ٦ ثقل كجم من نقطة على القضيب تبعد ٢ ديسم عن طرفه أ ثم حُفِظَ القضيب فى وضع أفقى بواسطة ربطه من ب بحبل رفيع $\overline{بحـ}$ مُثبت طرفه حـ بنقطة على الحائط تقع رأسيًا فوق أ تمامًا وتبعد عن أ مسافة ٩ ديسم.

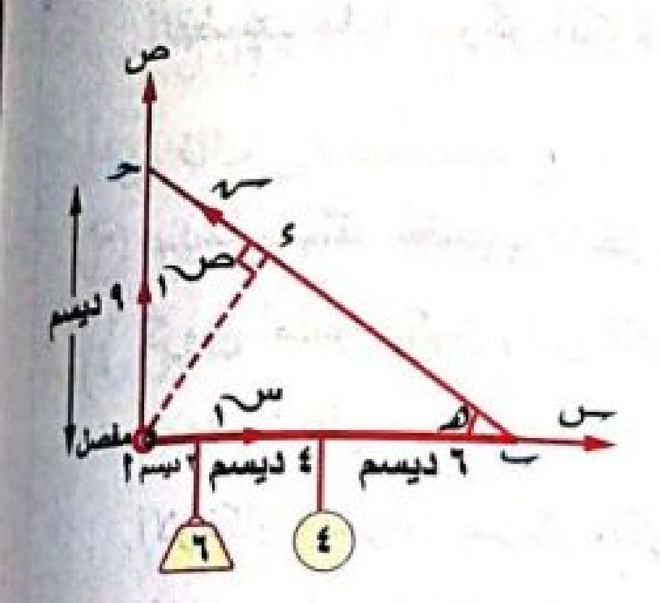
أوجد : ① مقدار الشد فى الحبل.

② مقدار واتجاه قوة رد فعل المفصل.

الحـــل

في Δ أ ب ح القائم الزاوية في أ يكون ب ح $= \sqrt{(١٢)^٢ + (٩)^٢} = ١٥$ ديسم

- **القضيب متزن في وضع أفقي تحت تأثير القوى الآتية :**



(١) قوة وزن القضيب ومقدارها ٤ ثقل كجم وتعمل رأسيًا لأسفل عند نقطة منتصفه.

(٢) قوة وزن الثقل المُعلق ومقدارها ٦ ثقل كجم وتعمل رأسيًا لأسفل عند نقطة من القضيب تبعد ٢ ديسم من المفصل.

(٣) قوة الشد في الحبل وتؤثر في الطرف ب للقضيب ويميل خط عملها على الأفقي بزاوية قياسها هـ وتكون موجهة نحو الحائط ومقدارها ش

(٤) قوة رد فعل المفصل وتؤثر عند طرف القضيب أ المتصل بالمفصل ونختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{\text{أس}}$ ، $\overleftarrow{\text{أص}}$ وذلك لتحليل القوى وأحد هذين الاتجاهين أفقي وموجه بعيدًا عن الحائط وهو $\overleftarrow{\text{أس}}$ ، الآخر رأسيًا لأعلى وهو $\overleftarrow{\text{أص}}$ ثم نعتبر أن س١ ، ص١ هما المركبتان الجبريتان لقوة رد فعل المفصل في هذين الاتجاهين حيث س١ في اتجاه $\overleftarrow{\text{أس}}$ ، ص١ في اتجاه $\overleftarrow{\text{أص}}$

بكتابة الشروط الكافية لاتزان القضيب وهي :

انعدام مجموع المركبات الجبرية للقوى في اتجاه $\overleftarrow{\text{أس}}$ (أي س = صفر)

∴ س١ − ش جتا هـ = ٠ ∴ س١ − ش × $\frac{١٢}{١٥}$ = صفر

∴ س١ = $\frac{٤}{٥}$ ش (١)

، انعدام مجموع المركبات الجبرية للقوى في اتجاه $\overleftarrow{\text{أص}}$ (أي ص = صفر)

∴ ص١ + ش جا هـ − ٤ − ٦ = صفر

∴ ص١ + $\frac{٣}{٥}$ ش = ١٠ (٢)

، انعدام مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة ولتكن أ مثلًا

∴ ش × أ ء − ٤ × ٦ − ٦ × ٢ = ٠

حيث أء طول العمود الساقط من أ على $\overline{\text{ب ح}}$ ، أء = أب جا هـ = ١٢ × $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٣٦}{٥}$ ديسم

∴ ش × $\frac{٣٦}{٥}$ − ٢٤ − ١٢ = ٠ ∴ $\frac{٣٦}{٥}$ ش = ٣٦

∴ ش = ٥ ثقل كجم

∴ مقدار الشد فى الحبل = ٥ ثقل كجم **(المطلوب أولًا)**

وبالتعويض فى (١) : ∴ س$_١$ = $\frac{٤}{٥}$ × ٥ ∴ س$_١$ = ٤ ثقل كجم

وبالتعويض فى (٢) عن مقدار ش ∴ ص$_١$ + $\frac{٣}{٥}$ × ٥ = ١٠

∴ ص$_١$ = ٧ ثقل كجم

وبذلك يمكن تعيين مقدار واتجاه قوة رد فعل المفصل

وبفرض أن ر هو مقدار هذه القوة ، ل قياس زاوية

ميل خط عملها على $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ كما هو موضح بالشكل

فإن : ر = $\sqrt{\text{س}_١^٢ + \text{ص}_١^٢}$ = $\sqrt{(٤)^٢ + (٧)^٢}$ = $\sqrt{٦٥}$ ثقل كجم

، طا ل = $\frac{\text{ص}_١}{\text{س}_١}$ = $\frac{٧}{٤}$ = ١,٧٥ ∴ ل ≃ ٦٠° ١٥َ

∴ مقدار قوة رد فعل المفصل = $\sqrt{٦٥}$ ثقل كجم وتصنع زاوية قياسها ٦٠° ١٥َ مع $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

(المطلوب ثانيًا)

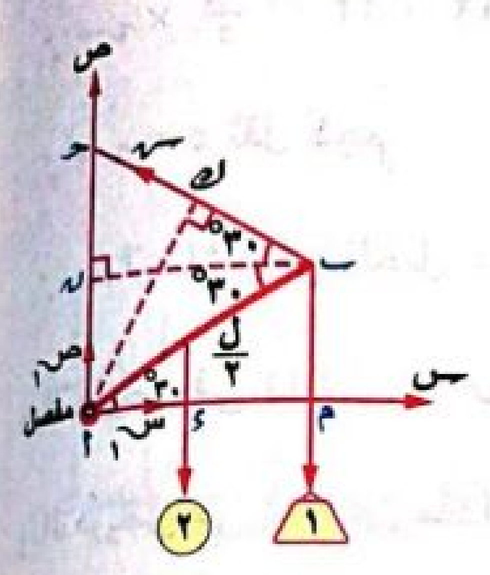
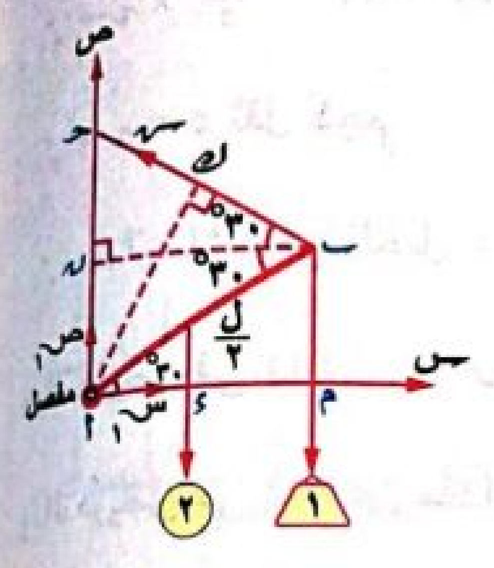
مثال ٢

أب قضيب منتظم وزنه ٢ نيوتن يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى ويحمل عند طرفه ب ثقلًا قدره نيوتن واحد. حفظ القضيب فى وضع يميل فيه على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° بواسطة حبل مساوٍ للقضيب فى الطول ، يتصل أحد طرفيه بالطرف ب للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة ح من الحائط تقع رأسيًا أعلى أ وعلى بُعد منها يساوى طول القضيب.

أوجد : (١) مقدار الشد فى الحبل. (٢) مقدار قوة رد فعل المفصل عند أ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل

نفرض أن طول القضيب يساوى ل فيكون Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع وقياس كل زاوية من زواياه الداخلة ٦٠°، برسم $\overline{ب هـ} \perp \overline{أ حـ}$

∴ ق(∠حـ ب هـ) = ق(∠أ ب هـ) = ٣٠° ونفرض أن المركبتين الجبريتين لرد فعل المفصل عند أ هما $س_١$، $ص_١$ فى الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{أس}$، $\overleftarrow{أص}$ كما فى الشكل.

• بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{أس}$ حيث س = صفر :

∴ $س_١$ − ش جتا ٣٠° = صفر ∴ $س_١ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ش (١)

• وبتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{أص}$ حيث ص = صفر :

∴ $ص_١$ + ش جا ٣٠° − ١ − ٢ = صفر ∴ $ص_١ = ٣ - \frac{١}{٢}$ ش (٢)

، ∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة أ = صفر

∴ −٢ × أء − ١ × أم + ش × أك = صفر

∴ −٢ × $\frac{ل}{٢}$ جتا ٣٠° − ١ × ل جتا ٣٠° + ش × ل جا ٦٠° = صفر

∴ $-ل\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{ل\sqrt{٣}}{٢} + \frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$ ش = ٠ ∴ ش = ٢ نيوتن

∴ مقدار قوة الشد فى الحبل = ٢ نيوتن. **(المطلوب أولًا)**

وبالتعويض فى (١) : ∴ $س_١ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٢$ ∴ $س_١ = \sqrt{٣}$ نيوتن

وبالتعويض فى (٢) : ∴ $ص_١ = ٣ - \frac{١}{٢} \times ٢$ ∴ $ص_١ = ٢$ نيوتن

∴ مقدار قوة رد فعل المفصل ر $= \sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢} = \sqrt{(\sqrt{٣})^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٧}$ نيوتن

∴ مقدار قوة رد فعل المفصل عند أ = $\sqrt{٧}$ نيوتن. **(المطلوب ثانيًا)**

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ③

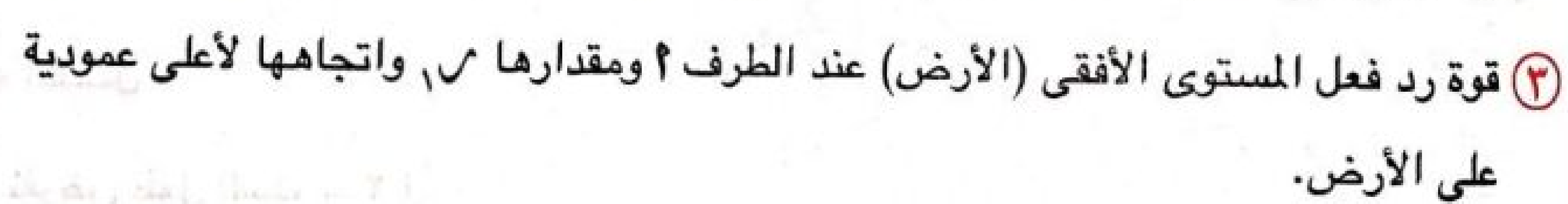
$\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه ٣٠ ثقل كجم وطوله ٤ أمتار يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم فى مستوٍ رأسى وفى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى تقع رأسيًا أسفل ب تمامًا ، فإذا صعد رجل وزنه ٨٠ ثقل كجم على هذا السلم فأثبت أن مقدار الشد فى الحبل يزداد كلما صعد الرجل وإذا كان الحبل لا يتحمل شدًا يزيد مقداره على ٦٧ ثقل كجم فأوجد طول أكبر مسافة يمكن أن يصعدها الرجل دون أن ينقطع الحبل.

الحـل

السلم متزن تحت تأثير القوى الآتية :

① قوة وزن السلم ومقدارها ٣٠ ثقل كجم وتعمل رأسيًا لأسفل عند نقطة منتصفه (لأن السلم منتظم).

② قوة وزن الرجل الصاعد على السلم ومقدارها ٨٠ ثقل كجم وتعمل رأسيًا لأسفل عند نقطة من نقط السلم مثل حـ



③ قوة رد فعل المستوى الأفقى (الأرض) عند الطرف أ ومقدارها $ر_1$ واتجاهها لأعلى عمودية على الأرض.

④ قوة رد فعل الحائط عند الطرف ب ومقدارها $ر_2$ واتجاهها أفقيًا وعمودية على الحائط

⑤ قوة الشد فى الحبل (ش) وبأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$ حيث و نقطة فى المستوى الأفقى تقع رأسيًا أسفل ب ونفرض أن الرجل صعد مسافة س مترًا على السلم.

وبالتحليل فى الاتجاهين $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$ مع كتابة الشروط الكافية لاتزان السلم نجد أن :

$ر_2 - ش = ٠$ ∴ $ر_2 = ش$ (١)

، $ر_1 - ٣٠ - ٨٠ = ٠$ ∴ $ر_1 = ١١٠$ (٢)

∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة أ = صفر

∴ ٣٠ × ٢ حتا ٤٥° + ٨٠ × س حتا ٤٥° − $ر_2$ × ٤ حا ٤٥° = صفر

$\therefore$ ٦٠ + ٨٠ س − ٤ ر٢ = صفر ولكن ر٢ = ش

$\therefore$ ٦٠ + ٨٠ س − ٤ ش = صفر

$\therefore$ ٤ ش = ٦٠ + ٨٠ س $\therefore$ ش = ١٥ + ٢٠ س

ومن هذه العلاقة نلاحظ أن مقدار الشد ش يزداد كلما ازدادت قيمة س أى كلما صعد الرجل لمسافة أكبر على السلم ويكون مقدار س أكبر ما يمكن عندما يكون مقدار ش أكبر ما يمكن وهو ٦٧ ثقل كجم.

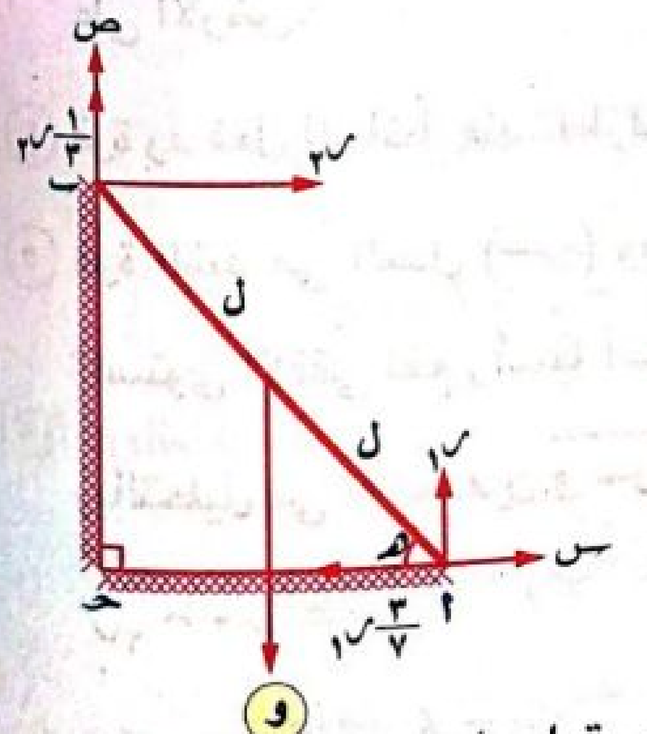
$\therefore$ ٦٧ = ١٥ + ٢٠ س $\therefore$ ٢٠ س = ٥٢ $\therefore$ س = ٢,٦ مترًا

$\therefore$ أطول مسافة يمكن أن يصعدها الرجل دون أن ينقطع الحبل تساوى ٢,٦ مترًا.

مثال ٤

أب سلم منتظم وزنه و يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة ويرتكز بطرفه ب على حائط رأسى خشن بحيث يقع السلم فى مستوٍ رأسى ويميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإذا علم أن معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض يساوى $\frac{٣}{٧}$ وبين السلم والحائط يساوى $\frac{١}{٣}$ فأوجد قياس زاوية ميل السلم على الأرض فى الحالة التى يكون فيها السلم على وشك الانزلاق.

الحل



نفرض طول السلم = ٢ ل

السلم متزن تحت تأثير القوى الآتية :

① قوة وزن السلم ومقدارها (و) وتعمل رأسيًا لأسفل عند نقطة منتصفه (لأن السلم منتظم).

② قوة رد الفعل العمودى للمستوى الأفقى عند الطرف أ ومقدارها ر١

③ قوة رد الفعل العمودى للمستوى الرأسى عند الطرف ب ومقدارها ر٢

④ قوة الاحتكاك النهائية عن الطرف أ ومقدارها $\frac{٣}{٧}$ ر١ وموجهة نحو الحائط لأن السلم على وشك الانزلاق.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٥) قوة الاحتكاك النهائية عند الطرف ب ومقدارها $\frac{١}{٣}$ ر٢ وموجهة رأسيًا لأعلى.

نعتبر المستوى الرأسى الذى يتزن فيه السلم ونأخذ فيه الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{جـ س}$ ، $\overleftarrow{جـ ص}$ حيث جـ نقطة على الأرض الأفقية تقع رأسيًا أسفل ب

بتحليل القوى فى الاتجاهين $\overleftarrow{جـ س}$ ، $\overleftarrow{جـ ص}$ مع كتابة الشروط الكافية لاتزان السلم.

نجد أن : ر٢ − $\frac{٣}{٧}$ ر١ = ٠ ∴ ر٢ = $\frac{٣}{٧}$ ر١ (١)

، ر١ + $\frac{١}{٣}$ ر٢ − و = ٠ ∴ ر١ + $\frac{١}{٣}$ ر٢ = و (٢)

، ∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة أ = صفر

∴ و × ل جتا هـ − ر٢ × ٢ ل جا هـ − $\frac{١}{٣}$ ر٢ × ٢ ل جتا هـ = صفر

(حيث هـ قياس زاوية ميل السلم على الأرض)

∴ و جتا هـ − ٢ ر٢ جا هـ − $\frac{٢}{٣}$ ر٢ جتا هـ = صفر (٣)

، من المعادلة (١) : ر١ = $\frac{٧}{٣}$ ر٢

وبالتعويض فى (٢) : ∴ $\frac{٧}{٣}$ ر٢ + $\frac{١}{٣}$ ر٢ = و

∴ $\frac{٨}{٣}$ ر٢ = و ∴ ر٢ = $\frac{٣}{٨}$ و

وبالتعويض فى (٣) :

∴ و جتا هـ − ٢ × $\frac{٣}{٨}$ و جا هـ − $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{٣}{٨}$ و جتا هـ = صفر (وبقسمة الطرفين على و)

∴ جتا هـ − $\frac{٣}{٤}$ جا هـ − $\frac{١}{٤}$ جتا هـ = صفر ∴ $\frac{٣}{٤}$ جتا هـ − $\frac{٣}{٤}$ جا هـ = ٠

∴ جتا هـ = جا هـ ∴ هـ = ٤٥°

∴ قياس زاوية ميل السلم على الأرض الأفقية يساوى ٤٥°

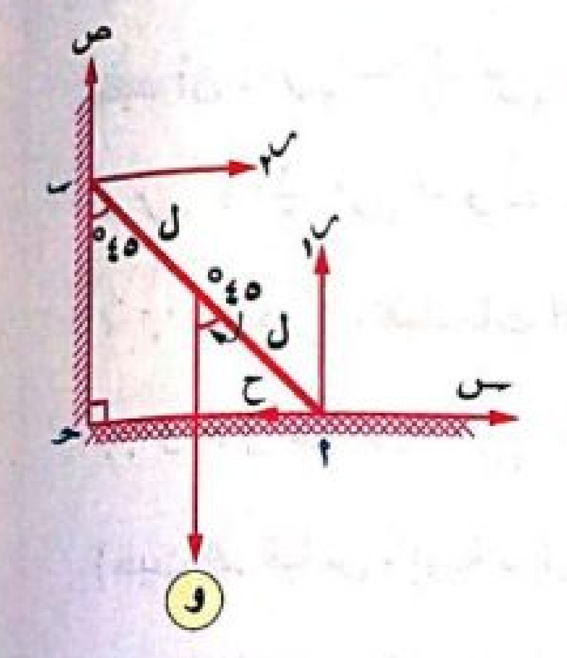
مثال ٥

أب سلم منتظم وزنه (و) يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس بحيث يقع السلم فى مستوٍ رأسى ويميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان السلم متزنًا

فأثبت أن : (١) معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{١}{٢}$

(٢) إذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{٢}{٣}$ فإن مقدار القوة الأفقية التى تؤثر عند أ وتجعله على وشك الحركة نحو الحائط تعادل $\frac{٧}{٦}$ و

الحـل



(١) ليكن السلم هو $\overline{أب}$ وطوله ٢ ل ، $ر_1$ قوة رد الفعل العمودى عند الطرف أ المستند على الأرض الخشنة ، $ر_2$ قوة رد الفعل عند الطرف ب المستند على الحائط الأملس ، ح قوة الاحتكاك عند أ ، نعتبر المستوى الرأسى الذى يتزن فيه السلم ونأخذ فيه اتجاهين متعامدين.

$\overleftarrow{جـ س}$ ، $\overleftarrow{جـ ص}$ (كما بالشكل) حيث جـ نقطة على الأرض الأفقية تقع رأسيًا أسفل ب نلاحظ أن الاتجاه المحتمل لحركة الطرف أ يكون بعيدًا عن الحائط ولذلك يجب أن تكون قوة الاحتكاك ح موجهة نحو الحائط.

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{جـ س}$: ∴ $ر_2$ − ح = ٠ ∴ $ر_2$ = ح (١)

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{جـ ص}$: ∴ $ر_1$ − و = ٠ ∴ $ر_1$ = و (٢)

، ∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة أ = صفر

∴ و × ل جا ٤٥° − $ر_2$ × ٢ ل جا ٤٥° = صفر (وبقسمة الطرفين على ل جا ٤٥°)

∴ و − ٢ $ر_2$ = ٠ ∴ $ر_2 = \frac{و}{٢}$ (٣)

من (١) ، (٣) : ∴ $ح = \frac{و}{٢}$ ولكن ح ≤ $م_س$ $ر_1$

وبالتعويض فى هذه المتباينة عن كلٍ من $ر_1$ ، ح :

∴ $\frac{و}{٢} \leq م_س$ و ∴ $م_س \geq \frac{١}{٢}$

∴ معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{١}{٢}$ **(المطلوب أولًا)**

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢) السلم على وشك الحركة نحو الحائط :

نفرض أن ق مقدار القوة المطلوبة وتكون هذه القوة موجهة نحو الحائط أما قوة الاحتكاك النهائية فتكون موجهة بعيدًا عن الحائط ومقدارها يساوى $\frac{٢}{٣} ر_١$

بتحليل القوى فى اتجاه حـ س :

$\frac{٢}{٣} ر_١ + ر_٢ - ق = ٠$ ∴ $ق = ر_٢ + \frac{٢}{٣} ر_١$ **(١)**

بتحليل القوى فى اتجاه حـ ص :

∴ $ر_١ - و = ٠$ ∴ $ر_١ = و$ **(٢)**

، ∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة إلى أ = صفر

∴ $و \times ل \text{ جا } ٤٥^\circ - ر_٢ \times ٢ ل \text{ جتا } ٤٥^\circ = ٠$ (وبقسمة الطرفين على $\frac{ل}{\sqrt{٢}}$)

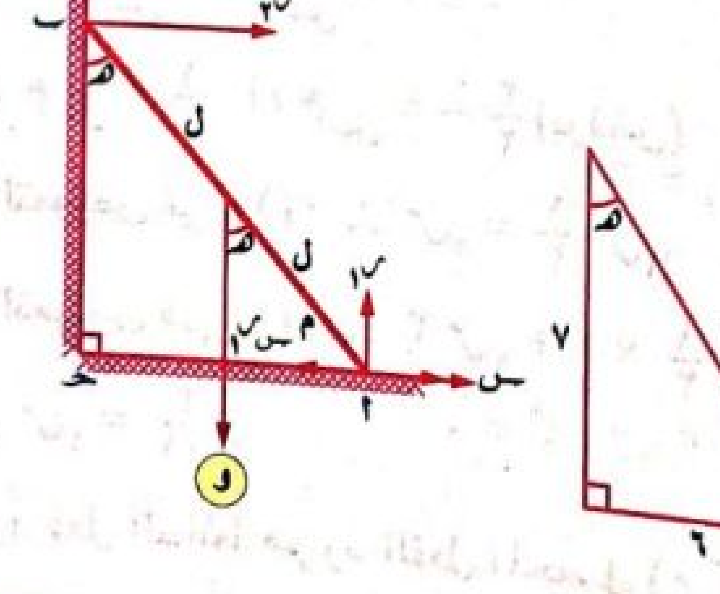
∴ $و - ٢ ر_٢ = ٠$ ∴ $ر_٢ = \frac{١}{٢} و$ **(٣)**

وبالتعويض من (٢) ، (٣) فى (١) ينتج أن :

$ق = \frac{١}{٢} و + \frac{٢}{٣} و$ ∴ $ق = \frac{٧}{٦} و$ **(المطلوب ثانيًا)**

مثال ٦

ساق منتظمة وزنها (و) ترتكز بطرفها السفلى أ على أرض أفقية وترتكز بطرفها العلوى ب على حائط رأسى وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والحائط يساوى ضعف معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والأرض ، فإذا كانت الساق على وشك الانزلاق عندما كانت تصنع مع الحائط زاوية ظلها $\frac{٦}{٧}$ فأثبت أن مقدار رد فعل الحائط يساوى $\frac{\sqrt{١٣}}{١١}$ و



الحل

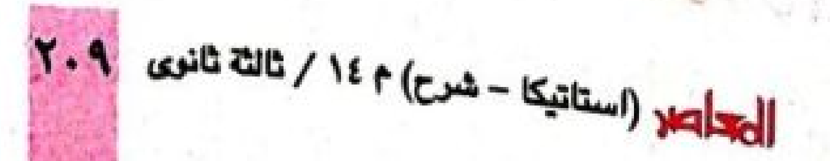
نفرض أن طول الساق = ٢ ل

، معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والأرض = $م_س$

، قياس زاوية ميل الساق على الرأسى = هـ

، ∵ ظا هـ = $\frac{٦}{٧}$ ∴ جا هـ = $\frac{٦}{\sqrt{٨٥}}$

، جتا هـ = $\frac{٧}{\sqrt{٨٥}}$



بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{حـ س}$:

$\therefore$ ر$_2$ − م$_س$ ر$_1$ = ٠ $\qquad$ $\therefore$ ر$_2$ = م$_س$ ر$_1$ $\quad$ (١)

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{حـ ص}$:

$\therefore$ ر$_1$ + ٢ م$_س$ ر$_2$ − و = ٠ $\qquad$ $\therefore$ ر$_1$ + ٢ م$_س$ ر$_2$ = و $\quad$ (٢)

، $\because$ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة أ = صفر

$\therefore$ و × ل جا هـ − ر$_2$ × ٢ ل جتا هـ − ٢ م$_س$ ر$_2$ × ٢ ل جا هـ = صفر

$\therefore$ و جا هـ − ٢ ر$_2$ جتا هـ − ٤ م$_س$ ر$_2$ جا هـ = صفر

$\therefore \frac{و \times ٦}{\sqrt{٨٥}}$ − ٢ ر$_2$ × $\frac{٧}{\sqrt{٨٥}}$ − ٤ م$_س$ ر$_2$ × $\frac{٦}{\sqrt{٨٥}}$ = صفر

$\therefore$ ٦ و − ١٤ ر$_2$ − ٢٤ م$_س$ ر$_2$ = صفر $\quad$ (٣)

، من (٢) : ر$_1$ = و − ٢ م$_س$ ر$_2$

وبالتعويض فى (١) : $\therefore$ ر$_2$ = م$_س$ (و − ٢ م$_س$ ر$_2$)

$\therefore$ ر$_2$ = م$_س$ و − ٢ م$^2_س$ ر$_2$ $\qquad$ $\therefore$ ر$_2$ + ٢ م$^2_س$ ر$_2$ = م$_س$ و

$\therefore$ ر$_2$ (١ + ٢ م$^2_س$) = م$_س$ و $\qquad$ $\therefore$ ر$_2$ = $\frac{م_س و}{١ + ٢ م^2_س}$

وبالتعويض فى (٣) : $\therefore$ ٦ و − $\frac{١٤ م_س و}{١ + ٢ م^2_س}$ − $\frac{٢٤ م^2_س و}{١ + ٢ م^2_س}$ = صفر

[وبقسمة الطرفين على و ، الضرب فى (١ + ٢ م$^2_س$)]

$\therefore$ ٦ + ١٢ م$^2_س$ − ١٤ م$_س$ − ٢٤ م$^2_س$ = صفر $\qquad$ $\therefore$ − ١٢ م$^2_س$ − ١٤ م$_س$ + ٦ = ٠

$\therefore$ ٦ م$^2_س$ + ٧ م$_س$ − ٣ = ٠ $\qquad$ $\therefore$ (٣ م$_س$ − ١) (٢ م$_س$ + ٣) = ٠

$\therefore$ م$_س$ = $\frac{١}{٣}$ أ، م$_س$ = − $\frac{٣}{٢}$ (يرفض)

وبالتعويض فى (١) : $\therefore$ ر$_2$ = $\frac{١}{٣}$ ر$_1$ $\qquad$ $\therefore$ ر$_1$ = ٣ ر$_2$

وبالتعويض فى (٢) : $\therefore$ ٣ ر$_2$ + ٢ × $\frac{١}{٣}$ ر$_2$ = و $\qquad$ $\therefore \frac{١١}{٣}$ ر$_2$ = و

$\therefore$ ر$_2$ = $\frac{٣}{١١}$ و

، رد فعل الحائط هو رد الفعل المحصل ($\bar{ر}$) عند ب أى محصلة ر$_2$ ، ٢ م$_س$ ر$_2$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ رد فعل الحائط عند ب $= \sqrt{(ر_٢)^٢ + (٢ م_س ر_٢)^٢} = \sqrt{ر_٢^٢ + ٤ م_س^٢ ر_٢^٢} = \sqrt{ر_٢^٢ (١ + ٤ م_س^٢)}$

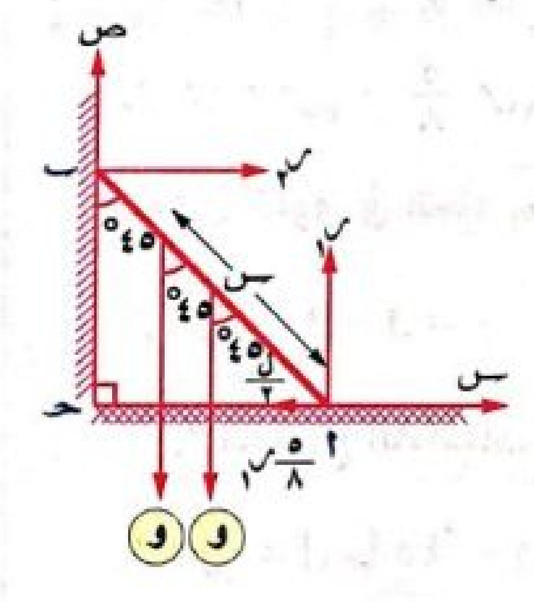
$= ر_٢ \sqrt{١ + ٤ م_س^٢} = \frac{٣}{١١} و \sqrt{١ + \frac{٤}{٩}} = \frac{٣}{١١} و \times \frac{\sqrt{١٣}}{٣}$

∴ رد فعل الحائط عند ب $= \frac{\sqrt{١٣}}{١١}$ و **(وهو المطلوب)**

مثال ٧

يستند سلم منتظم وزنه (و) بطرفه السفلى ا على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس بحيث يقع السلم فى مستوٍ رأسى ويميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض $\frac{٥}{٨}$ فأوجد طول المسافة التى يمكن أن يصعدها رجل وزنه يساوى وزن السلم قبل أن ينزلق ثم أوجد بدلالة وزن السلم مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند منتصف السلم لكى يتمكن الرجل من الصعود حتى نهاية السلم.

الحل



(١) نفرض أن طول السلم يساوى ل وأن الرجل صعد على السلم مسافة طولها س قبل أن ينزلق السلم أى السلم على وشك الانزلاق وبذلك تكون قوة الاحتكاك النهائية عند الطرف ا $= \frac{٥}{٨} ر_١$ موجهة نحو الحائط.

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{جـ س}$:

∴ $ر_٢ - \frac{٥}{٨} ر_١ = ٠$ ∴ $ر_٢ = \frac{٥}{٨} ر_١$ (١)

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{جـ ص}$:

∴ $ر_١ - و - و = ٠$ ∴ $ر_١ = ٢ و$ (٢)

، ∵ $ج_ا$ = صفر :

∴ $و \times \frac{ل}{٢} جا ٤٥° + و \times س جا ٤٥° - ر_٢ \times ل جتا ٤٥° = ٠$

(وبقسمة الطرفين على جا ٤٥°)

$\therefore \frac{و ل}{٢} + و س - ر_٢ ل = صفر$ $\therefore و س = ر_٢ ل - \frac{و ل}{٢}$ (٣)

، بالتعويض من (٢) فى (١) :

$\therefore ر_٢ = \frac{٥}{٨} \times ٢ و$ $\therefore ر_٢ = \frac{٥}{٤} و$

وبالتعويض فى (٣) :

$\therefore و س = \frac{٥}{٤} و ل - \frac{و ل}{٢}$ $\therefore س = \frac{٥}{٤} ل - \frac{١}{٢} ل$

$\therefore س = \frac{٣}{٤} ل$

$\therefore$ الرجل يمكنه أن يصعد $\frac{٣}{٤}$ طول السلم قبل أن ينزلق السلم. (المطلوب أولًا)

② بفرض أن مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند منتصف السلم = ق

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{حـ س}$:

$\therefore ر_٢ - ق - \frac{٥}{٨} ر_١ = ٠$

$\therefore ق = ر_٢ - \frac{٥}{٨} ر_١$ (١)

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{حـ ص}$:

$\therefore ر_١ - و - و = ٠$ $\therefore ر_١ = ٢ و$ (٢)

، $\because$ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة ب = صفرًا

$\therefore ر_١ \times ل \text{ جا } ٤٥° - و \times \frac{ل}{٢} \text{ جا } ٤٥° - ق \times \frac{ل}{٢} \times \text{ جتا } ٤٥° - \frac{٥}{٨} ر_١ \times ل \text{ جتا } ٤٥° = ٠$

(وبقسمة الطرفين على $\frac{ل}{\sqrt{٢}}$)

$\therefore ر_١ - \frac{و}{٢} - \frac{ق}{٢} - \frac{٥}{٨} ر_١ = ٠$ $\therefore ٢ ر_١ - و - ق - \frac{٥}{٤} ر_١ = ٠$ (٣)

وبالتعويض عن قيمة $ر_١ = ٢ و$ من (٢) فى (٣) :

$\therefore ٤ و - و - ق - \frac{٥}{٤} \times ٢ و = ٠$ $\therefore ق = \frac{١}{٢} و$

$\therefore$ أقل قوة أفقية تؤثر عند منتصف السلم لكى يتمكن الرجل من الصعود إلى نهاية السلم مقدارها يساوى $\frac{١}{٢}$ و

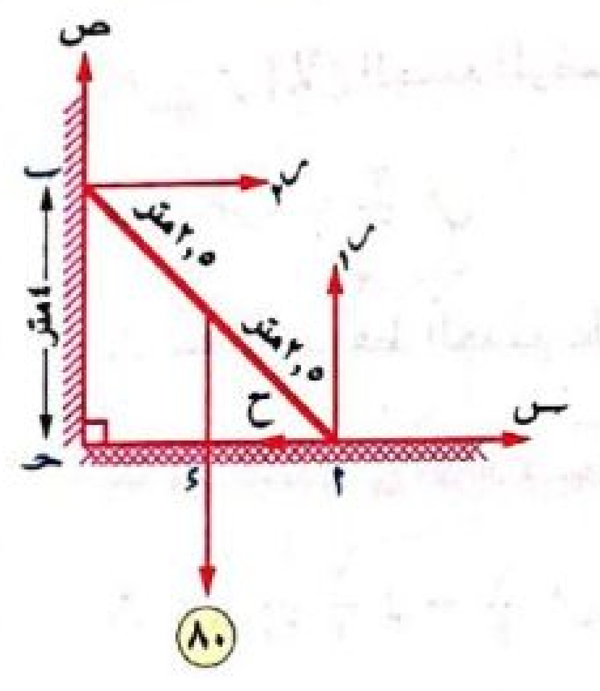
(المطلوب ثانيًا)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٨

$\overline{أب}$ سلم منتظم طوله ٥ متر ووزنه ٨٠ ثقل كجم يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك السكونى بينها وبين السلم $\frac{١}{٤}$ ويرتكز بطرفه ب على حائط رأسى أملس. أثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن عندما يكون الطرف ب على بعد ٤ متر من سطح الأرض. ثم أوجد مقدار أصغر وزن لجسم يوضع على الأرض عند طرف السلم أ حتى يمنعه من الانزلاق علمًا بأن معامل الاحتكاك السكونى بين الأرض والجسم $\frac{٢}{٣}$

الحل



① ب حـ = ٤ متر ، أ ب = ٥ متر

∴ أ حـ = ٣ متر ∴ أ ء = ء حـ = ١,٥ متر

بفرض أن ح هى مقدار قوة الاحتكاك عند الطرف أ وحيث أنها لازمة لحفظ السلم فى حالة توازن فهى تكون موجهة نحو الحائط ثم نقارن مقدار هذه القوة بمقدار قوة الاحتكاك النهائى عند أ

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{حـ س}$: ∴ $ر_٢$ − ح = ٠ ∴ $ر_٢$ = ح (١)

بتحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{حـ ص}$: ∴ $ر_١$ − ٨٠ = ٠ ∴ $ر_١$ = ٨٠ (٢)

، ∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة أ = صفر

∴ ٨٠ × ١,٥ − $ر_٢$ × ٤ = صفر ∴ $ر_٢$ = ٣٠ ثقل كجم

∴ من (١) يكون مقدار قوة الاحتكاك عند الطرف أ اللازمة لحفظ السلم فى حالة توازن هى ح = ٣٠ ثقل كجم

وحيث مقدار قوة الاحتكاك النهائية عند أ = $م_س$ $ر_١$ = $\frac{١}{٤}$ × ٨٠ = ٢٠ ثقل كجم

∴ ح > $م_س$ $ر_١$ (وهذا تعارض)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ السلم لا يمكن أن يتزن إذا كان بُعد الطرف ب للسلم عن سطح الأرض ٤ متر. **(المطلوب أولاً)**

② نفرض أن مقدار وزن الجسم المطلوب وضعه على الأرض عند طرف السلم (أ) = و ، مقدار قوة رد الفعل العمودى المؤثرة على هذا الجسم = ر فيكون الجسم متزناً تحت تأثير قوة وزنه ومقدارها (و) ، رد الفعل العمودى ومقدار (ر) ، ضغط السلم على الجسم ومقداره (ض) وقوة الاحتكاك النهائى ($م_س$ ر) لأن الجسم الموضوع عند (أ) على وشك الحركة

حيث ض = $\frac{٢}{٣}$ ر   ∴ ض = $\frac{٢}{٣}$ و

∴ مقدار ضغط الجسم على السلم = $\frac{٢}{٣}$ و ويكون موجهاً نحو الحائط كما بالشكل.

بتحليل القوى فى الاتجاه $\overleftarrow{حـ س}$:

∴ $ر_٢ - \frac{٢}{٣} و - \frac{١}{٤} ر_١ = ٠$

∴ $ر_٢ = \frac{٢}{٣} و + \frac{١}{٤} ر_١$ (١)

بتحليل القوى فى الاتجاه $\overleftarrow{حـ ص}$:

∴ $ر_١ - ٨٠ = ٠$

∴ $ر_١ = ٨٠$ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ $ر_٢ = \frac{٢}{٣} و + ٢٠$ (٣)

ولكن من المطلوب أولاً وجدنا أن مقدار القوة اللازمة لمنع السلم من الانزلاق = ٣٠ ثقل كجم

أى : $ر_٢ = ٣٠$ ثقل كجم

وبالتعويض فى (٣) : ∴ $٣٠ = \frac{٢}{٣} و + ٢٠$ ∴ $\frac{٢}{٣} و = ١٠$

∴ و = ١٥ ثقل كجم

(المطلوب ثانياً)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٩

$\overline{اب}$ ساق منتظمة وزنها ٥ ثقل كجم وطولها ٣٠ سم ترتكز بطرفها أ على أرض أفقية خشنة وترتكز عند إحدى نقطها حـ على وتد أملس يعلو عن سطح الأرض بمقدار $١٢\frac{١}{٢}$ سم فإذا كانت الساق على وشك الانزلاق عندما كانت تميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٣٠°

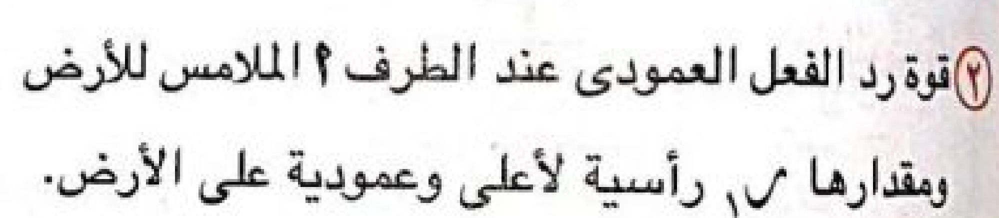
فأوجد: (١) مقدار قوة رد فعل الوتد.

(٢) معامل الاحتكاك السكونى بين طرف الساق أ والأرض.

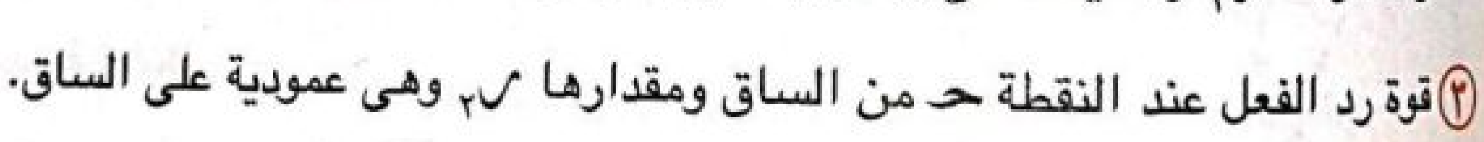
الحل

الساق متزنة تحت تأثير القوى الآتية:

(١) قوة وزن الساق ومقدارها ٥ ثقل كجم وتؤثر رأسيًا لأسفل عند نقطة ى منتصف الساق (لأن الساق منتظمة).



(٢) قوة رد الفعل العمودى عند الطرف أ الملامس للأرض ومقدارها $ر_١$ رأسية لأعلى وعمودية على الأرض.



(٣) قوة رد الفعل عند النقطة حـ من الساق ومقدارها $ر_٢$ وهى عمودية على الساق.

(٤) قوة الاحتكاك عند أ ومقدارها $م_س ر_١$ وهى موجهة نحو و

• نعتبر المستوى الرأسى الذى يتزن فيه الساق ونأخذ فيه $\overrightarrow{وس}$ ، $\overrightarrow{وص}$ اتجاهان متعامدان لتحليل القوى حيث (و) نقطة فى المستوى الأفقى تقع رأسيًا أسفل (حـ)

• نحلل القوة $ر_٢$ إلى مركبتين متعامدتين فى الاتجاهين $\overrightarrow{وس}$ ، $\overrightarrow{وص}$ فنجدهما $ر_٢$ جا ٣٠° ، $ر_٢$ جتا ٣٠°

بتحليل القوى فى الاتجاه $\overrightarrow{وس}$:

∴ $ر_٢$ جا ٣٠° − $م_س ر_١$ = صفر (١)

∴ $\frac{١}{٢} ر_٢ = م_س ر_١$ ∴ $ر_٢ = ٢ م_س ر_١$

بتحليل القوى فى الاتجاه و ص :

∴ ر$_١$ + ر$_٢$ جتا ٣٠° − ٥ = صفر ∴ ر$_١$ = ٥ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ر$_٢$ (٢)

، ∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة أ = صفر

∴ ٥ × أ ء − ر$_٢$ × أ حـ = صفر حيث أ ء = ١٥ جتا ٣٠° = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ سم

، أ حـ = ٢ حـ و = ٢ × ١٢,٥ = ٢٥ سم (لأن Δ أ و حـ ثلاثينى ستينى)

∴ ٥ × $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ − ر$_٢$ × ٢٥ = صفر ∴ ر$_٢$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

∴ مقدار قوة رد فعل الوتد عند النقطة حـ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ثقل كجم **(المطلوب أولاً)**

وبالتعويض عن قيمة ر$_٢$ فى المعادلة (٢) :

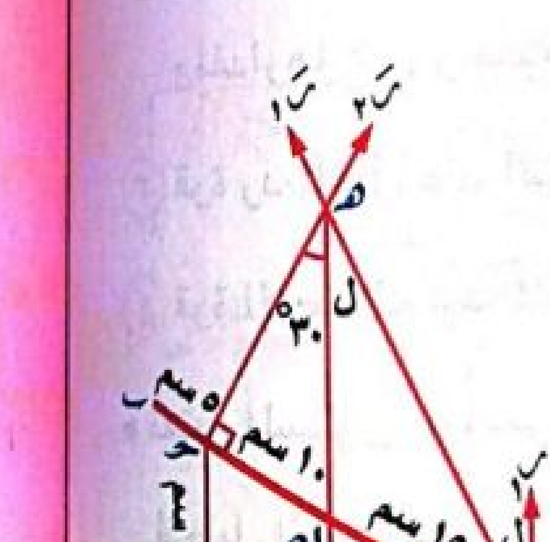
∴ ر$_١$ = ٥ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ر$_١$ = ٢ $\frac{٣}{٤}$ ثقل كجم

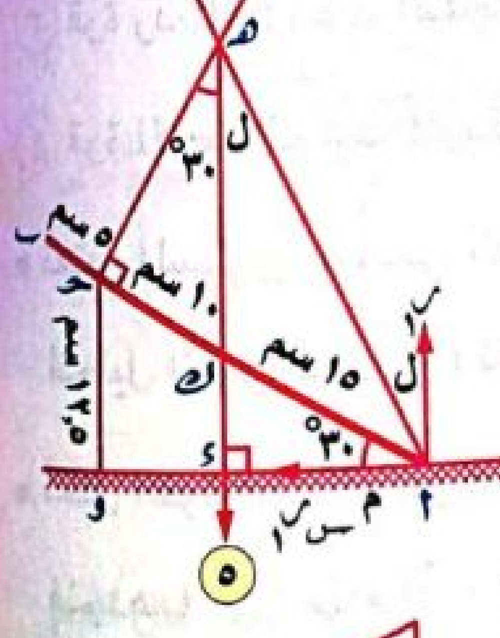
وبالتعويض فى (١) :

∴ $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ م$_س$ × $\frac{١١}{٤}$ ∴ م$_س$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$ **(المطلوب ثانياً)**

حل آخر :

من هندسة الشكل :





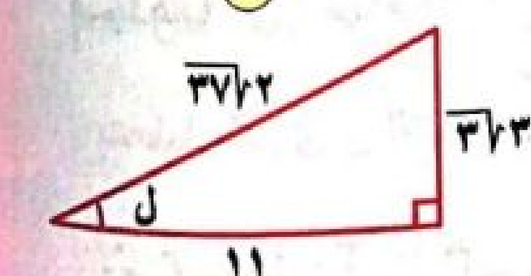
من Δ أ ء ك : أ ء = ٧,٥ $\sqrt{٣}$ سم ، ء ك = ٧,٥ سم

، من Δ أ و حـ : أ حـ = ٢ حـ و = ٢٥ سم

من Δ ك حـ هـ : ك هـ = ٢٠ سم

، من Δ أ ء هـ : ظا ل = $\frac{٧,٥\sqrt{٣}}{٢٧,٥}$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$

∴ معامل الاحتكاك السكونى م$_س$ = ظا ل = $\frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$



وباستخدام قاعدة لامى : $\frac{٥}{\text{جا}(ل + ٣٠°)}$ = $\frac{ر̄_٢}{\text{جا}(١٨٠° − ل)}$

∴ ر̄$_٢$ = $\frac{٥\ \text{جا}(١٨٠° − ل)}{\text{جا}(ل + ٣٠°)}$ = $\frac{٥\ \text{جا}\ ل}{\text{جا}\ ل\ \text{جتا}\ ٣٠° + \text{جتا}\ ل\ \text{جا}\ ٣٠°}$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

تمارين 7 على الاتـزان العـــام



من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الشرط اللازم والكافى لاتزان مجموعة من القوى هو ....

(أ) انعدام متجه مجموع القوى. (ب) أن تكون متلاقية فى نقطة.

(جـ) أن تكون متوازية.

(د) انعدام متجه مجموع القوى وانعدام متجه عزوم القوى حول أى نقطة.

② إذا كان متجه محصلة القوى لمجموعة من القوى المستوية هو $\overline{ح}$ ، مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة هو $\overline{جـ}$ فإن شرط اتزان مجموعة القوى المستوية هو ....

(أ) $\overline{ح} = \overline{٠}$ ، $\overline{جـ} = \overline{٠}$ (ب) $\overline{ح} \neq \overline{٠}$ ، $\overline{جـ} = \overline{٠}$

(جـ) $\overline{ح} = \overline{٠}$ ، $\overline{جـ} \neq \overline{٠}$ (د) $\overline{ح} \neq \overline{٠}$ ، $\overline{جـ} \neq \overline{٠}$

③ يقع جسم تحت تأثير القوى : $\overline{ق}_١$ = ٢ $\overline{س}$ − أ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق}_٢$ = ٥ $\overline{س}$ + ٢ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق}_٣$ = ب $\overline{س}$ − ٥ $\overline{ص}$ فإذا كان الجسم متزنًا فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٣ ، ٧) (ب) (−٣ ، ٧) (جـ) (٣ ، −٧) (د) (−٣ ، −٧)

④ رد فعل المفصل ....

(أ) لايوجد رد فعل له على الاطلاق. (ب) يعمل فى الاتجاه الأفقى فقط.

(جـ) يعمل فى الاتجاه الرأسى فقط. (د) غير معلوم الاتجاه.

⑤ إذا استند قضيب بأحد نقطه على وتد أملس تولد رد فعل عند نقطة الاسناد يكون اتجاهه ....

(أ) عموديًا على القضيب ويمر بنقطة تلامسه مع الوتد.

(ب) موازيًا للقضيب.

(جـ) غير معلوم الاتجاه.

(د) عموديًا على القضيب ولايمر بنقطة تلامسه مع الوتد.

⑥ إذا اتصل قضيب بأحد طرفيه بمفصل مثبت فى حائط رأسى وكانت : $س_١$ ، $ص_١$ هما المركبتين الجبريتين لقوة رد فعل المفصل وكانت : $س_١$ = ٣ نيوتن ، $ص_١$ = ٤ نيوتن فإن قوة رد فعل المفصل بالنيوتن تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

⑦ فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية فى أى من الحالات الآتية يتزن القضيب ....

(أ) كل من الحائط والأرض ملساوان.

(ب) الأرض ملساء والحائط خشن.

(جـ) الأرض خشنة والحائط أملس.

(د) القضيب يتزن فى كل الحالات السابقة.

⑧ فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب معلق من طرفه (أ) بواسطة خيط رأسى ومتصل طرفه (ب) فى مفصل مثبت فى حائط رأسى فإن رد فعل المفصل يكون ....

(أ) عمودى على الحائط. (ب) رأسيًا لأسفل.

(جـ) رأسيًا لأعلى. (د) فى اتجاه $\overrightarrow{بأ}$

٢ $\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه ٦٠ نيوتن يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية ملساء وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم فى مستوٍ رأسى وفى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة على الأرض تقع رأسيًا أسفل ب تمامًا. أوجد :

① مقدار الشد فى الحبل.

② مقدار قوة رد فعل كلٍ من الحائط عند ب ، الأرض عند أ «٣٠ ، ٣٠ ، ٦٠ نيوتن»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣ $\overline{أ ب}$ سلم طوله ٥ أمتار ووزنه ١٧,٥ ثقل كجم يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية ملساء. حفظ السلم فى حالة توازن وذلك بربط طرفه ب بخيط أفقى وواقع فى المستوى الرأسى للسلم. أوجد الشد فى الخيط إذا كان بُعد ب عن الحائط ٣ أمتار وكان وزن السلم يؤثر فى نقطة على بُعد ٢ متر من ب وكذلك أوجد مقدار قوة رد فعل كلٍ من الأرض والحائط.
«$\frac{1}{4}$ ٥ ، ١٧,٥ ، $\frac{1}{4}$ ٥ ثقل كجم»

٤ $\overline{أ ب}$ سلم منتظم وزنه ١٠ ث.كجم وطوله ٣ متر يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية ملساء ويستند بطرفه ب على حائط رأسى أملس حفظ توازنه بربط طرفه أ بحبل مربوط طرفه الآخر بنقطة على خط تقاطع الأرض مع الحائط تقع رأسيًا أسفل ب فإذا كان السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° ، صعد عليه رجل وزنه ٦٠ ث.كجم فأوجد مقدار الشد فى الحبل عندما يصل الرجل إلى نقطة تبعد مترين عن أ
«٤٥ ث.كجم»

٥ يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث.كجم بطرفه أ على مستوى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى رأسيًا أسفل ب يصعد رجل وزنه ٨٠ ث.كجم هذ السلم. **أوجد :**

(١) قوة الشد فى الحبل عندما يكون الرجل قد قطع $\frac{3}{4}$ طول السلم.
(٢) أقصى قيمة للشد التى يتحملها الحبل علمًا بأنه يكون على وشك الانقطاع عندما يصل الرجل إلى قمة السلم.
«٦٥ ث.كجم ، ٨٥ ث.كجم»

٦ $\overline{أ ب}$ سلم مقدار وزنه ٢٠ ث.كجم يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم على مستوٍ رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى تقع رأسيًا أسفل ب ولا يتحمل شد أكبر من ٥٠ ث.كجم. صعد رجل مقدار وزنه ٦٠ ث.كجم على السلم فلما قطع $\frac{3}{4}$ طوله وجد أن الحبل على وشك الانقطاع. عيِّن نقطة على السلم التى يؤثر عندها وزنه.
«أ م = $\frac{1}{4}$ ل حيث م نقطة تأثير الوزن»

٧ $\overline{أ ب}$ سلم منتظم وزنه ٤٠ ث.كجم وطوله ١٢ متر يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم فى حالة توازن بواسطة حبل مربوط أحد طرفيه فى أ ومربوط طرفه الآخر بنقطة فى المستوى الأفقى رأسيًا أسفل ب فإذا كان السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° وكان الحبل لا يتحمل شدًا أكثر من ٥٠ ثقل كجم فأثبت أن رجلًا وزنه = وزن السلم لا يستطيع أن يصعد أكثر من ٩ متر دون أن ينقطع الحبل.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٨ $\overline{أب}$ سلم طوله ٣ أمتار ومقدار وزنه ٣٥ ث.كجم يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على مستوٍ أفقى أملس. حفظ السلم فى حالة توازن فى مستوٍ رأسى بواسطة حبل يصل الطرف ب بنقطة فى المستوى الأفقى تقع رأسيًا أسفل أ أوجد مقدار الشد فى الحبل إذا علم أن بُعد الطرف ب عن الحائط ١,٨ متر وأن قوة وزن السلم تعمل فى نقطة منه تبعد ١,٢ متر عن ب ماذا يكون الشد فى الحبل إذا وقف رجل مقدار وزنه ٨٠ ث.كجم على السلم عند منتصفه.
«$١٠\frac{١}{٢}$ ، $٤٠\frac{١}{٢}$ ث.كجم»

---

٩ سلم منتظم طوله ٥ أمتار ووزنه ٢٠ ثقل كجم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبالطرف الآخر على أرض أفقية ملساء ونقطة ارتكاز السلم على الأرض تبعد عن الحائط بمسافة ٣ أمتار والسلم ممنوع من الانزلاق بواسطة حبل مشدود من إحدى نقط السلم إلى نقطة تقابل الحائط مع الأرض واتجاه الحبل عمودى على اتجاه السلم. أوجد مقدار الشد فى الحبل ورد الفعل لكلٍ من الحائط والأرض.
«$\frac{١٥٠}{٧}$ ، $\frac{١٢٠}{٧}$ ، $\frac{٢٣٠}{٧}$ ث.كجم»

---

١٠ $\overline{أب}$ ساق منتظمة وزنها ٧ ثقل كجم وطولها ٦ ديسم يتصل أحد طرفيها بمفصل مُثبت عند طرفها ب والمفصل مُثبت فى حائط رأسى. عُلق ثقل قدره ٢ ثقل كجم من نقطة على الساق على بُعد $١\frac{١}{٢}$ ديسم عن طرفها ب ثم حفظت الساق فى وضع أفقى بواسطة ربطها من أ بسلك رفيع خفيف $\overline{أحـ}$ مُثبت طرفه حـ بنقطة على الحائط تقع رأسيًا فوق ب تمامًا وعلى بُعد ٨ ديسم منها.

أوجد : (١) مقدار الشد فى السلك.

(٢) مقدار قوة رد فعل المفصل واتجاهه.

«٥ ، $\sqrt{٣٤}$ ثقل كجم ، $٥٩^\circ ٢'$»

---

١١ قضيب منتظم مقدار وزنه ٢ ث.كجم وطوله ١٠٠ سم يتصل أحد طرفيه بمفصل مُثبت فى حائط رأسى عُلق ثقل قدره ٢ ث.كجم من نقطة على القضيب تبعد ٧٥ سم عن المفصل وحفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل رفيع يتصل بطرفه الآخر وبنقطة على الحائط تقع رأسيًا أعلى المفصل. إذا كان الحبل يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° أوجد مقدار الشد وكذلك رد فعل المفصل.
«$\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣٩}}{٣}$ ث.كجم ، $٤٦^\circ ٦'$»

---

١٢ $\overline{أبحـ}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم وزنه ٣٠ ث.كجم يدور حول مفصل عند طرفه أ ومربوط من نقطة ب بأحد طرفى سلك خفيف طرفه الآخر فى نقطة على بُعد ٤٠ سم رأسيًا أعلى نقطة أ بحيث كان القضيب أفقيًا. فإذا كان : ب حـ = ١٠ سم ، فأوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المفصل.
«٢٥ ، $٥\sqrt{١٣}$ ث.كجم ، $٣٣^\circ ٤١'$»

١٣ قضيب منتظم أب طوله ٢٠٠ سم ومقدار وزنه ١٠ نيوتن يتصل طرفه أ بمفصل مُثبت فى حائط رأسى ويحمل عند طرفه ب ثقلاً يساوى وزنه حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل يتصل أحد طرفيه بنقطة على القضيب تبعد ١٥٠ سم عن أ والطرف الآخر بنقطة على الحائط رأسيًا أعلى أ ، فإذا كان الحبل يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° عيِّن مقدار الشد فيه وكذلك مقدار قوة رد فعل المفصل. «٤٠ ، ٢٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

١٤ أب قضيب منتظم وزنه ٤٠ نيوتن يتصل بطرفه أ بمفصل مُثبت فى حائط رأسى ويحمل عند طرفه ب ثقلاً قدره ٢٠ نيوتن. حفظ القضيب فى وضع يميل فيه على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° بواسطة حبل مساوٍ للقضيب فى الطول ويتصل أحد طرفيه بالطرف ب للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة حـ من الحائط تقع رأسيًا أعلى أ وعلى بُعد منها يساوى طول القضيب. أوجد :

(١) مقدار الشد فى الحبل.

(٢) مقدار قوة رد فعل المفصله عند أ واتجاهه. «٤٠ ، ٢٠ $\sqrt{٧}$ نيوتن ، ظا ل = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$»

١٥ أب قضيب منتظم طوله ١٦٠ سم ووزنه ٣٠٠ ثقل جم عُلق فى مسمار ثابت حـ بواسطة خيطين مربوطين فى طرفيه أ ، ب وعُلق فى إحدى نقطه ن ثقل مقداره ٦٠٠ ثقل جم. فإذا كان القضيب يتزن فى وضع أفقى والخيطان أحـ ، بحـ يميلان على القضيب بزاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠° على الترتيب فأوجد طول أن ومقدار الشد فى الخيطين. «٢٠ سم ، ٤٥٠ ، ٤٥٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم»

١٦ أب قضيب منتظم كتلته ١٦ كجم وطوله ٤,٢ متر ، حـ ، ء نقطتان عليه بحيث : أحـ = ١,٢ متر ، بء = ٠,٦ متر. عُلق القضيب من حـ ، ء بواسطة خيطين هـحـ ، وء وأثرت قوة مقدارها ٧ $\frac{١}{٢}$ وزن كجم فى القضيب فى الاتجاه أب فجعلت الخيط وء رأسيًا والخيط هـحـ مائلًا واتزن القضيب فى وضع أفقى. أوجد مقدار الشد فى كلٍ من الخيطين وميل الخيط هـحـ على الأفقى. «١٢ $\frac{١}{٢}$ ، ٦ ث.كجم ، زاوية ظلها $\frac{٤}{٣}$ مع الأفقى»

١٧ سلم منتظم وزنه ٦٠ نيوتن يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة فإذا كان السلم على وشك الحركة عندما كان يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° فأوجد مقدار رد فعل الحائط ومقدار قوة الاحتكاك عند ب «١٠ $\sqrt{٣}$ ، ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

١٨ سلم منتظم طوله ٦ أمتار ووزنه ١٠ ثقل كجم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس ويرتكز بالطرف الآخر على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك السكونى بينها وبين السلم يساوى $\frac{1}{2}$ أثبت أن السلم فى حالة التوازن النهائى يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥°

---

١٩ قضيب منتظم يرتكز فى مستوٍ رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى على مستوٍ أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب يساوى $\frac{1}{4}$ أوجد ظل الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق. «٢»

---

٢٠ قضيب منتظم يرتكز فى مستوى رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس ، وبطرفه السفلى على مستوى خشن أفقى ، بحيث يصنع القضيب مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{3}{2}$ أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والمستوى الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق. «$\frac{1}{3}$»

---

٢١ قضيب منتظم مقدار وزنه ١٥ نيوتن يرتكز بطرفه السفلى على أرض أفقية خشنة وبطرفه العلوى على حائط رأسى أملس. اتزن القضيب فى مستوٍ رأسي وكان على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٣٠° أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والأرض وكذلك مقدار رد فعل الحائط عليه. «$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ نيوتن»

---

٢٢ أب سلم منتظم وزنه ١٠٠ ثقل كجم يرتكز بطرفه ب على حائط رأسى أملس ويرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وكان السلم يميل على الأرض بزاوية قياسها ٦٠° ، فإذا استطاع رجل وزنه ١٥٠ ثقل كجم الصعود حتى قمة السلم وأصبح السلم عند ذلك على وشك الانزلاق فأوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الطرف أ للسلم ومستوٍ الأرض الأفقى. «$\frac{4\sqrt{3}}{15}$»

---

٢٣ (دور أول ٢٠١٧) سلم منتظم مقدار وزنه ٢٠ ث.كجم يرتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة وبالطرف الآخر على حائط رأسى أملس. اتزن السلم فى مستوٍ رأسى وكان قياس زاوية ميله على الأفقى ٦٠° إذا علم أن معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض يساوى $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ أثبت أن أقصى مسافة تستطيع فتاة وزنها ٦٠ ث.كجم أن تصعدها على السلم تساوى نصف طول السلم.

٢٤ (دورثان ١٩٩٩) سلم منتظم وزنه ٣٠ ثقل كجم يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى على أرض أفقية خشنة فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الأرض والسلم يساوى $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإذا أثرت على الطرف السفلى للسلم قوة مقدارها ١٠ ثقل كجم وتصنع زاوية قياسها °٣٠ مع الأفقى بحيث تعمل على تحريك هذا الطرف بعيدًا عن الحائط وكان السلم على وشك الانزلاق فأوجد ظل الزاوية التى يصنعها السلم مع الأفقى.
(السلم فى وضع التوازن فى مستوى رأسى عمودى على الحائط). «$\frac{2\sqrt{3}}{3}$»

٢٥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٦٠ سم ومقدار وزنه (و) يستند بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية معامل الاحتكاك السكونى بينها وبين القضيب يساوى $\frac{1}{2}$ اتزن القضيب فى مستوٍ رأسى بحيث كان الطرف ب على بُعد ١٠٠ سم من الحائط. أوجد مقدار القوة الأفقية التى إذا أثرت عند الطرف ب جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط. «$\frac{17}{24}$ و»

٢٦ $\overline{أب}$ ساق منتظمة وزنها ٢٠ نيوتن ترتكز بطرفها أ على أرض أفقية خشنة وتستند بطرفها ب على حائط رأسى أملس بحيث تكون الساق فى مستوٍ رأسى عمودى على الحائط وتميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها °٤٥ أوجد مقدار القوة الأفقية التى تؤثر عند الطرف أ للساق لكى تجعلها على وشك الانزلاق بعيدًا عن الحائط علمًا بأن معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والأرض $\frac{3}{4}$ «٥ نيوتن»

٢٧ يستند قضيب منتظم وزنه و بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبطرفه الثانى على أرض أفقية خشنة بحيث يقع فى مستوٍ رأسى ويميل على الأفقى بزاوية قياسها °٤٥ إذا كان القضيب متزنًا ، أثبت أن معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{1}{2}$ وإذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{3}{4}$ فعيِّن القوة الأفقية التى تؤثر عند طرف القضيب الملامس للأرض وتجعله على وشك الحركة :

(١) نحو الحائط. (٢) بعيدًا عن الحائط. «$\frac{5}{4}$ و ، $\frac{1}{4}$ و»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى خشن كان اتجاه رد الفعل ....

(أ) عموديًا على المستوى. (ب) موازيًا لذلك المستوى.

(جـ) غير معلوم الاتجاه. (د) يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع ذلك المستوى.

② يستند سلم منتظم بطرفه العلوى على حائط أملس رأسى وبطرفه السفلى على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينهما = $\frac{١}{٤}$ فكان على وشك الانزلاق فإن زاوية ميل السلم على الرأسى = ...

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) ظا$^{-١}$ $\frac{١}{٤}$ (د) ظا$^{-١}$ $\frac{١}{٢}$

③ سلم منتظم يستند بطرفه السفلى على مستوى أفقى خشن وبطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وكانت الزاوية بين السلم والمستوى الرأسى هى (هـ) وكان السلم فى وضع الاتزان النهائى وكان معامل الاحتكاك السكونى ($م_س$)

فإن : ظا هـ = ...

(أ) $م_س$ (ب) ٢ $م_س$ (جـ) $\frac{٣ م_س}{٢}$ (د) $م_س$ + ١

④ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه (و) يستند بطرفه العلوى أ على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى ب على مستوى أفقى خشن وكان على وشك الحركة فإن رد فعل الحائط على الطرف أ يساوى ....

(أ) $م_س$ و (ب) و

(جـ) $\frac{و}{م_س}$ (د) رد الفعل العمودى عند ب

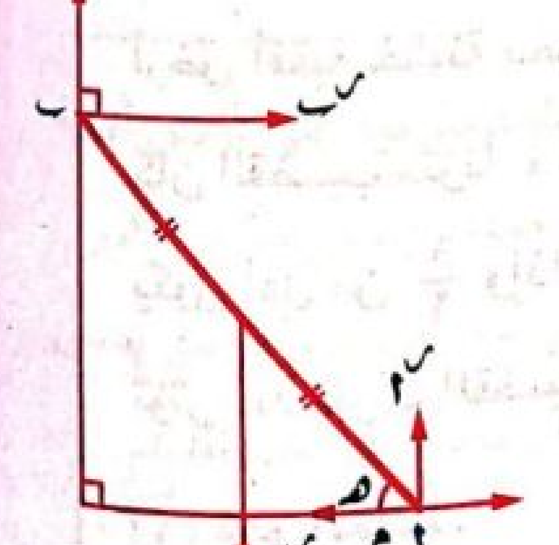
⑤ فى الشكل المقابل :

إذا كانت ل هى زاوية الاحتكاك بين الأرض والقضيب

فإن : ظا هـ . ظا ل = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

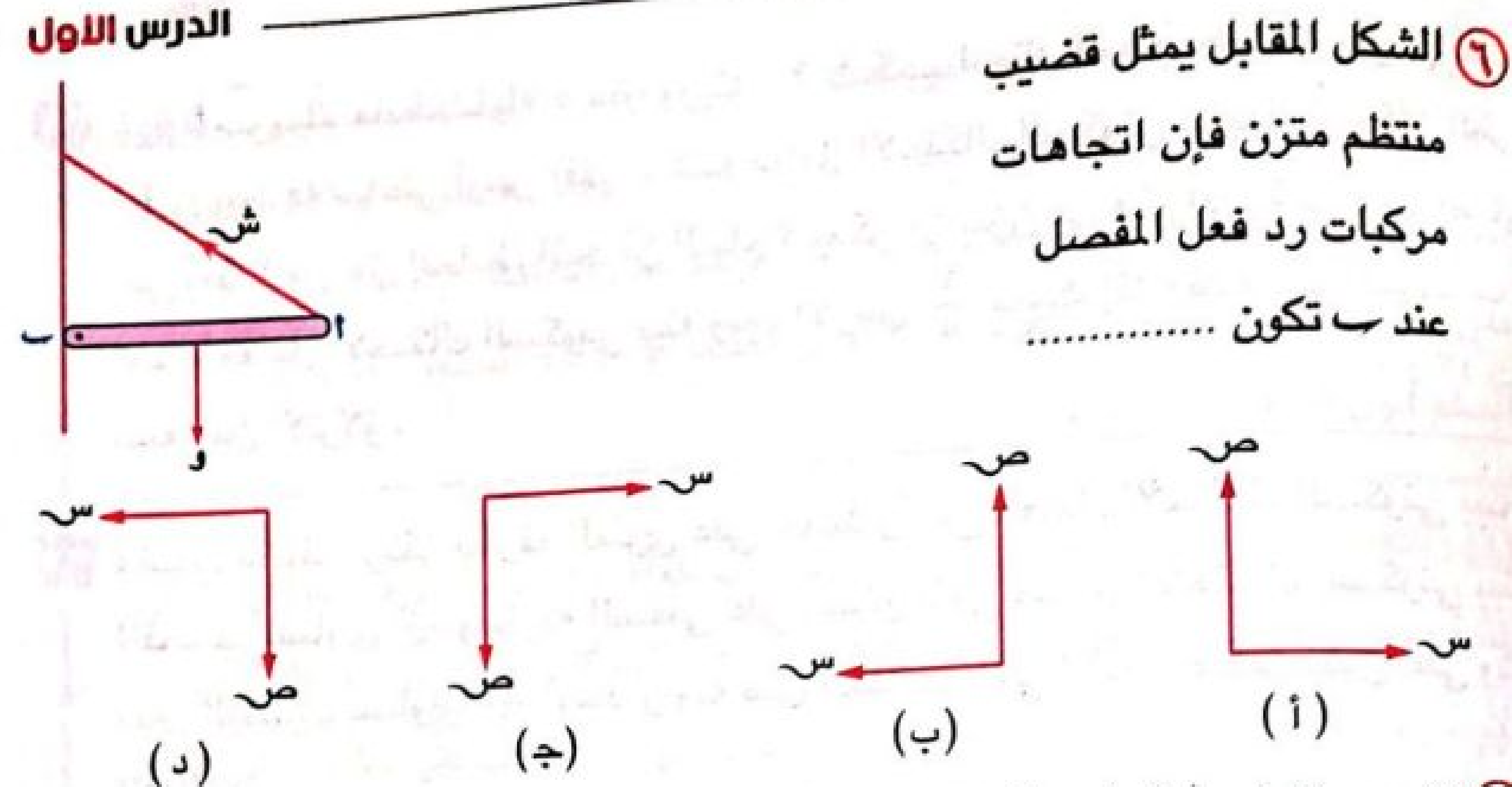


٢٩

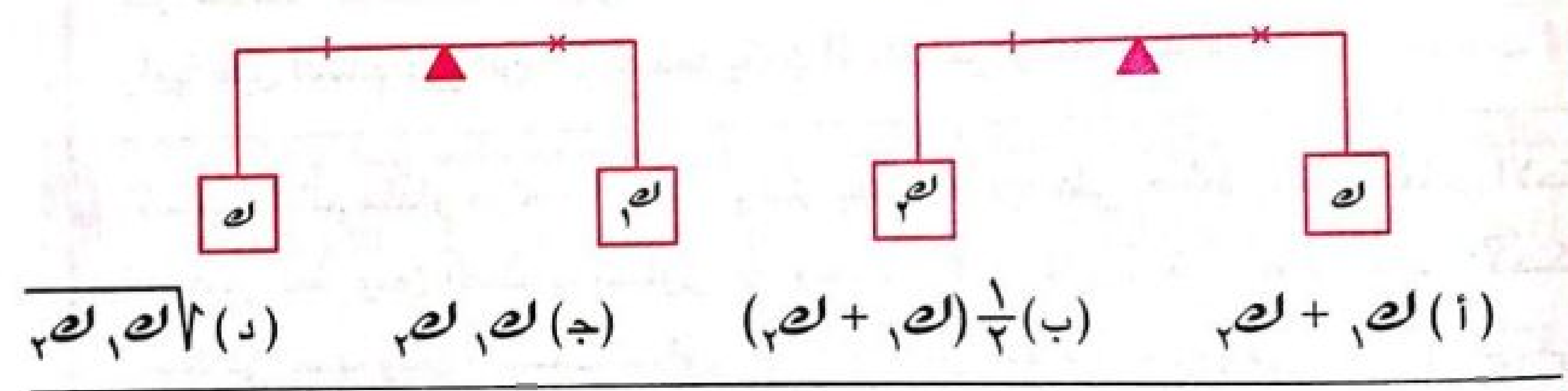
٣٠

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑥ الشكل المقابل يمثل قضيب منتظم متزن فإن اتجاهات مركبات رد فعل المفصل عند ب تكون ....



⑦ قضيب خفيف طوله ل يرتكز فى وضع أفقى على وتد كما بالشكل فإذا كانت الكتلة ك تتزن مع الكتلتين $ك_١$ أو $ك_٢$ منفردتين كما هو بالشكل فإن قيمة ك بدلالة $ك_١$ ، $ك_٢$ تساوى ....



(أ) $ك_١ + ك_٢$ (ب) $\frac{١}{٢}(ك_١ + ك_٢)$ (جـ) $ك_١ ك_٢$ (د) $\sqrt{ك_١ ك_٢}$

٢٩ $\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه ١٠٠ ثقل كجم يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك السكونى بينها وبين السلم يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ، يرتكز بطرفه ب على حائط رأسى أملس فإذا كان السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° فأوجد مقدار أكبر ثقل يمكن تعليقه عند ب دون أن يختل التوازن للسلم ثم أوجد كذلك مقدار رد فعل الحائط عند ب فى هذه الحالة.

«١٠٠ ، $٥٠\sqrt{٣}$ ثقل كجم»

٣٠ (دورثان ١٩٩٨) يرتكز سلم منتظم وزنه ٤٠ ث.كجم بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة بحيث يقع فى مستوٍ رأسى عمودى على الحائط ويميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° ، صعد ولد وزنه يساوى وزن السلم فأصبح السلم على وشك الانزلاق عندما يقطع الولد مسافة تساوى $\frac{٣}{٤}$ طول السلم. أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الأرض والسلم. وإذا أراد الولد أن يتم صعود السلم فأوجد أقل قوة أفقية تؤثر على الطرف السفلى للسلم حتى يتمكن الولد من ذلك.

«$\frac{٥}{٨}$ ، ١٠ ثقل كجم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣١ $\overline{أب}$ سلم منتظم طوله ٥ متر ووزنه ٢٠ ث.كجم استند السلم بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك السكونى بينهما $\frac{١}{٤}$ وكان الطرف ب على بُعد ٣ متر من الحائط. أثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن فى هذه الحالة ثم أوجد أصغر وزن لجسم معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الأرض $\frac{١}{٥}$ بحيث إذا وضع عند الطرف ب للسلم يمنعه من الانزلاق. «$١٢\frac{١}{٢}$ ث.كجم»

٣٢ قضيب منتظم يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ وبطرفه السفلى على مستوٍ أفقى معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب يساوى $\frac{٣}{٤}$ أوجد زاوية ميل القضيب على الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق. «٢٢ َ٣٧ °»

٣٣ سلم منتظم يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى خشن فإذا كان معاملا الاحتكاك السكونى عند أ ، ب يساويان $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ على الترتيب فأوجد ظل زاوية ميل السلم على الرأسى عندما يكون السلم على وشك الانزلاق. «$\frac{٨}{١١}$»

٣٤ قضيب منتظم مقدار وزنه ٤٠ نيوتن يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ وبطرفه الآخر على أرض أفقية معامل الاحتكاك السكونى بينها وبين القضيب تساوى $\frac{١}{٢}$ فإذا كان القضيب يتزن فى مستوٍ رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° أوجد مقدار القوة الأفقية التى تجعل الطرف السفلى للقضيب على وشك الحركة نحو الحائط. «٦٠ نيوتن»

٣٥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٦٠ سم ومقدار وزنه ٤٣ نيوتن يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى وبطرفه ب على أرض أفقية وكان معاملا الاحتكاك السكونى بين القضيب وكل من الحائط والأرض يساويان $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ على الترتيب ، وكان الطرف ب يبعد ١٠٠ سم عن الحائط. أوجد مقدار القوة الأفقية التى إذا اثرت فى الطرف ب جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط. «٣٢,٧٥ نيوتن»

٣٦ $\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه ٩ ث.كجم يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى خشن فإذا كان معاملا الاحتكاك السكونى عند أ ، ب هما $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{١}{٢}$ على الترتيب ثم شد الطرف أ للسلم بقوة أفقية ق جعلت السلم على وشك الانزلاق بعيدًا عن الحائط وكان السلم يصنع مع الأفقى زاوية قياسها ٤٥° أوجد مقدار القوة ق «٣,٢٥ نيوتن»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣٧ يستند سلم منتظم بأحد طرفيه على حائط رأسى معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين السلم يساوى $\frac{١}{٣}$ وبطرفه الآخر على أرض أفقية من نفس خشونة الحائط. فإذا اتزن السلم فى مستوٍ رأسى فى وضع يميل فيه السلم على الحائط بزاوية ظلها $\frac{٦}{١١}$ برهن على أن رجلًا وزنه يساوى ثلاثة أمثال وزن السلم لا يمكنه الصعود أكثر من $\frac{٧}{١٠}$ طول السلم دون أن ينزلق السلم.

٣٨ (مصر ١٩٩٤) يرتكز قضيب غير منتظم $\overline{أب}$ طوله ١٤٠ سم بطرفه ب على أرض أفقية وبطرفه أ على حائط رأسى. إذا كان معاملا الاحتكاك السكونى بين القضيب وكل من الأرض والحائط يساويان $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ على الترتيب وكان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٤٥° فأوجد بُعد نقطة تأثير وزن القضيب عن الطرف ب (القضيب يقع فى مستوٍ رأسى عمودى على خط تقاطع الحائط مع الأرض). «٨٠ سم»

٣٩ $\overline{أب}$ ساق منتظمة ترتكز بطرفها السفلى أ على أرض أفقية وترتكز بطرفها العلوى ب على حائط رأسى وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والحائط يساوى ٣ أمثال معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والأرض فإذا كانت الساق على وشك الانزلاق وعندما كانت تصنع مع الحائط زاوية ظلها $\frac{٨}{١٣}$ فأثبت أن رد فعل الحائط يساوى $\frac{٥}{١٩}$ من وزن الساق.

٤٠ $\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه ٢١ ثقل كجم يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى خشن ، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض $\frac{٣}{٥}$ وبين السلم والحائط $\frac{١}{٣}$ وكان السلم يميل على الرأسى بزاوية ظلها $\frac{٦}{٥}$ أثبت أن طفلًا وزنه يساوى وزن السلم لا يمكنه الصعود أكثر من $\frac{٢}{٣}$ طول السلم دون أن يختل التوازن ثم أوجد أصغر ثقل يجب وضعه فوق قاعدة السلم حتى يتمكن الطفل من أن يصل إلى قمة السلم. «١٢ ثقل كجم»

٤١ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٦ ث.كجم يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقى خشن ويرتكز عند إحدى نقطة حـ على وتد أفقى أملس يعلو ٢٠ سم عن المستوى الأفقى فإذا كان القضيب يميل على الأفقى بزاوية ٣٠° أوجد قوة الاحتكاك. وإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والمستوى الأفقى $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فأوجد الثقل الذى يمكن تعليقه عند الطرف ب ليجعل القضيب على وشك الانزلاق. «$٣\sqrt{٣}$ ، $\frac{٨}{٧}$ ث.كجم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤٢ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله $٣\frac{١}{٣}$ مترًا ووزنه ٣٠ ثقل كجم يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقي خشن ويستند بإحدى نقطه حـ على مسمار أملس مُثبت على ارتفاع ١,٢ مترًا من المستوى الأفقي وعندما كان ظل زاوية ميل القضيب على الأفقي $\frac{٣}{٤}$ أصبح القضيب على وشك الانزلاق. أوجد كلاً من رد فعل المسمار على القضيب وكذلك معامل الاحتكاك السكوني بين القضيب والمستوى الأفقي. «٢٠ ثقل كجم ، $\frac{٦}{٧}$»

٤٣ $\overline{أب}$ سلم منتظم طوله ٨ أمتار ووزنه ٢٠ ثقل كجم يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة ويميل على الأفقي بزاوية ظلها $\frac{٤}{٣}$ ويستند بإحدى نقطة حـ على حافة سور أملس يعلو عن الأرض بمقدار ٤ أمتار فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين السلم والأرض $م_س$ فبيِّن أنه في وضع التوازن النهائي تكون $م_س \leq \frac{٤٨}{٨٩}$ وإذا كانت $م_س = \frac{٣}{٤}$ فأوجد مقدار الثقل الذي يجب تعليقه عند ب حتى يكون السلم على وشك الانزلاق. «$٦\frac{٢}{٣}$ ثقل كجم»

٤٤ (١٩٩٣) في الشكل الموضح :

يرتكز قضيب منتظم وزنه ٢٤ ثقل كجم بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة وبطرفه الآخر على مستوٍ أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° إذا كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقي ٣٠° فأوجد معامل الاحتكاك السكوني بين القضيب والأرض ورد فعل كلٍ من المستوى والأرض. «$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، ١٢ ، $١٢\sqrt{٣}$ ثقل كجم»

٤٥ قضيب منتظم $\overline{أب}$ وزنه (و) ثقل كجم يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقي أملس وبطرفه ب على مستوٍ أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° فإذا منع القضيب من الانزلاق بحبل أفقي $\overline{أحـ}$ مثبت أحد طرفيه في الطرف أ للقضيب والطرف الآخر للحبل مُثبت في حـ حيث حـ تقع على خط تقاطع المستويين وبحيث يكون القضيب والخيط في مستوٍ رأسي عمودي على خط تقاطع المستويين. أوجد بدلالة (و) رد فعل كلٍ من المستويين وكذلك الشد في الخيط علمًا بأن القضيب في وضع الاتزان يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° «$\frac{٣}{٤}$ و ، $\frac{١}{٢}$ و ، $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ و»

٤٦ قضيب معدنى طوله ٦٠ سم ووزنه ٦٠٠ ث.جم يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقى خشن ومعامل الاحتكاك السكونى بينهما $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ويرتكز بطرفه الآخر على مستوٍ أملس يميل على المستوى الأول بزاوية قياسها ١٢٠° بحيث يكون القضيب عموديًا على خط تقاطع المستويين ويقابل الزاوية المنفرجة بينهما فإذا كان القضيب على وشك الحركة عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٣٠° فأوجد رد فعل كلٍ من المستويين وكذلك مركز ثقل القضيب.

«٤٠٠ ، ٢٠٠ $\sqrt{7}$ ث.جم ، ٤٠ سم من أ»

٤٧ قضيب منتظم وزنه (و) يرتكز بطرفيه على أرض أفقية خشنة وعلى مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظل قياسها $\frac{4}{3}$ فإذا علم أن القضيب فى وضع التوازن النهائى يقع فى المستوى الرأسى العمودى على خط تقاطع المستويين وأن معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والمستوى الأفقى $\frac{1}{3}$ وبين القضيب والمستوى المائل $\frac{1}{7}$ أثبت أن القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥°

٤٨ فى الشكل المقابل :

ترتكز إحدى نهايتى سلم منتظم وزنه (و) على حائط رأسى أملس وترتكز النهاية الأخرى على أرض خشنة تميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإذا كان السلم على وشك الانزلاق وهو فى مستوٍ رأسى عمودى على خط تقاطع الحائط مع الأرض فأثبت أن السلم يميل على الرأسى بزاوية ظلها يساوى ٢ طا (ى - هـ) حيث ى قياس زاوية الاحتكاك.

٤٩ أب قضيب رفيع خفيف طوله ٢ ل مُعلق فى مستوى رأسى من طرفيه أ ، ب بخطين يميلان على الرأس بزاويتين ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب. عُلق فى القضيب الثقلان ٢ ، ٨ نيوتن على بُعد من أ يساوى $\frac{1}{5}$ ل ، $\frac{6}{5}$ ل

أوجد فى وضع التوازن مقدار الشد فى الخيطين وقياس زاوية ميل القضيب على الأفقى.

«٥ ، ٥ $\sqrt{3}$ نيوتن ، ٣٠°»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥٠ **فى الشكل المقابل :**

تجويف نصف كروى أملس يرتكز بقاعدته الدائرية على أرض أفقية خشنة وضع قضيب منتظم طوله (٤ ل) ووزنه (و) بحيث تلامس إحدى نقطه السطح الخارجي للوعاء فى (ب) ويرتكز بطرفه الخالص (أ) على الأرض فإذا كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان أ ب = ٣ ل

، ق (د ب م أ) = ٦٠° **أوجد معامل الاحتكاك السكونى وقيمة كلٍ من : $ر_١$ ، $ر_٢$**

« $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ و ، $\frac{١}{٢}$ و »

---

٥١ قضيب منتظم وزنه (و) يتصل أحد طرفيه بمفصل ويتصل طرفه الآخر بخيط مربوط فى نقطة فى نفس المستوى الأفقى المار بالمفصل بحيث كان قياس زاوية ميل كلٍ من القضيب والخيط على الأفقى مساوٍ هـ أثبت أن رد فعل المفصل يساوى $\frac{١}{٤}$ و $\sqrt{٨ + \text{قتا}^٢ هـ}$

---

٥٢ $\overline{\text{أ ب}}$ ساق منتظم ترتكز بطرفها أ على حائط رأسى أملس وبطرفها ب على مستوٍ أملس يميل على الأفقى إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا كانت الساق فى وضع التوازن تميل على الحائط بزاوية قياسها ى فأثبت أن ظا ى = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ وأوجد ردى فعل كلٍ من المستويين على الساق.

« $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ و ، $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ و »

---

٥٣ يتزن سلم منتظم فى مستوٍ رأسى على حائط رأسى وأرض أفقية ، إذا كان قياس زاوية الاحتكاك السكونى بين السلم وكلٍ من الحائط والأرض هى ل فأثبت أن قياس زاوية ميل السلم على الرأسى عندما يكون على وشك الانزلاق هـ = ٢ ل

---

٥٤ $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب منتظم طوله ل ووزنه و يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب $\frac{١}{٢}$ ويرتكز بطرفه ب على حائط رأسى أملس وكان القضيب يميل على الرأسى بزاوية قياسها هـ أثرت قوة أفقية ق على القضيب عند نقطة حـ من القضيب حيث : أ حـ = $\frac{١}{٤}$ ل وكان الطرف أ على وشك الحركة نحو الحائط.

أثبت أن : ق = $\frac{٢}{٣}$ و (١ + ظا هـ)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥٥ $\overline{أب}$ ساق منتظمة ترتكز بطرفها أ على أرض أفقية خشنة قياس زاوية الاحتكاك بينهما ل وربط الطرف ب بخيط عمودى على الساق فإذا اتزنت الساق فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها هـ وكان الخيط والساق فى مستوٍ رأسى واحد. **فأثبت أن :** $ظا ل = \frac{جا ٢هـ}{٢(١ + جا^٢ هـ)}$

٥٦ $\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه و ، وطوله ٢ ل يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة ويستند عند طرفه ب على حائط رأسى خشن. فإذا كان السلم على وشك الانزلاق عندما كانت زاوية ميله على الأرض هـ فأثبت أن : $ظا هـ = \frac{١ - م_س^٢}{٢ م_س}$ حيث $م_س$ معامل الاحتكاك السكونى بين السلم وكل من الحائط والأرض. علمًا بأن المسقط الأفقى للسلم عمودى على الحائط.

٥٧ قضيب منتظم يرتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة ويستند بالطرف الآخر على حائط رأسى خشن فإذا علم أن القضيب على وشك الانزلاق فأثبت أن ظل الزاوية التى يصنعها مع الرأسى = $\frac{٢ ظا أ}{١ - ظا أ ظا ب}$ حيث أ ، ب زوايتا احتكاك القضيب مع الأرض والحائط على الترتيب. برهن أن هذا القضيب لا يتزن إذا كانت الأرض ملساء وحتى لو كان الحائط خشنًا.

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٥٨ $\overline{أب}$ سلم منتظم يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على مستوٍ أفقى أملس وحفظ السلم من الانزلاق بواسطة حبل ربط أحد طرفيه بقاعدة الحائط رأسيًا أسفل أ وربط طرفه الآخر فى نقطة من السلم على بُعد من ب يساوى $\frac{١}{٣}$ طول السلم فإذا كان ضغط السلم على الحائط يساوى ط وضغطه على المستوى الأفقى يساوى ن وكانت أ ، ب على بُعد س ، ص من قاعدة الحائط على الترتيب. **فأثبت أن :** ط : ن = ٢ ص : ٣ س

٥٩ أب جـ د صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع وزنها و يؤثر عند نقطة تقاطع القطرين ، ثُقبت الصفيحة ثقبًا صغيرًا عند أ وعُلقت فى مستوٍ رأسى من مسمار يمر بالثقب ومُثبت فى حائط رأسى ، ثم ربطت الصفيحة من د بخيط خفيف مُثبت طرفه الآخر فى نقطة من الحائط تقع رأسيًا فوق المسمار وتبعد عنه بقدر طول ضلع المربع وعُلق ثقل قدره ٢ و عند الرأس جـ فإذا كانت الصفيحة فى وضع توازن وحرفها $\overline{أد}$ أفقيًا. فأوجد كلاً من الشد فى الخيط ومقدار الضغط على المسمار. «$\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$ و ، $\frac{\sqrt{٢٦}}{٢}$ و»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦٠ $\overline{أب}$ قضيب منتظم يزن ٦ ثقل كجم وطوله ٦٠ سم يدور بسهولة حول مفصل عند أ ويمر داخل حلقة خفيفة ملساء مربوطة فى أحد طرفى خيط خفيف طوله ٢٤ سم والطرف الثانى للخيط مُثبت فى نقطة حـ تقع رأسيًا أعلى أ وعلى بُعد ٣٠ سم منها. أثبت أنه فى وضع التوازن يكون الخيط عموديًا على القضيب وأوجد الشد فى الخيط ومقدار واتجاه رد فعل المفصل. «٨ ، ٤,٨٢ ثقل كجم ، ٤٦َ ٤° تقريبًا»

---

٦١ كرة معدنية مصمتة متجانسة نصف قطرها نق. ربطت من نقطة على سطحها فى خيط وثُبت الطرف الآخر للخيط فى النقطة أ على حائط رأسى خشن لترتكز الكرة فى حالة اتزان وهى على وشك الانزلاق إلى أسفل الحائط عند نقطة ب ، فإذا كان أب = $\sqrt{3}$ نق وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الكرة والحائط $\frac{1}{\sqrt{3}}$. فأثبت أن ظل الزاوية التى يصنعها الخيط مع الحائط يساوى $\frac{\sqrt{3}}{2}$ مع العلم بأن خط عمل وزن الكرة يؤثر فى مركزها.

---

٦٢ قرص دائرى منتظم وزنه ٣ ث كجم يؤثر عند مركزه يستند على أرض أفقية خشنة وحائط رأسى خشن ، معامل الاحتكاك السكونى بين القرص والحائط $\frac{1}{2}$ وكان مستوٍ القرص عموديًا على الأرض والحائط ، أثرت عند أعلى نقطة من القرص قوة أفقية مقدارها ١ ث.كجم موجهة نحو الحائط فوصلت قوة الاحتكاك بين القرص والحائط إلى نهايتها العظمى ، أوجد مقدار قوة الاحتكاك بين القرص والأرض وإذا زاد مقدار القوة الأفقية المؤثرة على القرص إلى ٢ ث.كجم فإن قوة الاحتكاك بين القرص والأرض تصل إلى نهايتها العظمى ويصبح القرص على وشك الحركة. احسب معامل الاحتكاك السكونى بين الأرض والقرص. «$\frac{1}{2}$ ث.كجم ، $\frac{1}{2}$»

---

٦٣ $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـأ}$ ثلاثة قضبان منتظمة وزن كلٍ منها $\frac{1}{2}$ ث.كجم وطول كلٍ منها ٢٠ سم متصلة عند أ ، ب ، حـ وقابلة للدوران حول مسمار أفقى أملس فى ثقب صغير عند أ وإذا ربطت ب فى أحد طرفى خيط يمر على بكرة ملساء ثابتة وفى الطرف الآخر من الخيط مُعلق ثقل وكانت البكرة تقع رأسيًا فوق أ وعلى بعُد منها ٢٠ سم فاتزنت المجموعة فى وضع كان فيه $\overline{أحـ}$ رأسيًا. أوجد قيمة الثقل ومقدار واتجاه رد فعل المسمار. «$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ث.كجم ، ٦٠°»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦٤ وعاء على شكل نصف كرة سطحها الداخلى أملس وطول نصف قطرها ٣٠ سم وضعت بحيث كان سطحها المستوى أفقيًا ووضع قضيب ثقيل بأكمله داخل الوعاء وكان وزن القضيب يقسمه إلى جزأين طولاهما ٢٥ سم ، ٢٠ سم أثبت أن القضيب فى وضع الاتزان يميل على الرأسى بزاوية قياسها هـ حيث : ظتا هـ = $\frac{١}{٨}$

٦٥ باب مستطيل الشكل وزنه (و) ث.كجم يدور بسهولة فى مستوى رأسى حول مفصلين مُثبتين فى خط رأسى واحد والمسافة بينهما متران فإذا كان وزن الباب موزعًا بالتساوى على المفصلين ويعمل على بُعد $\frac{٣}{٤}$ متر من خط المفصلين أوجد مقدار واتجاه رد فعل كلٍ من المفصلين.

«$ر_١ = ر_٢ = \frac{٥}{٨}$ و ، ٨ ٣ ٥°»

٦٦ قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ١٨٠ سم يرتكز بطرفه أ على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب = $\frac{١}{٣}$ ويستند بإحدى نقطه حـ على وتد أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب = $\frac{٢}{٩}$ فإذا كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{٣}{٥}$ فأوجد طول $\overline{أحـ}$

«١٥٠ سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الوحدة 5

الازدواجـــات

الدرس الأول الازدواج - اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر - تكافؤ ازدواجين.

الدرس الثانى الازدواج المحصل.



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الدرس **1**

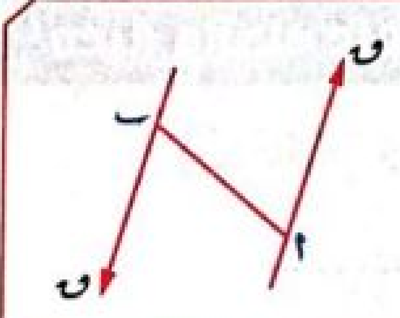
الازدواج - اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر - تكافؤ ازدواجين

تعريف الازدواج

هو مجموعة تتكون من قوتين :

① متساويتين فى المعيار. ② متضادتين فى الاتجاه.

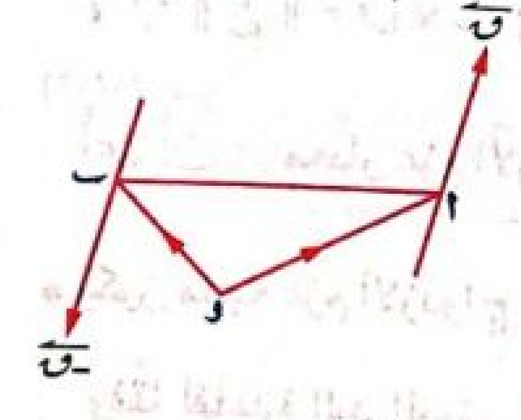
③ لا يجمعهما خط عمل واحد.



ويعتبر الشرط الأخير في تعريف الازدواج هام للغاية وذلك لأن انطباق خطى العمل يعنى أن الجسم الواقع تحت تأثير القوتين متزن أما إذا لم ينعدم البُعد العمودى بين خطى العمل فإن الجسم لا يكون متزنًا وتحدث حركة دورانية فيه وهناك العديد من الأمثلة الحياتية التى نستخدم فيها الازدواجات مثل الازدواج الذى تحدثه اليدان عن إدارة عجلة قيادة السيارة وكذلك الازدواج الذى تحدثه اليدان أيضًا عند محاولة فك أو ربط صواميل إطارات السيارة باستخدام المفتاح المخصص لذلك.



عزم الازدواج



الازدواج إذا أثر على جسم متماسك فإنه يحدث فيه حركة دورانية ، لذلك فإن للازدواج عزمًا يرمز له بالرمز $\overline{ج}$ يبين مقدرته على إحداث هذا الدوران ويكون :

عزم الازدواج مساويًا لمجموع عزمى قوتيه بالنسبة لأى نقطة فى مستوى القوتين.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أى أن: $\overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{و أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}} + \overrightarrow{\text{و ب}} \times (-\overrightarrow{\text{ق}})$

$\therefore \overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{و أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}} - \overrightarrow{\text{و ب}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = (\overrightarrow{\text{و أ}} - \overrightarrow{\text{و ب}}) \times \overrightarrow{\text{ق}}$

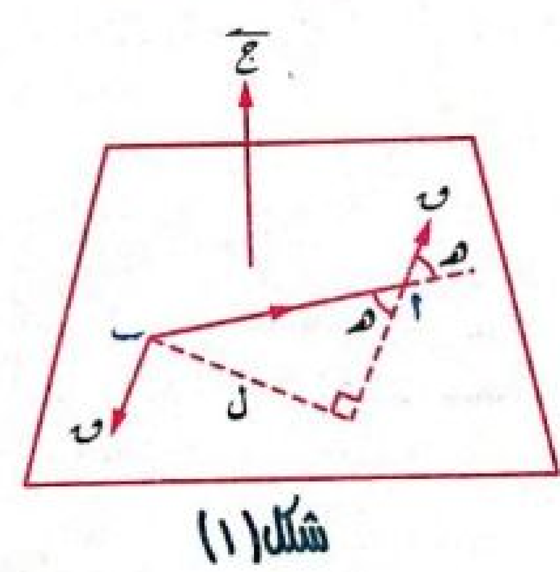
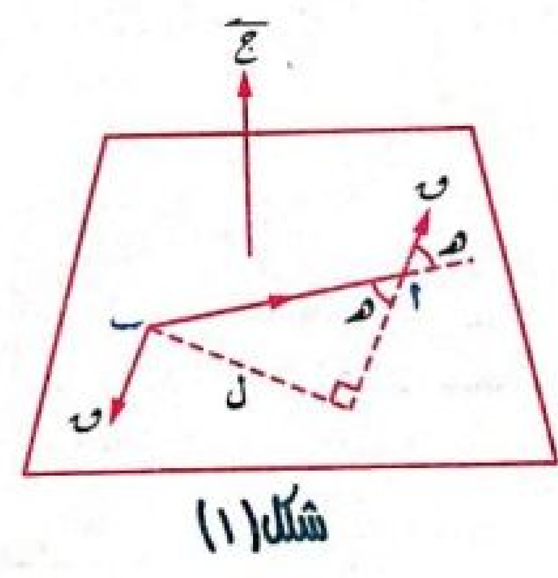
، $\because \overrightarrow{\text{و أ}} - \overrightarrow{\text{و ب}} = \overrightarrow{\text{ب أ}}$ $\therefore$ $\overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} \times (-\overrightarrow{\text{ق}})$

ومن ذلك نستنتج النظرية الآتية :

نظرية

عزم الازدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التى تنسب إليها عزمى قوتيه ، وهو يساوى عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة على خط عمل القوة الأخرى.

معيار واتجاه عزم الازدواج

شكل (١) شكل (٢)

- $\because \|\overrightarrow{\text{ج}}\| = \|\overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}\|$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{ج}}\| = \text{ب أ} \times \text{ق} \times \text{جا } هـ$ حيث هـ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$

، $\because$ ب أ جا هـ = ل حيث ل البُعد العمودى بين خطى عمل $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ ويسمى «ذراع الازدواج»

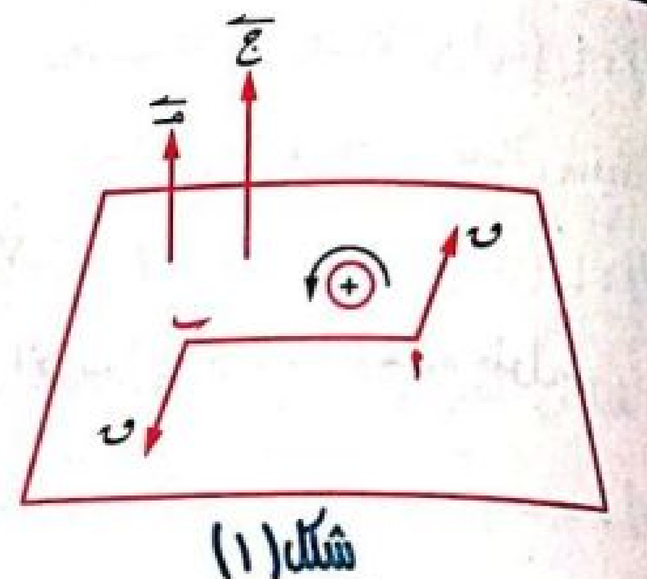
، $\because \|\overrightarrow{\text{ج}}\| = \text{ق} \times \text{ب أ جا هـ}$ $\therefore \|\overrightarrow{\text{ج}}\| = \text{ق} \times \text{ل}$

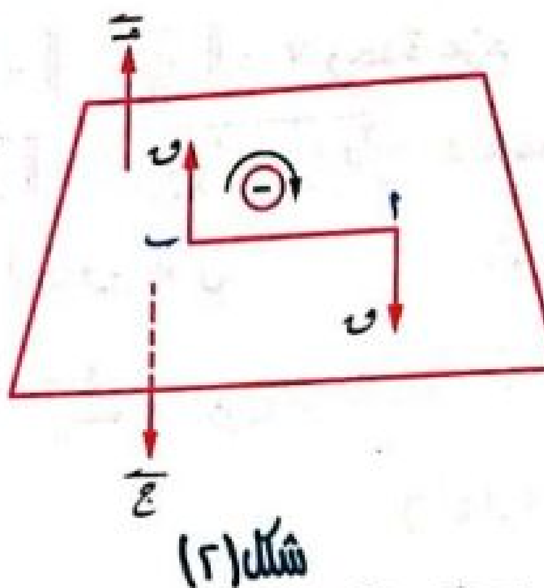
أى أن : معيار عزم الازدواج = معيار إحدى قوتيه × ذراع الازدواج

- يكون متجه عزم الازدواج عموديًا على المستوى الذى يجمع خطى عمل $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ ويتحدد اتجاهه وفقًا لقاعدة اليد اليمنى كما فى شكل (١) ، (٢)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

القياس الجبرى لعزم الازدواج


شكل (١)


شكل (٢)

إذا حددنا متجه وحدة $\overrightarrow{م}$ عمودى على مستوٍ خطى عمل $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ق}$ ونسبنا إليه متجه عزم الازدواج

فإن : $\overrightarrow{ج} = ج \overrightarrow{م}$ حيث ج يسمى القياس الجبرى لعزم الازدواج ويكون اتجاه $\overrightarrow{م}$:

① فى نفس اتجاه متجه العزم إذا كانت قوتاه تعملان على الدوران ضد اتجاه حركة عقارب الساعة ولذلك تكون إشارة القياس الجبرى لعزم الازدواج (ج) موجبة [شكل(١)]

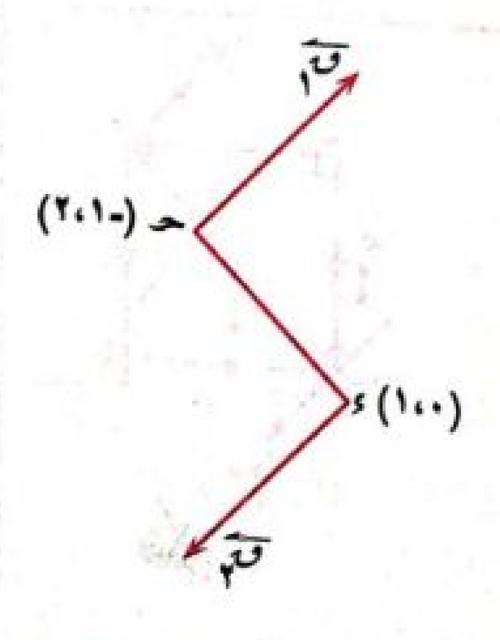
أى أن : $ج = ق \times أب جا هـ = ق \times ل$

② فى عكس اتجاه متجه العزم إذا كانت قوتاه تعملان على الدوران مع اتجاه حركة عقارب الساعة ولذلك تكون إشارة القياس الجبرى لعزم الازدواج (ج) سالبة [شكل(٢)]

أى أن : $ج = - ق \times أب جا هـ = - ق \times ل$

مثال ①

أثرت القوتان $\overrightarrow{ق_1} = ٣ \overrightarrow{س} + أ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ب \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}$ فى النقطتين حـ(-١ ، ٢) ، ء(٠ ، ١) على الترتيب فإذا كونت القوتان ازدواجًا فأوجد قيمتى أ ، ب ومعيار عزم الازدواج وذراع الازدواج.



الحـل

∵ $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ تكونان ازدواج ∴ $\overrightarrow{ق_1} = - \overrightarrow{ق_2}$

∴ $٣ \overrightarrow{س} + أ \overrightarrow{ص} = -(ب \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص})$

∴ $٣ \overrightarrow{س} + أ \overrightarrow{ص} = - ب \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص}$

∴ أ = ٤ ، ب = -٣ ∴ $\overrightarrow{ق_1} = ٣ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص}$

∵ $\overrightarrow{ءحـ} = (-١ ، ٢) - (٠ ، ١) = (-١ ، ١)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\therefore \overline{ج} = \overline{دح} \times \overline{ق_1} = (-\overline{س} + \overline{ص}) \times (٣\overline{س} + ٤\overline{ص}) = (-٤ - ٣)\overline{ع} = -٧\overline{ع}$

$\therefore \|\overline{ج}\| = \|-٧\overline{ع}\| = ٧$ وحدة عزم

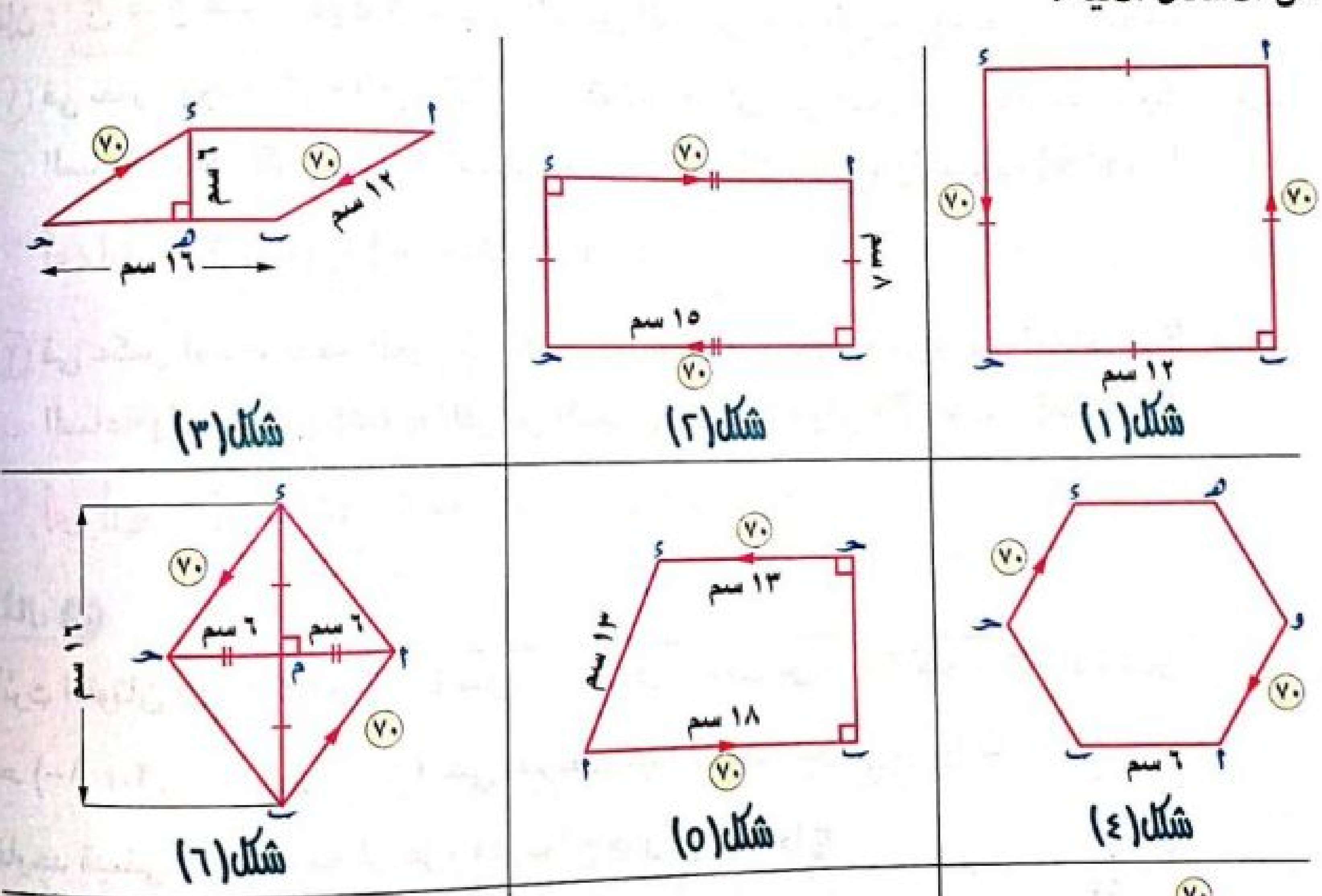
، $\because \|\overline{ق_1}\| = \sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢} = ٥$ وحدة قوة

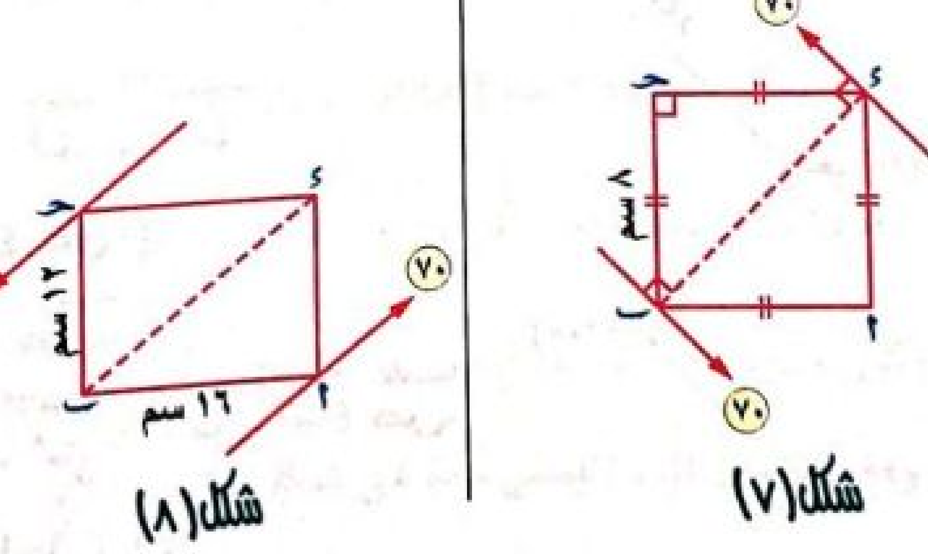
، $\because \|\overline{ج}\| = ق_1 \times ل$ $\qquad \therefore ٥ \times ل = ٧$

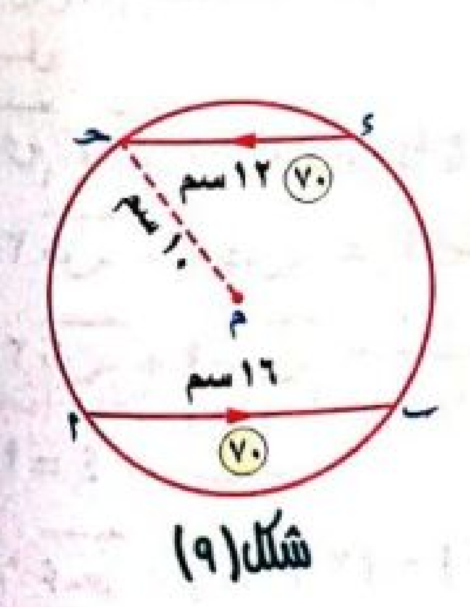
$\therefore ل = \frac{٧}{٥} = ١,٤$ $\qquad \therefore$ ذراع عزم الازدواج $= ١,٤$ وحدة طول.

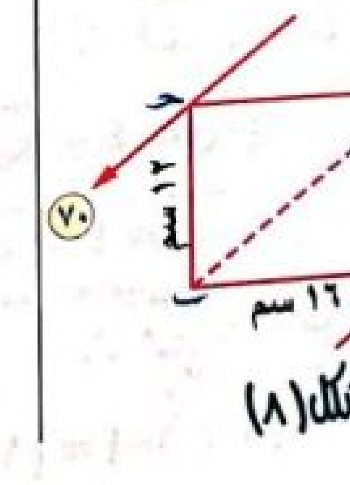
مثال ٢

أوجد ج القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى معيار كلٍ من قوتيه ٧٠ ثقل جرام والموضح فى كلٍ من الأشكال الآتية :









الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـل

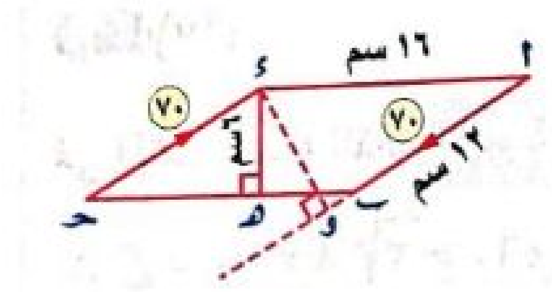
في شكل(١) : ل (ذراع الازدواج) = بحـ = ١٢ سم

∴ ع (القياس الجبرى لعزم الازدواج) = ٧٠ × ١٢ = ٨٤٠ ثقل جرام.سم.

في شكل(٢) : ل (ذراع الازدواج) = أب = ٨ سم

∴ ع (القياس الجبرى لعزم الازدواج) = − (٧٠ × ٨) = −٥٦٠ ثقل جرام.سم.

في شكل(٣) : نرسم $\overline{\text{دو}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ فيكون $\overline{\text{دو}}$ هو ذراع الازدواج



∵ بحـ × دهـ = أب × دو

(كل يساوى مساحة سطح متوازى الأضلاع)

∴ ١٦ × ٦ = ١٢ × دو ∴ دو = $\frac{١٦ \times ٦}{١٢}$ = ٨ سم

∴ ع = − (٧٠ × ٨) = −٥٦٠ ثقل جم.سم.

في شكل(٤) :

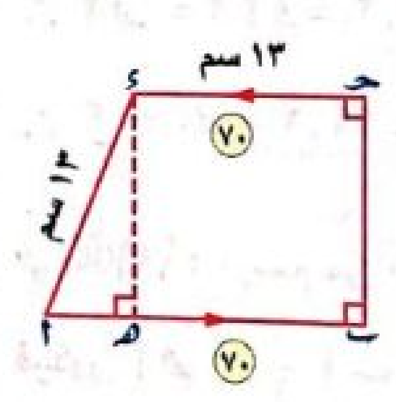
نصل $\overline{\text{أحـ}}$ فيكون طوله هو ذراع الازدواج ومن خواص السداسى المنتظم الذى طول ضلعه ل سم

يكون أحـ = ل $\sqrt{٣}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

∴ ع = − (٧٠ × ٦ $\sqrt{٣}$) = − ٤٢٠ $\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم.



في شكل(٥) :





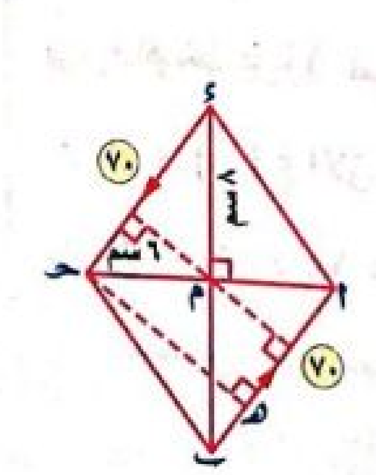
نرسم $\overline{\text{دهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ فيكون $\overline{\text{دهـ}}$ هو ذراع الازدواج

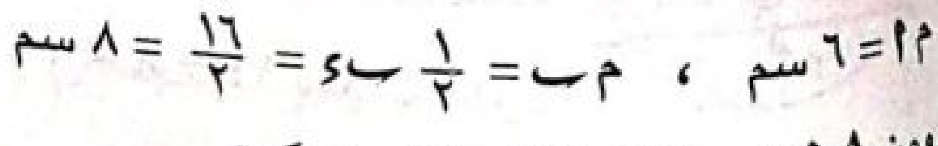
∵ أهـ = أب − حـد = ١٨ − ١٣ = ٥ سم

∴ من Δ أهـد القائم الزاوية فى هـ يكون دهـ = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$ = ١٢ سم

∴ ع = ٧٠ × ١٢ = ٨٤٠ ثقل جم.سم.

في شكل(٦) :





أم = ٦ سم ، مب = $\frac{1}{2}$ بد = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ سم

ومن Δ أمب القائم الزاوية فى م يكون

أب = $\sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢}$ = ١٠ سم (طول ضلع المعين)

نرسم $\overline{\text{حـهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ فيكون طوله هو ذراع الازدواج.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



∵ $\frac{1}{2}$ × أ حـ × بـ ء

= أ ب × حـ هـ (كلٍ يساوى مساحة سطح المعين)

∴ $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ١٦ = ١٠ × حـ هـ

∴ حـ هـ = ٩,٦ سم

∴ ع = ٧٠ × ٩,٦ = ٦٧٢ ثقل جم.سم.

حل آخر

باستخدام إقليدس نجد أن :

ع = ٢ × $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٩,٦ سم

∴ حـ هـ = ٩,٦ سم.

فى شكل(٧) :

فى المثلث أ بـ ء القائم الزاوية فى أ يكون بـ ء = ٨ $\sqrt{٢}$ سم وهو ذراع الازدواج

∴ ع = ٧٠ × ٨ $\sqrt{٢}$ = ٥٦٠ $\sqrt{٢}$ ثقل جم.سم.

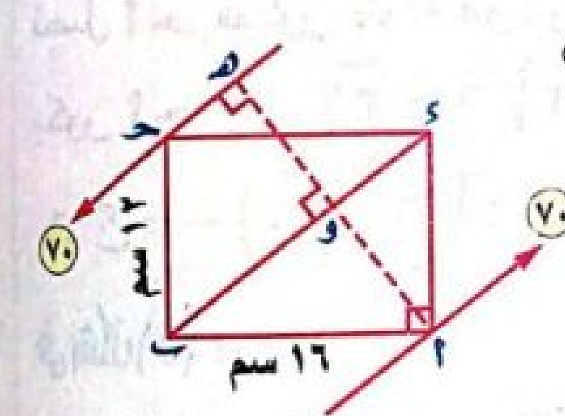
فى شكل(٨) : نرسم $\overline{\text{أهـ}}$ عمود من أ على خط عمل القوة ٧٠ المؤثرة فى حـ

فيكون $\overline{\text{أهـ}}$ هو ذراع الازدواج

∵ ء بـ = $\sqrt{(١٦)^٢ + (١٢)^٢}$ = ٢٠ سم ، أ و = $\frac{١٦ \times ١٢}{٢٠}$ = ٩,٦

∴ أ هـ = ٢ أ و = ١٩,٢ سم

∴ ع = ٧٠ × ١٩,٢ = ١٣٤٤ ثقل جم.سم.



فى شكل(٩) : نرسم من م العمودين $\overline{\text{م هـ}}$ ، $\overline{\text{م و}}$ على $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$

فيكون أ هـ = $\frac{1}{2}$ أ ب = ٨ سم

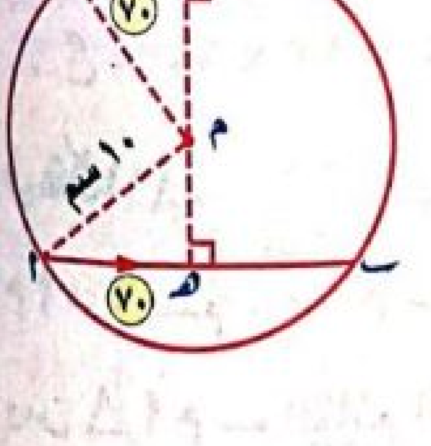
، ∵ م أ = ١٠ سم ∴ م هـ = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٨)^٢}$ = ٦ سم

، حـ و = $\frac{1}{2}$ حـ ء = ٦ سم

، ∵ م حـ = ١٠ سم ∴ م و = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ = ٨ سم

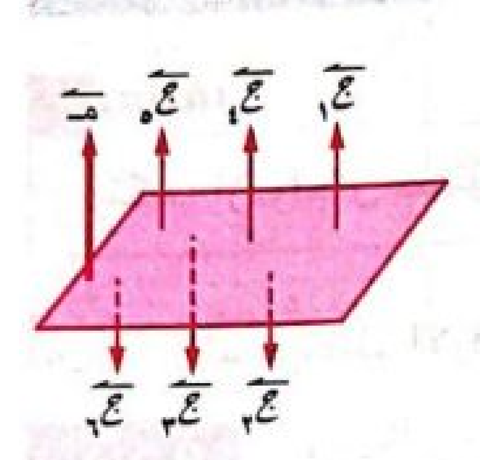
∴ هـ و (ذراع الازدواج) = م هـ + م و = ٦ + ٨ = ١٤ سم

∴ ع = ٧٠ × ١٤ = ٩٨٠ ثقل جم.سم.



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الازدواجات المستوية



يقصد بالازدواجات المستوية هى التى تقع خطوط عمل قوى هذه الازدواجات فى مستوٍ واحد ، وفى هذه الحالة تكون جميع عزوم هذه الازدواجات متوازية لأنها تكون عمودية على مستوٍ القوى مما يمكننا أن ننسب جميع متجهات عزوم هذه الازدواجات إلى نفس متجه الوحدة $\overline{م}$ العمودى على مستوٍ الازدواجات ، وهذا يجعلنا نستطع أن نتعامل مع القياسات الجبرية لهذه العزوم بدلاً من التعامل مع متجهات العزوم.

اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر

تعريف

يُقال لجسم متماسك إنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين ، إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى.

أى أن : شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين متجها عزميهما $\overline{ج_1}$ ، $\overline{ج_2}$ هو : $\overline{ج_1} + \overline{ج_2} = \overline{و}$ أى $\overline{ج_1} = -\overline{ج_2}$

وفى هذه الحالة يُقال إن الازدواجين متوازنان.

وعمومًا شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير عدة ازدواجات مستوية عزومها $\overline{ج_1}$ ، $\overline{ج_2}$ ، .... ، $\overline{ج_ن}$ هو $\overline{ج_1} + \overline{ج_2} + ... + \overline{ج_ن} = \overline{و}$

نتيجة

يتزن جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر إذا انعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجات.

أى أن : شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين (شرط توازن ازدواجين) القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما $ج_1$ ، $ج_2$ هو:

$ج_1 + ج_2 = 0$ أى $ج_1 = -ج_2$

وعمومًا شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير عدة ازدواجات مستوية القياسات الجبرية لعزومها $ج_1$ ، $ج_2$ ، .... ، $ج_ن$ هو $ج_1 + ج_2 + ... + ج_ن = 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تكافؤ ازدواجين

تعريف

يتكافأ ازدواجان مستويان إذا تساوى متجها عزميهما.

أى أن : شرط تكافؤ الازدواجين المستويين $\overleftarrow{ج_١}$ ، $\overleftarrow{ج_٢}$ هو : $\overleftarrow{ج_١} = \overleftarrow{ج_٢}$

نتيجة

يتكافأ ازدواجان مستويان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما.

أى أن : الازدواجان المستويان $\overleftarrow{ج_١}$ ، $\overleftarrow{ج_٢}$ يتكافآن إذا كان : $ج_١ = ج_٢$

ملاحظات

① إذا اتزن جسم تحت تأثير عدة قوى ، وازدواج قياسه الجبرى = ج

فإن مجموعة القوى يجب أن تكون ازدواجًا قياسه الجبرى = (− ج)

أى أن الجسم لا يمكن أن يتزن تحت تأثير قوة وازدواج.

② الازدواج لا يكافئ إلا ازدواجًا آخر.

③ يتوقف تأثير الازدواج فى الأجسام المتماسكة على :

- معيار عزمه.
- المستوى الذى تقع فيه قوتاه.

ولذلك لا يتغير تأثير الازدواج على الجسم إذا نقل من موضع لآخر فى مستويه مادام محتفظاً بعزمه مقدارًا وإشارة أو حتى استبدل بازدواج آخر يكافئه مادام يقع معه فى نفس المستوى (أو فى مستوى آخر يوازيه).

مثال ③

أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٥ سم ، ب حـ = ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ق ، ١٢ ، ق َ ، ١٢ ثقل كجم فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب فإذا اتزنت مجموعة هذه القوى فأوجد قيمة كل من : ق ، ق َ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل

القوتان اللتان مقداراهما ١٢ ، ١٢ ثقل كجم تكونان ازدواجًا

القياس الجبرى لعزمه $ج_١$

∴ $ج_١$ = ١٢ × ١٥ = ١٨٠ ثقل كجم.سم.

∵ الازدواج لايتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم فى اتجاه مضاد

∴ القوتان اللتان مقداراهما ق ، قَ ثقل كجم تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه = −١٨٠ ثقل كجم.سم.

∵ ق = قَ ، − ق × ١٠ = −١٨٠ ∴ ق = قَ = ١٨ ثقل كجم.

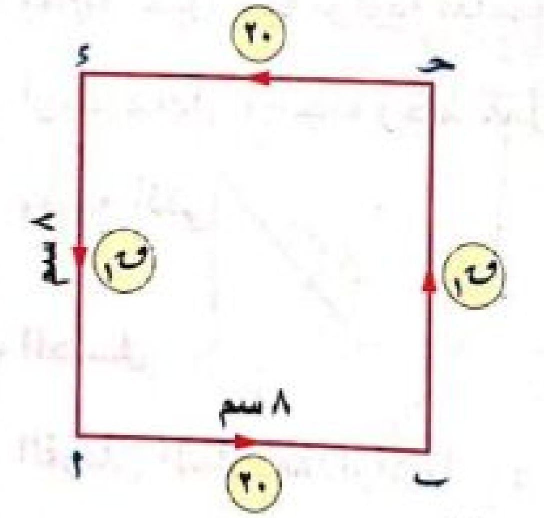
مثال ٤

أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٨ سم ورؤوسه أ ، ب ، حـ ، ء فى ترتيب دورى عكس حركة دوران عقارب الساعة أثرت قوتان مقداراهما ٢٠ ، ٢٠ ثقل جرام فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ أوجد :

(١) قوتين متساويتين فى المقدار $ق_١$ ، $ق_١$ تؤثران فى $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ ء}$ بحيث تكونان ازدواجًا مكافئًا للازدواج المكون من القوتين المعلومتين.

(٢) قوتين متساويتين فى المقدار $ق_٢$ ، $ق_٢$ تؤثران فى أ ، حـ وخطا عملهما يوازيان القطر $\overline{ب ء}$ وتكونان ازدواجًا مكافئًا للازدواج المكون من القوتين المعلومتين.

الحـــل



(١) القوتان المعلومتان تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه

$ج_١$ = ٢٠ × ٨ = ١٦٠ ثقل جم.سم

ونفرض أن القوتين اللتين مقداراهما $ق_١$ ، $ق_١$

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_٢$ = $ق_١$ × أ ب

= $ق_١$ × ٨ = ٨ $ق_١$ ثقل جم

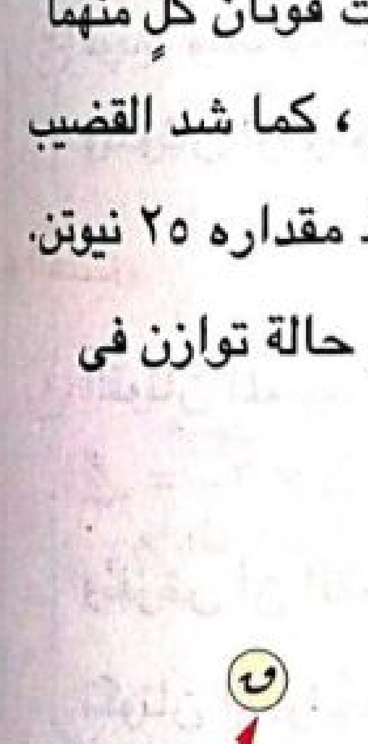
∵ الازدواجين متكافئان ∴ $ج_١$ = $ج_٢$

∴ ٨ $ق_١$ = ١٦٠ ∴ $ق_١$ = ٢٠ ثقل جم

، ∵ $ج_٢$ = ١٦٠ ثقل جم.سم (موجب) ∴ قوتاه تعملان فى $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$

∴ القوتان المطلوبتان مقدار كلٍ منهما ٢٠ ثقل جرام وتؤثران فى $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



② نفرض أن القوتين $ق_2$ ، $ق_3$ المؤثرتين فى أ ، حـ

وتوازيان القطر $\overline{بء}$ تكونان ازدواجًا

القياس الجبرى لعزمه = $ج_2$

∵ الازدواجين متكافئان ∴ $ج_1 = ج_2$

∴ $ج_2$ = ١٦٠ ثقل جم.سم وحيث أن $ج_2$ موجب :

∴ القوة التى تعمل فى أ تكون فى اتجاه $\overleftarrow{ءب}$ والتى تعمل

فى حـ تكون فى اتجاه $\overleftarrow{بء}$ ويكون :

∴ $٨\sqrt{٢}\, ق_2 = ١٦٠$ ∴ $ق_2 = \frac{١٦٠}{٨\sqrt{٢}} = ١٠\sqrt{٢}$ ثقل جرام

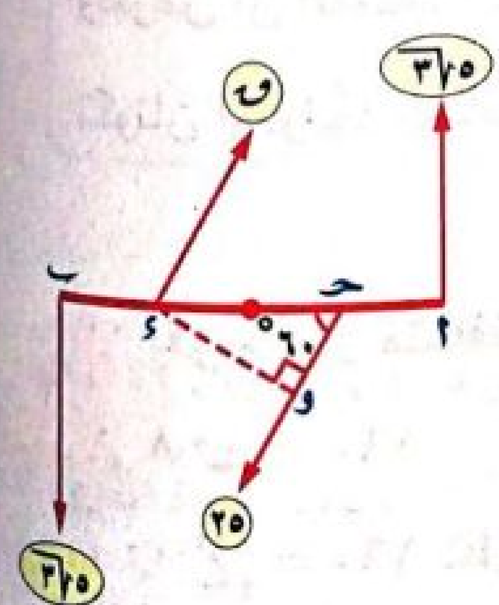
∴ القوتان المطلوبتان مقدار كلٍ منهما $١٠\sqrt{٢}$ ثقل جرام وتؤثر إحداهما فى أ

فى اتجاه $\overleftarrow{ءب}$ والأخرى فى حـ فى اتجاه $\overleftarrow{بء}$

مثال ٥

$\overline{أب}$ قضيب خفيف طوله ٤٠ سم مُعلق أفقياً من مسمار فى منتصفه ، أثرت قوتان كلٍ منهما $٥\sqrt{٣}$ نيوتن فى طرفيه إحداهما رأسية إلى أعلى والأخرى رأسية إلى أسفل ، كما شد القضيب بخيط يميل عليه بزاوية قياسها ٦٠° من نقطة عليه حـ وكان الشد فى الخيط مقداره ٢٥ نيوتن. أوجد مقدار واتجاه وخط عمل قوة رابعة إذا أثرت على القضيب حفظته فى حالة توازن فى وضع أفقي.

الحـــل



القوتان اللتان مقداراهما : $٥\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt{٣}$ نيوتن عند طرفى القضيب تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_1$

∴ $ج_1 = ٥\sqrt{٣} \times ٤٠ = ٢٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم فى اتجاه مضاد

∴ القوتان اللتان مقداراهما ٢٥ ، ق يجب أن تكونا ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه $ج_2$

∵ خط عمل $\overleftarrow{ق}$ يميل على القضيب $\overline{أب}$ بزاوية ٦٠° لأعلى

∵ $ج_٢ = -٢٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

∵ ق = ٢٥ نيوتن

∴ $ج_٢ = -٢٥ \times ء و = -٢٥ \times حـ ء$ جا ٦٠° $= -\frac{٢٥\sqrt{٣}}{٢}$ حـ ء

∴ $-\frac{٢٥\sqrt{٣}}{٢}$ حـ ء $= -٢٠٠\sqrt{٣}$ ∴ حـ ء = ١٦ سم

∴ نقطة ء تبعد عن نقطة حـ مسافة ١٦ سم.

مثال ٦

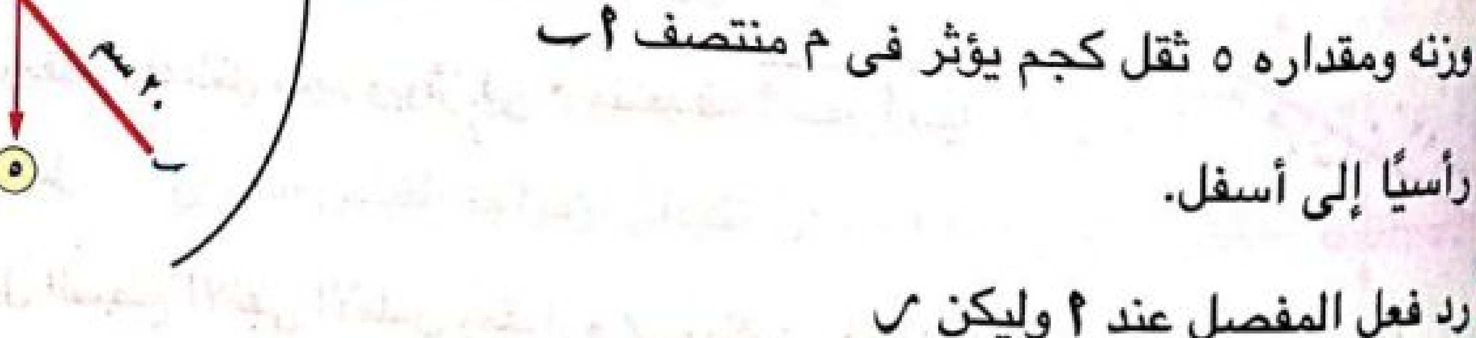
$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ومقدار وزنه ٥ ثقل كجم يمكنه الدوران بسهولة فى مستوٍ رأسى حول مفصل عند طرفه أ فإذا أثر على القضيب عندما كان رأسيًا ازدواج القياس الجبرى لعزمه ٥٠ ثقل كجم.سم ويعمل فى نفس المستوى الرأسى المار بالقضيب فأوجد فى وضع الاتزان كلاً من رد فعل المفصل وقياس زاوية ميل القضيب على الرأسى.

الحل

القضيب فى وضع الاتزان يكون واقعًا تحت تأثير :



① ازدواج القياس الجبرى لعزمه $ج_١ = ٥٠$ ثقل كجم.سم



② وزنه ومقداره ٥ ثقل كجم يؤثر فى م منتصف $\overline{أب}$ رأسيًا إلى أسفل.

③ رد فعل المفصل عند أ وليكن ر

∵ الازدواج لايتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم فى اتجاه مضاد

∴ القوتان اللتان مقداراهما ٥ ، ر يجب أن تكونا ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_٢ = -٥٠$ ثقل كجم.سم

∴ ر (مقدار رد فعل المفصل عند أ) = ٥ ثقل كجم رأسيًا إلى أعلى

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

، ∵ $ج_٢ = -٥٠$ ∴ $-٥ \times م حـ = -٥٠$ ∴ م حـ = ١٠ سم

∴ حا هـ (حيث هـ قياس زاوية ميل القضيب على الرأسى فى وضع التوازن)

$= \frac{م حـ}{م ٢} = \frac{١٠}{٢٠} = \frac{١}{٢}$

∴ هـ = ٣٠° أ، ١٥٠°

∴ القضيب فى وضع التوازن يميل على الرأسى لأسفل بزاوية

قياسها ٣٠° أ، ١٥٠°

مثال ٧

أب قضيب منتظم طوله ٢٤ سم ومقدار وزنه ٥ ثقل كجم يمكنه الدوران بسهولة فى مستوٍ رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب يبعد عن طرفه ب مسافة ٤ سم. فإذا استند القضيب بطرفه أ على سطح أفقى أملس فأوجد رد فعل كل من السطح الأفقى والمسمار على القضيب وإذا شد الطرف ب بقوة أفقية مقدارها ق ثقل كجم حتى أصبح الضغط على السطح الأفقى مساويًا لوزن القضيب وكان القضيب يميل على الأفقى حينئذٍ بزاوية قياسها ٣٠° فأوجد مقدار ق ورد فعل المسمار على القضيب فى هذه الحالة.

الحـــل

فى الحالة الأولى : القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :

① وزنه ومقداره ٥ ثقل كجم ويؤثر فى م منتصف أب رأسيًا إلى أسفل.

② رد فعل السطح الأفقى الأملس ومقداره ر ويكون رأسيًا إلى أعلى عند أ

③ رد فعل المسمار عند حـ وليكن مقداره ر̄

∵ القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى

∴ خطوط عمل القوى الثلاث يجب أن تتوازى أو تتلاقى فى نقطة واحدة

، ∵ الوزن ، رد فعل السطح ر قوتان متوازيتان

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ رد فعل المسمار رَ يجب أن يوازيهما ويكون اتجاهه رأسيًا إلى أعلى وحسب شروط اتزان ثلاث قوى متوازية تكون محصلة القوتين رَ ، رَ تساوى فى المقدار القوة التى مقدارها ٥ ثقل كجم فى اتجاه مضاد

∴ ر + رَ = ٥ (١)

، رَ × ٨ = ر × ١٢ أى : رَ = $\frac{٣}{٢}$ ر (٢)

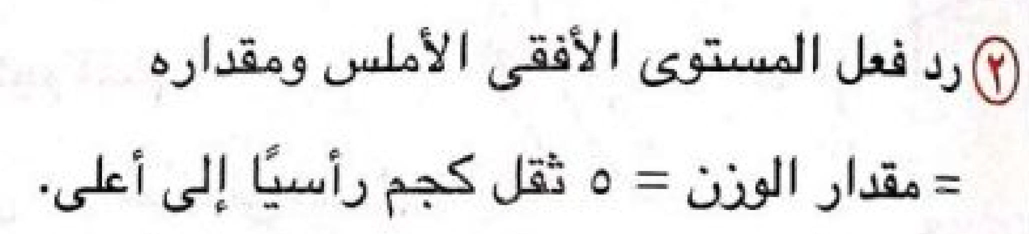
وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ ر + $\frac{٣}{٢}$ ر = ٥ ∴ $\frac{٥}{٢}$ ر = ٥

∴ ر (رد فعل السطح الأفقى) = ٢ ثقل كجم رأسيًا إلى أعلى

، رَ (مقدار رد فعل المسمار) = $\frac{٣}{٢}$ × ٢ = ٣ ثقل كجم رأسيًا إلى أعلى.

فى الحالة الثانية : القضيب متزن بتأثير أربع قوى :


① وزنه ومقداره ٥ ثقل كجم رأسيًا إلى أسفل.


② رد فعل المستوى الأفقى الأملس ومقداره
= مقدار الوزن = ٥ ثقل كجم رأسيًا إلى أعلى.


③ القوة ق أفقية عند ب


④ رد فعل المسمار عند حـ وليكن مقداره رَ

القوتان اللتان مقداراهما ٥ ، ٥ ثقل كجم تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه ع$_١$

∴ ع$_١$ = −٥ × أ ء = −٥ × أ م جتا ٣٠° = −٥ × ١٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = −٣٠ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم.سم

، ∵ الازدواج لايتزن إلا مع ازدواج آخر يساويه فى العزم ومضاد له فى الاتجاه

∴ القوتان اللتان مقداراهما ق ، رَ تكونان ازدواجاً القياس الجبرى

لعزمه ع$_٢$ = ٣٠ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم.سم

∴ رَ = ق وخطا عملهما متوازيان ومتضادان ، ق × حـ و = ٣٠ $\sqrt{٣}$

∴ ق × ب حـ جا ٣٠° = ٣٠ $\sqrt{٣}$ ∴ ق × ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٣٠ $\sqrt{٣}$

∴ ق = ١٥ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم

∴ رَ = ١٥ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم أفقية فى اتجاه مضاد لاتجاه ق

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٨

أ ب حـ ء صفيحة مستطيلة الشكل حيث : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم ووزنها ٢٠ ثقل كجم ويؤثر فى نقطة تقاطع القطرين. عُلقت الصفيحة فى مسمار رفيع أفقى بالقرب من الرأس ء بحيث كان مستواها رأسيًا ، فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ٧٥ ثقل كجم .سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة. فأوجد قياس زاوية ميل $\overline{ء ب}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

الحـــل

∵ متجه عزم الازدواج عمودى على مستوى الصفيحة

∴ الازدواج يعمل فى مستوى الصفيحة نفسها وفى وضع الاتزان تكون الصفيحة متزنة بتأثير :

(١) الازدواج الذى معيار عزمه ٧٥ ثقل كجم .سم.

(٢) وزنها ومقداره ٢٠ ثقل كجم ويؤثر فى م رأسيًا إلى أسفل.

(٣) رد فعل المسمار عند ء وليكن ر

∴ القوتان اللتان مقداراهما ٢٠ ، ر تكونان ازدواجاً

القياس الجبرى لعزمه = −٧٥ ثقل كجم .سم

∴ ر (مقدار رد فعل المسمار عند ء) = ٢٠ ثقل كجم رأسيًا إلى أعلى

وبفرض أنه فى وضع الاتزان يميل $\overline{ء ب}$ على الرأسى بزاوية هـ

∴ −٢٠ × م ء جا هـ = −٧٥

، ∵ م ء = $\frac{١}{٢}$ ب ء = $\frac{١}{٢}\sqrt{(١٢)^٢ + (٩)^٢}$ = ٧,٥ سم

∴ −٢٠ × ٧,٥ جا هـ = −٧٥ ∴ ١٥٠ جا هـ = ٧٥

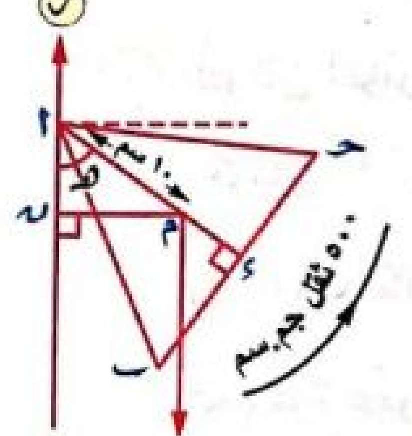
∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$

∴ هـ (زاوية ميل $\overline{ء ب}$ على الرأسى لأسفل فى وضع الاتزان) = ٣٠° أ، ١٥٠°

مثال ٩

اب حـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع ارتفاعه ١٥ سم ووزنها ١٠٠ ثقل جرام ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث. ثُقبت الصفيحة ثقبًا صغيرًا بالقرب من الرأس ا ثم عُلقت من هذا الثقب فى مسمار رفيع بحيث كان مستواها رأسيًا ، أثر على الصفيحة ازدواجاً معيار عزمه ٥٠٠ ثقل جرام.سم فى مستويها. أوجد ميل الضلع $\overline{اب}$ على الأفقى فى وضع التوازن.

الحل



∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير :

(١) ازدواج القياس الجبرى لعزمه $ج_١$ = ٥٠٠ ثقل جم.سم.

(٢) وزن الصفيحة ومقداره ١٠٠ ثقل جرام.

(٣) رد فعل المسمار عند ا ومقداره ر ثقل جرام

، ∵ الازدواج يتزن مع ازدواج مثله يساويه فى العزم ويضاده فى الاتجاه

∴ القوتان اللتان مقداراهما (ر ، ١٠٠) ثقل جرام تكونان ازدواجًا القياس الجبرى

لعزمه $ج_٢$ = −٥٠٠ ثقل جرام.سم

، ∵ $ج_٢$ = −١٠٠ × م ن ∴ −١٠٠ × م ن = −٥٠٠

∴ م ن = ٥ سم

وبفرض أن $\overline{اء}$ يصنع زاوية قياسها هـ مع الرأسى

∴ جا هـ = $\frac{م ن}{ا م}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠° أ، ١٥٠°

إذا كانت : هـ = ٣٠°

، ∵ ق(∠ء ا ب) = ٣٠° ∴ $\overline{اب}$ رأسى لأسفل أى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٩٠°

إذا كانت : هـ = ١٥٠°

، ∵ ق(∠ء ا حـ) = ٣٠° ∴ $\overline{احـ}$ رأسى لأعلى

∴ $\overline{اب}$ يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠°

ملاحظة

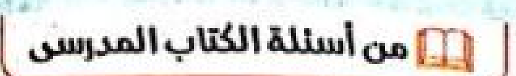
فى المثال السابق : إذا تبادل $\overline{اب}$ ، $\overline{احـ}$ موضعيهما فإن $\overline{اب}$ يميل على الأفقى لأسفل بزاوية قياسها ٣٠° أو $\overline{اب}$ يكون رأسيًا لأعلى أى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٩٠°

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين **8**

على الازدواج - اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر - تكافؤ ازدواجين

اختبار تفاعلى


من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا تمارين على القياس الجبرى لعزم الازدواج

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① القوتان المؤثرتان على عجلة قيادة السيارة وتحدثان دورانًا لعجلة القيادة تكونان ....

(أ) احتكاكًا. (ب) ازدواجًا.

(جـ) قوة عمودية على عجلة القيادة. (د) محصلة غير صفرية.

② لإحداث ازدواج من قوتين يجب أن تكون القوتان ....

(أ) متساويتين فى المقدار. (ب) متضادتين فى الاتجاه.

(جـ) ليسا على خط عمل واحد. (د) كل ماسبق.

③ إذا كان ازدواج معيار عزمه ٣٥٠ نيوتن. م ومعيار إحدى قوتيه ٧٠ نيوتن ، فإن طول ذراع عزم الازدواج يساوى ....

(أ) ٥٠ مترًا. (ب) ٥ أمتار. (جـ) ٥ سم. (د) ٢٤٥٠٠ سم.

④ أى من الشروط الآتية لا تغير من تأثير الازدواج على الجسم ؟

(أ) إزاحة الازدواج إلى موضع جديد فى مستواه.

(ب) إزاحة الازدواج إلى مستوى آخر يوازى مستواه.

(جـ) دوران الازدواج فى نفس مستواه.

(د) كل ما سبق.

⑤ إذا كانت : $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ قوتين تكونان ازدواجًا وكانت $\overrightarrow{ق}_1 = ٣\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$

فإن : $\overrightarrow{ق}_2$ = ...

(أ) $٣\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ (ب) $-٣\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$

(جـ) $٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ (د) $-٣\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



⑥ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\text{ق}_1 = 7$ نيوتن ، القوتان $\overline{\text{ق}_1}$ ، $\overline{\text{ق}_2}$

تكونان ازدواجًا فإن القياس الجبرى لعزم

الازدواج = ... نيوتن. سم.

(أ) ٢١٠
(ب) $70\sqrt{3}$
(جـ) $140\sqrt{3}$
(د) ١٤٠

⑦ (دور أول ٢٠١٨) إذا كان : $\overline{\text{ق}_1} = 6\,\overline{\text{س}} + \text{ب}\,\overline{\text{ص}}$ ، $\overline{\text{ق}_2} = \text{أ}\,\overline{\text{س}} - 4\,\overline{\text{ص}}$

قوتى ازدواج فإن : أ + ب = ...

(أ) ١٠
(ب) −١٠
(جـ) −٢
(د) ٢

⑧ قوتان $\overline{\text{ق}_1} = 4\,\overline{\text{س}} - \text{أ}\,\overline{\text{ص}}$ ، $\overline{\text{ق}_2} = 2\text{ب}\,\overline{\text{س}} + 5\,\overline{\text{ص}}$ تكونان ازدواجًا

فإن : ٢ أ + ب = ...

(أ) −١٢
(ب) −٩
(جـ) ٨
(د) ١٢

⑨ إذا كانت القوتان : $\overline{\text{ق}_1} = 5\,\overline{\text{س}} + \text{أ}\,\overline{\text{ص}} + 3\,\overline{\text{ع}}$

، $\overline{\text{ق}_2} = \text{ب}\,\overline{\text{س}} - 9\,\overline{\text{ص}} + \text{ح}\,\overline{\text{ع}}$ تكونان ازدواجًا

فإن : أ + ب + حـ = ...

(أ) −١
(ب) صفر
(جـ) ١
(د) ١٧

⑩ إذا كان : ٢ $\overline{\text{ق}_1}$ ، ٣ $\overline{\text{ق}_2}$ هما قوتا ازدواج وكان : $\overline{\text{ق}_2} = 4\,\overline{\text{س}} - 2\,\overline{\text{ص}}$

فإن : $\overline{\text{ق}_1}$ = ...

(أ) $-6\,\overline{\text{س}} + 3\,\overline{\text{ص}}$
(ب) $6\,\overline{\text{س}} - 3\,\overline{\text{ص}}$
(جـ) $3\,\overline{\text{س}} - 6\,\overline{\text{ص}}$
(د) $-3\,\overline{\text{س}} + 6\,\overline{\text{ص}}$

⑪ (دور ثان ٢٠١٨) في الشكل المقابل :

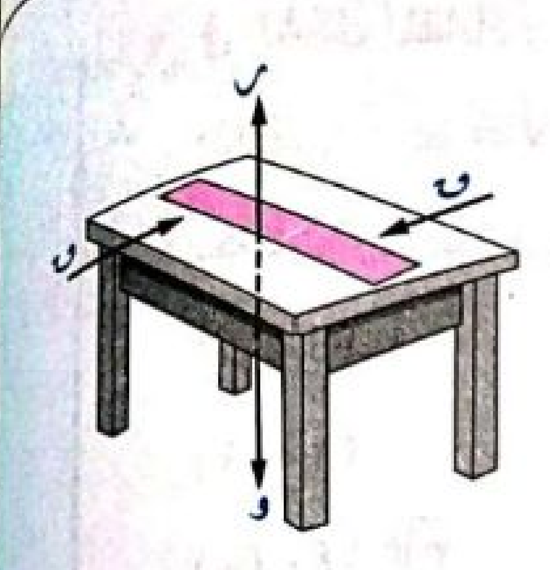
إذا كانت : $\text{ق}_1 = 7$ نيوتن والقوتان $\overline{\text{ق}_1}$ ، $\overline{\text{ق}_2}$

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ٢١٠ نيوتن.سم

فإن : ل = ... سم

(أ) ٣٠
(ب) $30\sqrt{3}$
(جـ) $20\sqrt{3}$
(د) $15\sqrt{3}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



(١٢) الشكل المقابل يمثل مسطرة وزنها (و) موضوعة على نضد أفقى أملس وأثر عليها قوتين مستويتين ومتوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه (– ق ، ق)

لذلك تكون المسطرة ....

(أ) ساكنة وفى حالة اتزان.

(ب) تتحرك حركة انتقالية.

(جـ) تتحرك حركة دورانية.

(د) تكون على وشك الحركة.

(١٣) قوتان $\overleftarrow{ق_1}$ = ٣٠ $\overleftarrow{س}$ – ٤٠ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = –٣٠ $\overleftarrow{س}$ + ٤٠ $\overleftarrow{ص}$ مقاسة بالنيوتن البعد بينهما ٣ أمتار فإن معيار مجموع عزوم القوى حول النقطة (–٤ ، ١) هو ....

(أ) ٥٠　　(ب) ١٣٠　　(جـ) ١٤٠　　(د) ١٥٠

(١٤) قوتان تكونان ازدواج مقدار كل منهما ٣٠ نيوتن ومقدار عزم الازدواج ١٢٠ نيوتن.سم إذا زاد مقدار كل من القوتين ٥ نيوتن فإن مقدار عزم الازدواج الناتج يساوى .... نيوتن.سم

(أ) ١٤٠　　(ب) ١٣٠　　(جـ) ١٢٠　　(د) ١١٠

---

(٢) أثرت القوتان $\overleftarrow{ق_1}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ – ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ فى النقطتين ؟ (٥ ، ٨) ، ب(٣ ، ٥) على الترتيب فكونتا ازدواجًا. فأوجد متجه عزم هذا الازدواج وذراع العزم.

«–١٨ $\overleftarrow{ع}$ ، ٣٫٦ وحدة طول»

---

(٣) (دور أول ٢٠٠٦) تؤثر القوتان $\overleftarrow{ق_1}$ = م $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ن $\overleftarrow{ص}$ عند النقطتين ؟ = (١ ، ١) ، ب = (–١ ، –٢) على الترتيب. إذا كونت القوتان ازدواجًا فأوجد قيمة كلٍ من الثابتين م ، ن ثم احسب طول العمود المرسوم من نقطة ب إلى خط عمل القوة $\overleftarrow{ق_1}$

«–٣ ، –٢ ، $\sqrt{١٣}$ وحدة طول»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤ أثرت القوتان ($أ \overline{س} + ب \overline{ص}$) ، ($٥ \overline{س} - ٢ \overline{ص}$) فى النقطتين حـ ، ء على الترتيب حيث : حـ(-٢ ، ١) ، ء(٣ ، ١) فإذا كانت القوتان تكونان ازدواجًا. أوجد قيمة كلٍ من أ ، ب ، ثم أوجد عزم الازدواج ، أوجد أيضًا البُعد العمودى بين خطى عمل القوتين.

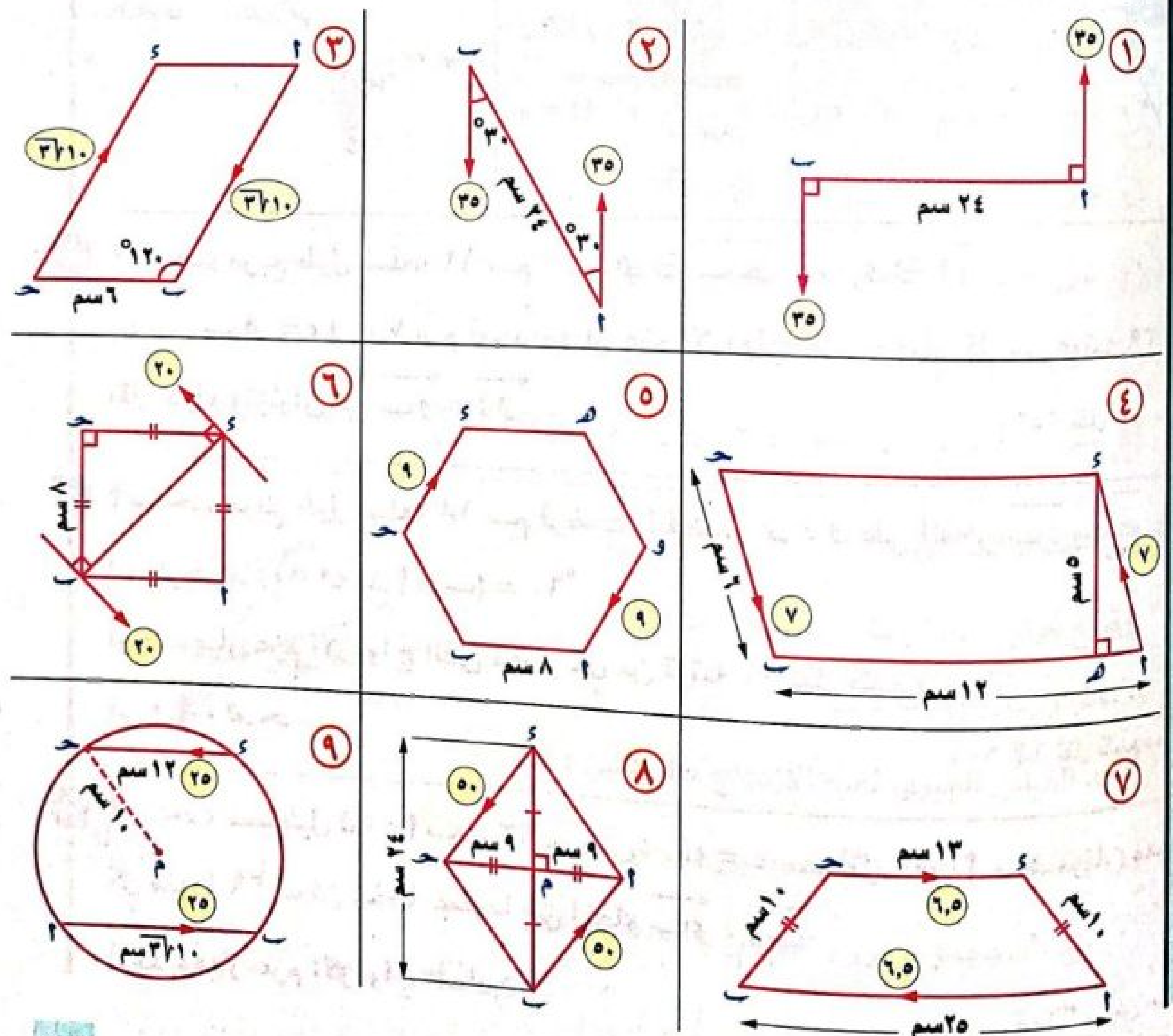
«$-١٠ \overline{ع}$ ، $\frac{١٠\sqrt{٢٩}}{٢٩}$»

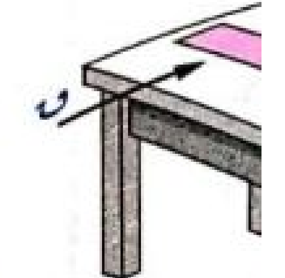
٥ أثرت القوتان ($٣ \overline{س} - ٥ \overline{ص}$) ، ($-٣ \overline{س} + ٥ \overline{ص}$) فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ، متجها موضعهما ($٦ \overline{س} + \overline{ص}$) ، ($٤ \overline{س} + \overline{ص}$).
برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

«$-١٠ \overline{ع}$»

٦ أثرت القوى $\overline{ق}_١ = ٦ \overline{ص}$ فى نقطة الأصل كما أثرت $\overline{ق}_٢ = -٦ \overline{ص}$ فى النقطة (٢ ، ٠) بيِّن أن مجموع عزوم القوى بالنسبة لأى نقطة (س ، ص) لا يعتمد على س ، ص

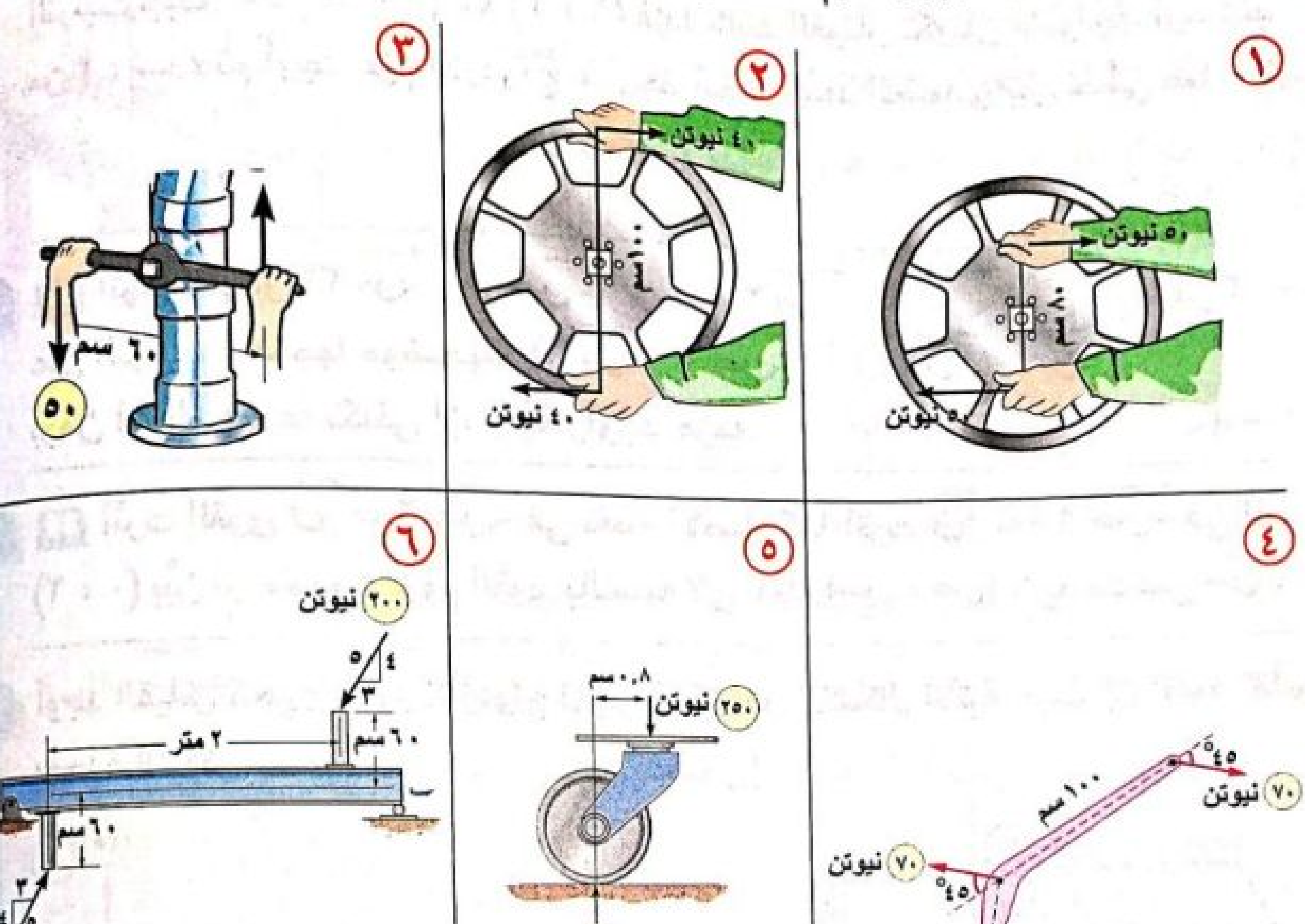
٧ أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المؤثر فى كل من الاشكال الآتية حيث إن القوة تقاس بوحدة النيوتن.







٨ أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المؤثر فى كل من الأشكال الآتية :



٩ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ ب حـ ، و ∈ أ ء

بحيث : ب هـ = ء و = ٧ سم أوجد معيار عزم الازدواج الذى معيار كلٍ من قوتيه ٣٩ ثقل جرام وتؤثران فى ب و ، ء هـ

«٢٥٢ ثقل جم.سم»

١٠ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٨ سم فرضت النقطتان هـ ، و على القطر ب ء بحيث :

ق (∠ حـ هـ ء) = ق (∠ أ و ب) = ٦٠°

أوجد معيار عزم الازدواج الذى معيار كلٍ من قوتيه ١٠ ثقل كجم وتؤثران فى و أ ، هـ حـ

«$٩٠ \sqrt{٢}$ ثقل كجم.سم»

١١ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٢ سم ، أ ء = ٥ سم أثرت فى أ ، حـ قوتان معيار كلٍ منهما ٣٩ نيوتن وخطا عملهما فى اتجاه ب ء ، ء ب

أوجد معيار عزم الازدواج الحادث.

«٣٦٠ نيوتن.سم»

١٢ أ ب حـ ء معين فيه طول قطره $\overline{أ حـ}$ = ١٤ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠°

أوجد معيار عزم الازدواج الذى مقدار كلٍ من قوتيه ٥٠ ثقل جرام وتؤثران فى $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$

«٣٥٠ ثقل جم.سم»

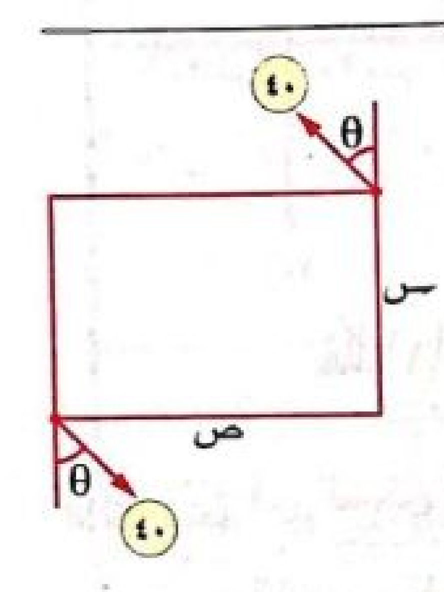
---

١٣ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوة قدرها ٨ نيوتن فى $\overleftarrow{حـ هـ}$ كما أثرت فى الرأس أ قوة أخرى لها نفس المعيار وفى اتجاه $\overleftarrow{هـ حـ}$ أوجد معيار عزم الازدواج الحادث.

«١٢٠ نيوتن.سم»

---

١٤ الشكل المقابل :



يوضح قوتين مقدار كل منهما ٤٠ نيوتن ، تؤثران على طرفى صفيحة مستطيلة الشكل أبعادها س ، ص سم.

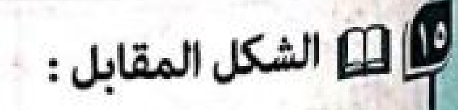
أوجد عزم ازدواج القوتين فى كل من الحالات الآتية :

(١) س = ٣ سم ، ص = ٤ سم ، θ = صفر°

(٢) س = ص = ٦ سم ، $\theta = \frac{\pi}{4}$

(٣) س = ٠ ، ص = ٥ سم ، θ = ٣٠°

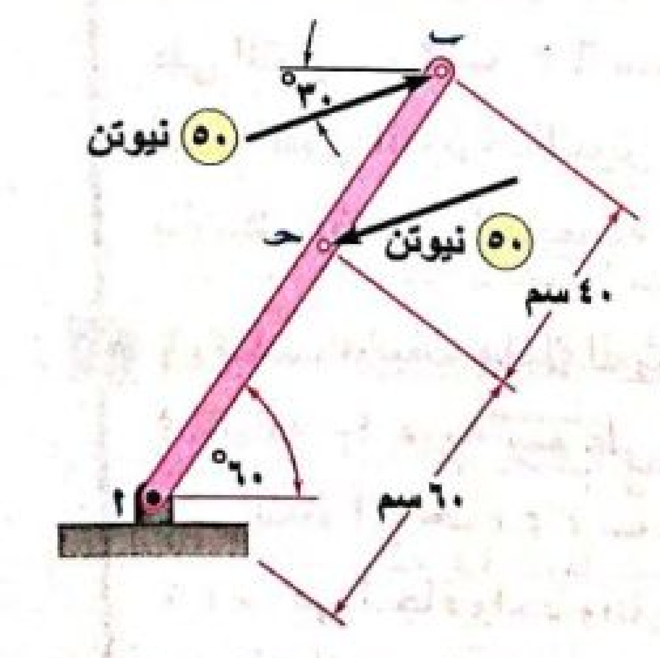
(٤) س = ٦ سم ، ص = ٠ ، θ = ٩٠°



(٥) س = ٥ سم ، ص = ١٢ سم ، ظا $\theta = \frac{5}{12}$

---

١٥ الشكل المقابل :



يوضح قوتين معيار كل منهما ٥٠ نيوتن ، تؤثران على رافعة $\overline{أ ب}$

أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج بطريقتين :

(١) باستخدام البعد العمودى بين القوتين.

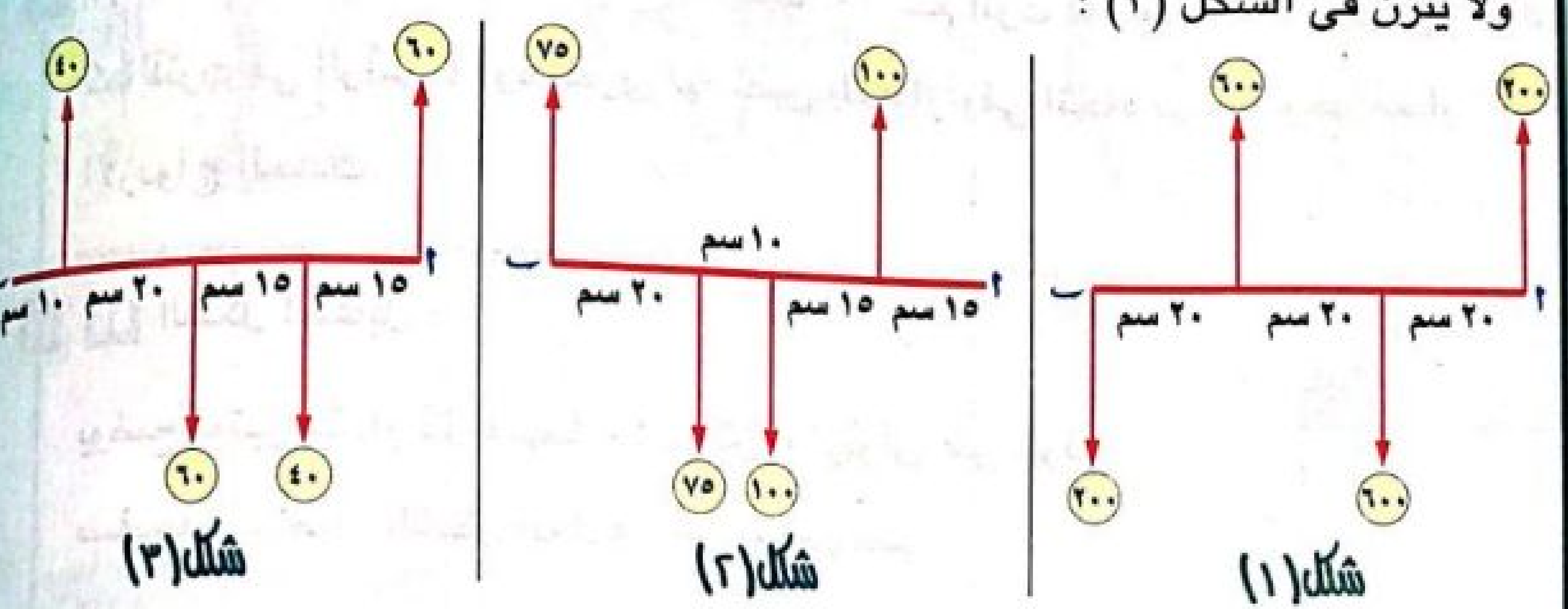
(٢) بإيجاد مجموع عزوم القوتين بالنسبة لنقطة أ

«−١٠٠٠ نيوتن.سم»



ثانيًا تمارين على اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر - تكافؤ ازدواجين

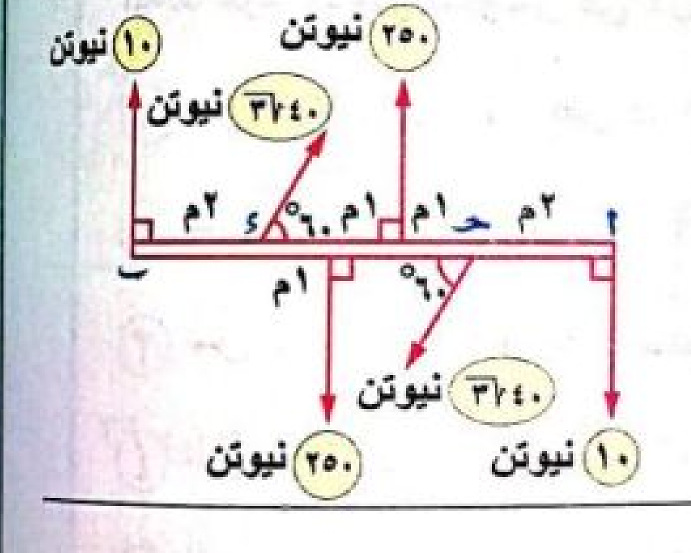
١ أب قضيب مهمل الوزن طوله ٦٠ سم أثرت فيه أربع قوى متوازية وعمودية عليه عند النقط وفى الاتجاهات المبينة على الأشكال الآتية وكانت مقادير القوى المبينة منسوبة كلها إلى نفس وحدات قياس مقدار القوة. أثبت أن الجسم يتزن فى الشكلين (١ ، ٢) ولا يتزن فى الشكل (٣) :



٢ فى الشكل المقابل :

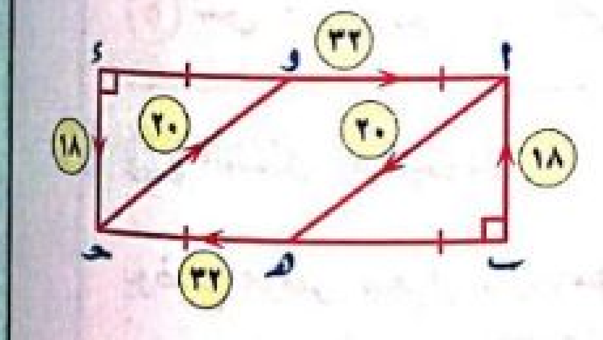
أب قضيب خفيف تؤثر فيه القوى الموضحة بالشكل.

أثبت أن القضيب متزن.



٣ (دور أول ٢٠١٩) فى الشكل المقابل :

أبحء مستطيل فيه : هـ ، و منتصفات بحـ ، أء على الترتيب ، أب = ٦ سم ، بحـ = ١٦ سم. فإذا كانت القوى المؤثرة بالنيوتن ومقاديرها واتجاهاتها كما بالشكل. أثبت أن المجموعة متزنة.



٤ أب قضيب مهمل الوزن طوله ١٠٠ سم ، حـ ، ء نقطتان عليه تبعدان عن الطرف أ مسافة ٤٠ ، ٨٠ سم على الترتيب. أثرت قوى مقاديرها ٣٠٠ ، ق ، ٣٠٠ ، ق نيوتن عند النقط أ ، حـ ، ء ، ب على الترتيب عمودية على القضيب بحيث كانت القوتان عند أ ، ب فى اتجاه واحد والقوتان الأخريان فى الاتجاه المضاد. عيِّن قيمة ق بحيث يتوازن القضيب.

«٤٠٠ نيوتن»

٥ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم رؤوسه أ ، ب ، حـ ، ء فى ترتيب دورى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة أثرت قوتان مقداراهما ٥ $\sqrt{2}$ ، ٥ $\sqrt{2}$ ثقل جرام أحدهما فى الرأس ب فى اتجاه $\overleftarrow{أحـ}$ والأخرى فى الرأس ء فى اتجاه $\overleftarrow{حـ أ}$ أوجد قوتين متساويتين فى المقدار تؤثران فى $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ وتكونان ازدواجًا يكافئ الازدواج المكون من القوتين المعلومتين.

«١٠ ، ١٠»

٦ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٨ سم ، طول العمود المرسوم من ء على $\overline{ب حـ}$ = ٣,٥ سم. أثرت قوتان مقداراهما ٢٠ ، ٢٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ أوجد معيار كلٍ من القوتين اللتين تؤثران فى $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{أء}$ وتحدثان اتزاناً مع القوتين المعلومتين.

«٣٢ ، ٣٢ نيوتن»

٧ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، قوتان مقدار كلٍ منهما ٢٥ ث.جم تؤثران فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ء حـ}$ أوجد مقدار كلٍ من القوتين المؤثرتين فى ب ، ء عموديتين على $\overline{ب ء}$ بحيث تحدثان اتزانًا مع القوتين المعلومتين.

«٢٠ ، ٢٠ ث.جم»

٨ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١ متر تؤثر قوتان معيار كل منهما ٤ ث.كجم فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ كما تؤثر قوتان خارج المربع معيار كل منهما ق مقدرًا بوحدات ث.كجم عند ء ، ب بحيث تصنع الأولى مع $\overleftarrow{ءأ}$ ، الثانية مع $\overleftarrow{ب حـ}$ زاويتين متساويتين فى القياس ، قياس كل منهما ١٥° ، عيِّن قيمة ق حتى يتكافأ الازدواج المكون من القوتين الأوليين والازدواج المكون من القوتين الأخريين.

«$\frac{٤\sqrt{٦}}{٣}$ ث.كجم»

٩ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٠ سم ، ق (د أ ء ب) = ٣٠° أثرت قوتان مقدار كلٍ منهما ٨ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ على الترتيب. كما أثرت قوتان خارج المستطيل مقدار كل منهما ق نيوتن عند ب ، ء بحيث تصنع الأولى مع $\overleftarrow{ب حـ}$ والثانية مع $\overleftarrow{ءأ}$ زاويتين متساويتين فى القياس ، قياس كلٍ منهما = ١٥° أوجد قيمة ق حتى يتكافأ الازدواج المكون من القوتين الأوليين والازدواج المكون من القوتين الأخيرتين.

«٤ $\sqrt{٦}$ نيوتن»

١٠ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٥ سم ، ورؤوسه أ ، ب ، حـ ، ء في ترتيب دورى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة أثرت قوتان مقداراهما ٦٥ ، ٦٥ ثقل جرام في $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ أوجد قوتين متساويتين تكونان ازدواجًا مكافئًا للازدواج المكون من القوتين المعلومتين بحيث :

(١) تؤثران فى $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ ء}$

(٢) تؤثران فى ب ، ء وعموديتان على $\overline{ب ء}$

(٣) تؤثران فى أ ، حـ وتوازيان القطر $\overline{ب ء}$

« $\frac{1}{12}$ ٢٧ ، $\frac{1}{12}$ ٢٧ ، ٢٥ ، ٢٥ ، $\frac{5}{24}$ ٣٥ ، $\frac{5}{24}$ ٣٥ ثقل جرام»

١١ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ل سم. أثرت قوتان مقدار كلٍ منهما ٢٤ $\sqrt{3}$ نيوتن فى $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{و أ}$ أوجد القوتين المؤثرتين فى أ ، ء وعموديتين على $\overline{أ ء}$ بحيث تحدثان اتزاناً مع القوتين المعلومتين.

«٣٦ ، ٣٦ نيوتن»

١٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overleftarrow{جـ_1}$ ، $\overleftarrow{جـ_2}$ ازدواجين متزنين وكان $\overleftarrow{جـ_1}$ = ٢٠ $\overleftarrow{ع}$

فإن : $\overleftarrow{جـ_1}$ − $\overleftarrow{جـ_2}$ = ...

(أ) $\overleftarrow{0}$ (ب) −٤٠ $\overleftarrow{ع}$ (جـ) ٢٠ $\overleftarrow{ع}$ (د) ٤٠ $\overleftarrow{ع}$

(٢) إذا تكافأ ازدواجين فإن : ....

(أ) معيار جميع القوى المكونة للازدواجين يكون متساوٍ.

(ب) ذراع الازدواج الأول = ذراع الازدواج الثانى.

(جـ) مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجين = صفر

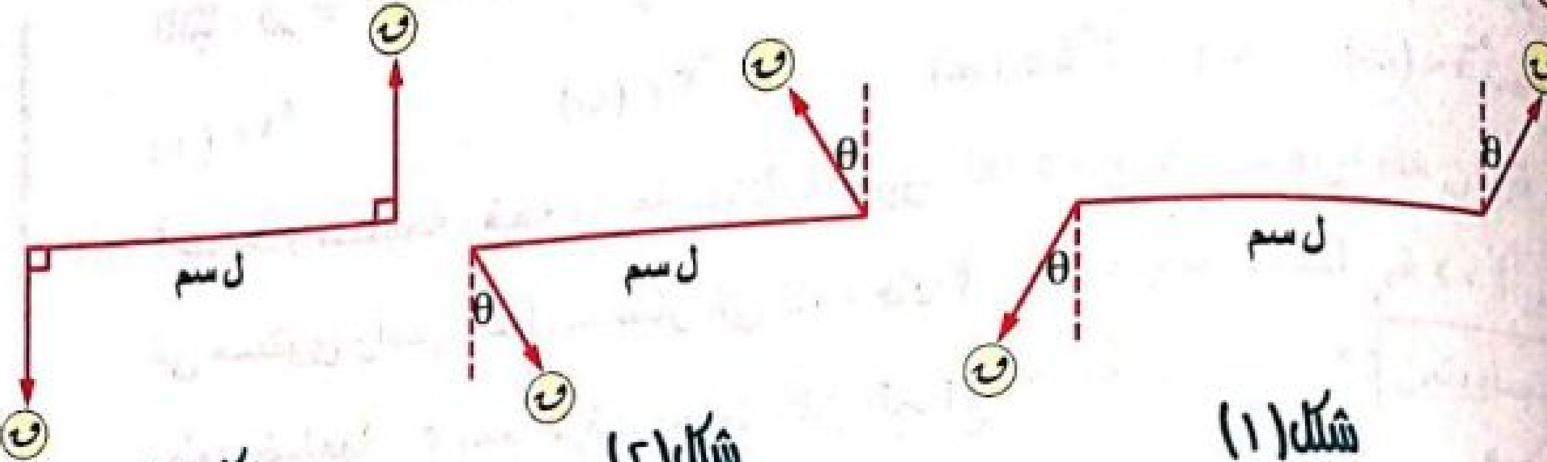
(د) القياسات الجبرية لعزوم الازدواجين متساوية.

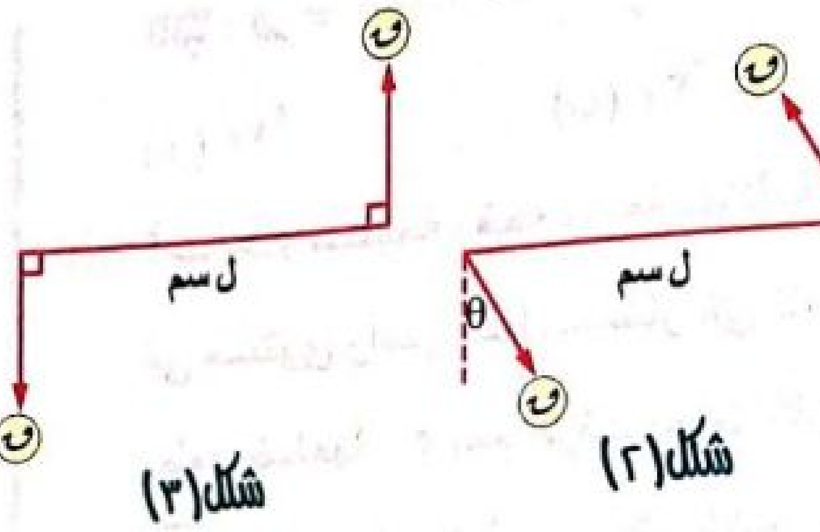
(٣) ازدواج مكون من قوتين قيمة كل منهما ١٢ نيوتن والمسافة العمودية بينهما ٨ سم يكافئ الازدواج الناشئ من قوتان المسافة العمودية بينهما ٦ سم ومقدار أى من القوتين = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ١٢ (د) ٤

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤) أى الازدواجات الآتية تكون متكافئة ؟





(أ) الشكلان (١) ، (٢)　　(ب) الشكلان (٢) ، (٣)

(جـ) الشكلان (١) ، (٣)　　(د) جميع الأشكال.

٥) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٢ سم

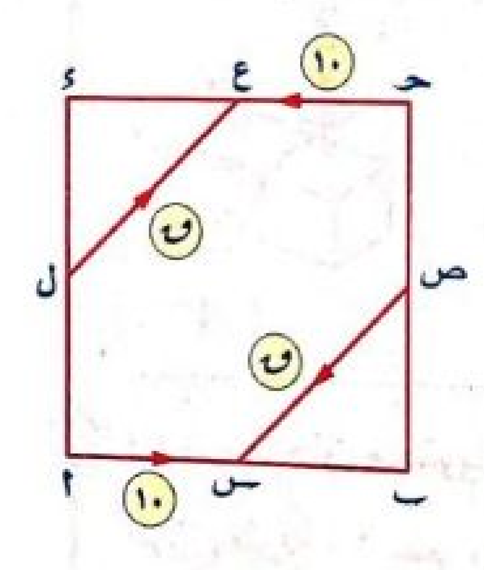
، ب حـ = ٨ سم أثرت القوى المبينة مقاديرها

واتجاهاتها بالرسم فكونت ازدواجين متوازنين

فإن : $ق_1$ – $ق_2$ = ... نيوتن.

(أ) –٤　　(ب) –٢　　(جـ) ٢　　(د) ٤

٦) فى الشكل المقابل :



س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاع المربع

أ ب حـ ء أثرت القوى المبين مقاديرها

واتجاهاتها فاتزنت

فإن : ق = ... ثقل جرام.

(أ) ٥ $\sqrt{2}$　　(ب) ١٠

(جـ) ١٠ $\sqrt{2}$　　(د) ٢٠

٧) فى الشكل المقابل :

أ ب قضيب منتظم وزنه ٧ ثقل كجم يتصل

طرفه أ بمفصل فى حائط رأسى اتزن

بتأثير ازدواج عزمه ٢١ نيوتن.سم فإن :

أولاً : ر = ... ثقل كجم.

(أ) ٣　　(ب) ٧　　(جـ) ١٢　　(د) ٢١

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثانيًا : هـ = ...

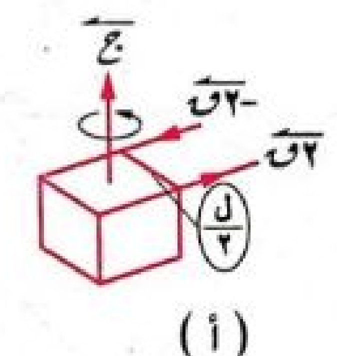
(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

⑧ أ ب جـ د صفيحة رقيقة مربعة منتظمة تدور في مستوى رأسي حول مسمار في ثقب عند أ وطول ضلعها ٥٠ سم اتزنت بحيث كان الضلع $\overline{أب}$ منطبق على الرأسي بتأثير ازدواج معيار عزمه ٢٥٠ ثقل.جم.سم ، اتجاهه عمودي على مستوى الصفيحة

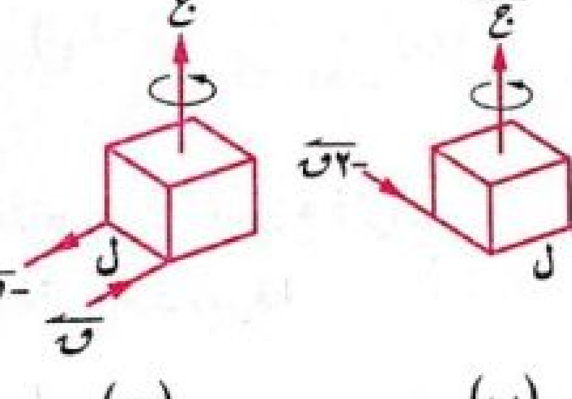
فإن : و = ر = ... ثقل.جم.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

⑨ القوى في كل شكل من الأشكال الآتية تعطى ازدواجات متكافئة ما عدا الشكل ....



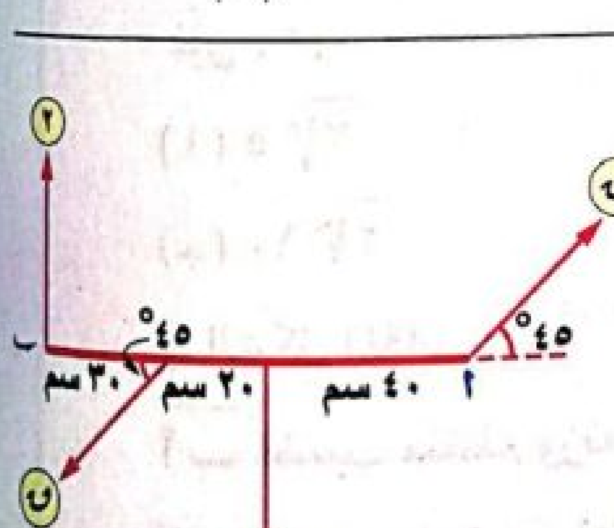




(أ) (ب) (جـ) (د)

⑬ أثر ازدواجان مستويان في قضيب $\overline{أب}$ مهمل الوزن طوله ٩٠ سم ، وكان الازدواج الأول يتكون من قوتين ق ، ق ث.كجم والثاني من قوتين ٢ ، ٢ ث.كجم وتؤثر عند النقط وفي الاتجاهات الموضحة في الشكل المقابل.

عيِّن قيمة ق التي تجعل الجسم يتزن تحت تأثير الازدواجين.



«$\frac{٥\sqrt{٢}}{٣}$ ث.كجم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٤ في الشكل المقابل :

أب = بحـ = حـء = ٦ سم

، قوتان مقداراهما ٥٠ ، ٥٠ ثقل جرام تؤثران في أ ، ء في اتجاه عمودي على $\overline{أء}$ أوجد قوتين متساويتين تكونان ازدواجًا مكافئًا للازدواج المكوّن من القوتين المعلومتين بحيث :

(١) تكونان عموديتين على $\overleftrightarrow{أء}$ تؤثران في ب ، حـ

(٢) تصنع كل منهما زاوية قياسها ٦٠° مع $\overleftrightarrow{أء}$ وتؤثران في ب ، حـ

«١٥٠ ، ١٥٠ ، ١٠٠√٣ ، ١٠٠√٣ ث.جم»

---

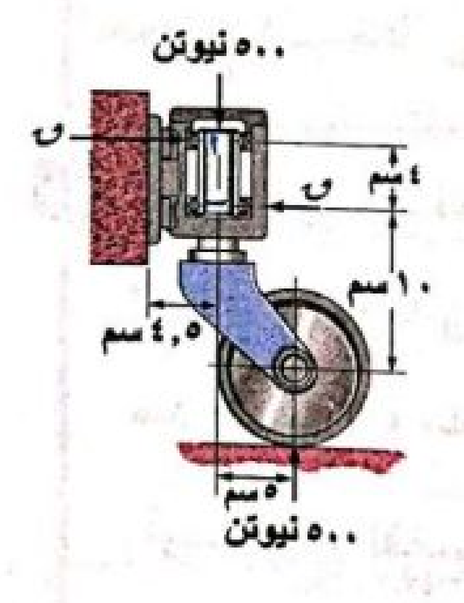
١٥ أب قضيب مهمل الوزن طوله ١,٥ متر تؤثر عند نقطتي تثليثه قوتان مقدار كل منهما ٢٠٠ نيوتن في اتجاهين متضادين وعموديًا على القضيب. رفعت القوتان وأثرت بدلًا منهما قوتان أخريان مقدار كل منهما ١٢٠ نيوتن عند طرفي القضيب بحيث تكونان ازدواجًا يكافئ الازدواج الأول. فما هو قياس زاوية ميل خط عمل كل من القوتين الجديدتين على القضيب ؟

«٣٣° ٤٥َ»

---

١٦ الشكل المقابل يمثل عجلة كرسي تؤثر فيها القوى الموضحة بالشكل فإذا كانت العجلة متزنة.

أوجد قيمة : ق



«٦٢٥ نيوتن»

---

١٧ أب حـ ء هـ و سداسي منتظم أثرت القوى ٣ ، ٩ ، $ق_1$ ، ٣ ، ٩ ، $ق_2$ ث.جم في الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بحـ}$ ، $\overrightarrow{ءحـ}$ ، $\overrightarrow{ءهـ}$ ، $\overrightarrow{هـو}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب.

أوجد قيمة كل من $ق_1$ ، $ق_2$ لكي تتزن المجموعة.

«١٢ نيوتن»

(١٨) أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ على الترتيب ، أثرت القوى التى مقاديرها ق ، ق ، ق ، ٦ ، ٦ نيوتن فى الاتجاهات $\overrightarrow{أس}$ ، $\overrightarrow{حـ ع}$ ، $\overrightarrow{ص س}$ ، $\overrightarrow{ل ع}$ ، $\overrightarrow{حـ ص}$ ، $\overrightarrow{أ ل}$ على الترتيب إذا اتزنت مجموعة القوى **أوجد قيمة : ق** «٤٠ نيوتن»

(١٩) قضيب خفيف طوله ٣٠ سم مُعلَّق أفقيًا من مسمار فى منتصفه ، أثرت قوتان معيار كلٍ منهما ١٠ $\sqrt{3}$ ثقل جرام فى طرفيه إحداهما رأسية إلى أعلى والأخرى رأسية إلى أسفل ، كما شد القضيب من إحدى نقطه (حـ) بخيط يميل عليه بزاوية قياسها ٦٠° وكان الشد فى الخيط مقداره ٥٠ ثقل جرام. أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير قوة رابعة إذا أثرت على القضيب حفظته فى حالة اتزان وهو أفقى. «٥٠ ثقل جم وتؤثر فى ء بحيث : حـ ء = ١٢ سم»

(٢٠) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ٣٠٠ ثقل جرام يؤثر فى منتصفه ويمكنه الدوران بسهولة فى مستوٍ رأسى حول مسمار أفقى يمر بثقب فى القضيب عند حـ حيث : أ حـ = ١٥ سم ، أثرت على القضيب عند أ قوة قدرها ٣٠٠ ثقل جرام رأسيًا إلى أعلى. أوجد مقدار القوة التى إذا أثرت على القضيب عند ب فى اتجاه عمودى على $\overline{أب}$ تجعله يتزن بحيث يكون القضيب مائلاً على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وتكون أ أعلى من ب وكم يكون مقدار رد فعل المسمار حينئذٍ ؟
«١٢٠ $\sqrt{3}$ ثقل جم ، ١٢٠ $\sqrt{3}$ ثقل جم عند حـ عموديًا على القضيب لأسفل»

(٢١) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم يدور حول مسمار فى ثقب صغير عند نقطة حـ ∈ $\overline{أب}$ حيث : أ حـ = ٥ سم فاتزن القضيب فى وضع أفقى بتأثير قوتين مقدار كلٍ منهما ٥٠ نيوتن تؤثران عند طرفيه أ ، ب فى اتجاهين متضادين وتصنعان مع القضيب زاوية قياسها ٣٠°
أوجد وزن القضيب ومقدار رد فعل المسمار.
«١٠٠ ، ١٠٠ نيوتن»

(٢٢) (دور أول ٢٠١٨) $\overline{أب}$ قضيب طوله ٥٠ سم ووزنه ٢٠ نيوتن يؤثر فى منتصفه ، يمكنه الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مفصل مثبت عند طرفه أ أثر على القضيب ازدواج فى مستوى رأسى معيار عزمه ٢٥٠ نيوتن.سم. أوجد رد فعل المفصل وزاوية ميل القضيب على الرأسى فى وضع التوازن.
«٢٠ نيوتن لأعلى ، ٣٠° أ، ١٥٠°»

٢٣ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم يتحرك فى مستوٍ رأسى حول مفصل مُثبت عند أ ، أثر على القضيب فى نفس مستويه ازدواج معيار عزمه $\frac{٣\sqrt{٣}}{٥}$ ثقل كجم.متر فدار القضيب حتى اتزن فى وضع يميل فيه على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠°.
أوجد كلاً من وزن القضيب ورد فعل المفصل.
«٦ ، ٦ ثقل كجم»

٢٤ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٥ نيوتن يتحرك فى مستوٍ رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه أ ، أثر على القضيب فى نفس مستويه ازدواج معيار عزمه ٥٠ نيوتن.سم فاتزن القضيب فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°.
أوجد طول القضيب وكذلك رد فعل المفصل فى وضع الاتزان. «٤٠ سم ، ٥ نيوتن رأسيًا لأعلى»

٢٥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٠ ثقل كجم يؤثر فى منتصفه ويتحرك فى مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه أ ، أثر على القضيب ازدواج فى مستوى رأسى.
القياس الجبرى لعزمه ١٥٠ ث.كجم.سم برهن على أن رد فعل المفصل عند أ يساوى وزن القضيب وأوجد قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى فى وضع التوازن.
«ر = ١٠ ث.كجم ، ٦٠°»

٢٦ 📖 $\overline{أب}$ قضيب طوله ٦٠ سم ووزنه ١٨ نيوتن يؤثر عند منتصفه. يمكن للقضيب الدوران بسهولة فى مستوٍ رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند النقطة حـ التى تبعد ١٥ سم عن أ فإذا استند القضيب بطرفه ب على نضد أفقى أملس وشد الطرف أ أفقيًا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويًا لوزن القضيب. أوجد الشد فى الحبل ورد فعل المسمار علمًا بأن القضيب يتزن فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°.
«$١٢\sqrt{٣}$ ، $١٢\sqrt{٣}$ نيوتن»

٢٧ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٢ نيوتن وطوله مترًا واحدًا يمكنه الدوران بسهولة فى مستوٍ رأسى حول مسمار أفقى مُثبت بثقب صغير فى القضيب عند نقطة عليه تبعد مسافة ٢٠ سم عن ب فإذا استند القضيب بطرفه أ على نضد أفقى أملس فأوجد رد فعل النضد. وإذا شد الطرف ب أفقيًا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويًا لوزن القضيب فأوجد الشد فى الحبل ورد فعل المسمار علمًا بأن القضيب يميل على النضد بزاوية قياسها ٤٥°.
«٠,٧٥ ، ٥ ، ٥ نيوتن»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٨ أ ب قضيب منتظم وزنه ٧٥ نيوتن وطوله ٨٠ سم يدور بسهولة حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند نقطة حـ على القضيب حيث : ب حـ = ٢٠ سم فإذا استند القضيب بطرفه أ على سطح أفقى أملس.

فأوجد مقدار واتجاه رد فعل كلٍ من السطح الأفقى والمسمار على القضيب ، إذا شد الطرف ب بحبل حتى أصبح رد فعل المستوى يساوى وزن القضيب وكان القضيب يميل على الأفقى بزاوية °٣٠

فأوجد الشد فى الحبل ومقدار واتجاه رد فعل المسمار إذا كان الحبل :

(١) أفقيًا. (٢) رأسيًا. (٣) عموديًا على القضيب.

---

٢٩ أ ب حـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع ارتفاعه ١٨ سم ووزنها ٣٠٠ جرام ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث ، والصفيحة مثقوبة ثقبًا صغيرًا بالقرب من الرأس أ ومعلقة من هذا الثقب فى مسمار أفقى بحيث يكون مستواها رأسيًا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ١٨٠٠ ثقل جرام.سم فى مستويها. أوجد قياس زاوية ميل أ ب على الأفقى فى وضع التوازن. «°٣٠ أ °٩٠»

---

٣٠ أ ب حـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٤ سم ووزنها ٥٠٠ ثقل جرام ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث والصفيحة مُعلَّقة فى مستوٍ رأسى من ثقب صغير بالقرب من أ فإذا أثر على الصفيحة وفى مستويها ازدواج فاتزنت عندما كان الحرف أ ب أفقيًا فأوجد معيار عزم هذا الازدواج. «٦٠٠٠ ثقل جم.سم»

---

٣١ أ ب حـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ١٣ سم ، ب حـ = ١٠ سم تدور بسهولة فى مستوٍ رأسى حول مفصل مُثبت عند أ فإذا أثر على الصفيحة وفى مستويها ازدواج معيار عزمه ٨٠٠ ثقل جرام. سم فاتزنت فى وضع كان فيه أحد الساقين رأسيًا. فأوجد وزن الصفيحة علمًا بأنه يؤثر فى نقطة تلاقى متوسطات المثلث.

«٢٦٠ ثقل جرام»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣٢ أ ب ح صفيحة على شكل مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٩ سم ، ب ح = ١٢ سم ووزنها ٢٠٠ ثقل جم يؤثر فى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ، عُلقت من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسيًا ، أوجد معيار عزم الازدواج الذى إذا أثر عليها فى مستويها يجعل الحرف $\overline{أ ب}$ رأسيًا. أوجد كذلك معيار عزم الازدواج الذى يجعل $\overline{أ ب}$ أفقيًا. وإذا عُلقت الصفيحة من الرأس ح فكم يكون القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يجعل $\overline{ب ح}$ رأسيًا ؟

«٨٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٦٠٠ ثقل جم.سم»

٣٣ (دور أول ٢٠٠٣) أ ب ح ى صفيحة رقيقة على هيئة مربع طول ضلعه ٥٠ سم ووزنها ٣٠٠ ث.جرام يؤثر عند مركز المربع. عُلقت الصفيحة من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ فى مسمار أفقى بحيث يكون مستواها رأسيًا. أثر على الصفيحة فى مستواها ازدواج القياس الجبرى لعزمه ٧٥٠٠ ث.جم.سم أوجد قياس زاوية ميل القطر $\overline{أ ح}$ على الرأسى فى وضع التوازن.

«٤٥° أ ١٣٥°»

٣٤ (١٩٩٣) صفيحة على شكل مربع أ ب ح ى طول ضلعه ٨٠ سم ، وزنها ٢٥٠ ثقل جرام يؤثر فى نقطه تلاقى القطرين. عُلقت الصفيحة من مسمار فى ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستويها رأسيًا وأثر عليها ازدواج فى مستويها فاتزنت فى وضع يميل فيه $\overline{أ ح}$ على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° عيِّن معيار عزم الازدواج.

«٥٠٠٠ $\sqrt{٢}$ ثقل جرام.سم»

٣٥ أ ب ح ى صفيحة رقيقة على هيئة مربع طول ضلعه ٢٠ سم ووزنها ١٥٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين. عُلِقت الصفيحة على مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس ى فاتزنت فى مستوٍ رأسى. أوجد الضغط على المسمار وإذا أثر على الصفيحة ازدواج اتجاهه عموديًا على مستويها فاتزنت فى وضع فيه $\overline{أ ى}$ أفقى.

أوجد معيار عزم الازدواج.

«١٥٠ نيوتن ، ١٥٠٠ نيوتن.سم»

٣٦ (دور أول ٢٠١٧) أ ب ح ى صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه : أ ب = ١٨ سم ، ب ح = ٢٤ سم ووزنها ٢٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين. علقت الصفيحة فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس ى بحيث كان مستواها رأسيًا. فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه يساوى ١٥٠ نيوتن.سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة فأوجد زاوية ميل $\overline{ى ب}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

«٣٠° أ ١٥٠°»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٣٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كونت القوتان $\overrightarrow{ق_1} = أ\,\overrightarrow{س} + ب\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = (١٣$ نيوتن ، هـ°$)$ ازدواجًا حيث جا هـ $= \frac{٥}{١٣}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٧ أ ، ١٧ (ب) ٧ أ ، −١٧ (جـ) −٧ أ ، ١٧ (د) −٧ أ ، −١٧

② ازدواج معيار عزمه $(ج_1)$ فإذا تضاعف معيار كل من قوتيه ونقصت المسافة العمودية بينهما بمقدار النصف كان معيار عزم الازدواج الجديد $(ج_2)$ فإن : ....

(أ) $ج_1 = ج_2$ (ب) $ج_1 = ٢\,ج_2$ (جـ) $ج_2 = ٢\,ج_1$ (د) $ج_1 = ٤\,ج_2$

③ في الشكل المقابل :

إذا كانت المجموعة متزنة فإن : ....

(أ) $ق_1 > ق_2$

(ب) $ق_1 < ق_2$

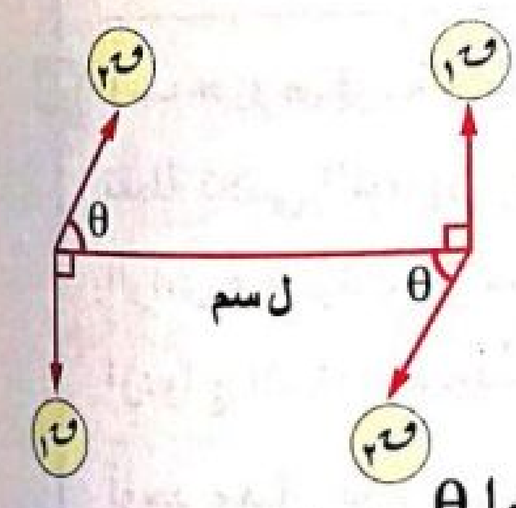
(جـ) $ق_1 = ق_2$

(د) $\frac{ق_1}{ق_2} = \frac{٣}{٢}$

④ في الشكل المقابل :

إذا كانت المجموعة متزنة

فإن : .... (حيث θ زاوية حادة)



(أ) $ق_1 > ق_2$ (ب) $ق_1 < ق_2$

(جـ) $ق_1 = ق_2$ (د) $ق_2 = ق_1$ جا θ

٣٨ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه (و) ثقل كجم يمكنه الدوران بسهولة في مستوٍ رأسي حول مسمار أفقي ثابت يمر بثقب صغير في القضيب عند نقطة تبعد عن ب بمقدار $\frac{١}{٦}$ طول القضيب. فإذا استند القضيب بطرفه أ على نضد أفقي أملس وشد الطرف ب أفقيًا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويًا وزن القضيب فأثبت أن الشد في الحبل يساوي ٣ و ظتا هـ ثقل كجم حيث هـ قياس زاوية ميل القضيب على النضد.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الدرس 2

الازدواج المحصل

تعريف مجموع ازدواجين مستويين

مجموع ازدواجين مستويين هو ازدواج واحد يسمى «الازدواج المحصل» عزمه يساوى مجموع عزمى هذين الازدواجين.

أى أن: إذا كانت القوتان $\overline{\text{ق}_1}$ ، $-\overline{\text{ق}_1}$ تكونان ازدواجًا عزمه $\overline{\text{ج}_1}$ ، القوتان $\overline{\text{ق}_2}$ ، $-\overline{\text{ق}_2}$ تكونان ازدواجًا عزمه $\overline{\text{ج}_2}$ فإن: $\overline{\text{ج}}$ (عزم الازدواج المحصل) $= \overline{\text{ج}_1} + \overline{\text{ج}_2}$

ويكون القياس الجبرى لعزم مجموع ازدواجين مستويين = مجموع القياسين الجبريين لعزميهما

أى أن: $\text{ج} = \text{ج}_1 + \text{ج}_2$

تعميم

مجموع أى عدد محدود من الازدواجات المستوية هو ازدواج عزمه يساوى مجموع عزوم هذه الازدواجات.

أى أن: $\overline{\text{ج}} = \overline{\text{ج}_1} + \overline{\text{ج}_2} + ... + \overline{\text{ج}_{\text{ن}}}$

ويكون القياس الجبرى لعزم مجموع عدة ازدواجات مستوية = مجموع القياسات الجبرية لعزومها.

أى أن: $\text{ج} = \text{ج}_1 + \text{ج}_2 + ... + \text{ج}_{\text{ن}}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

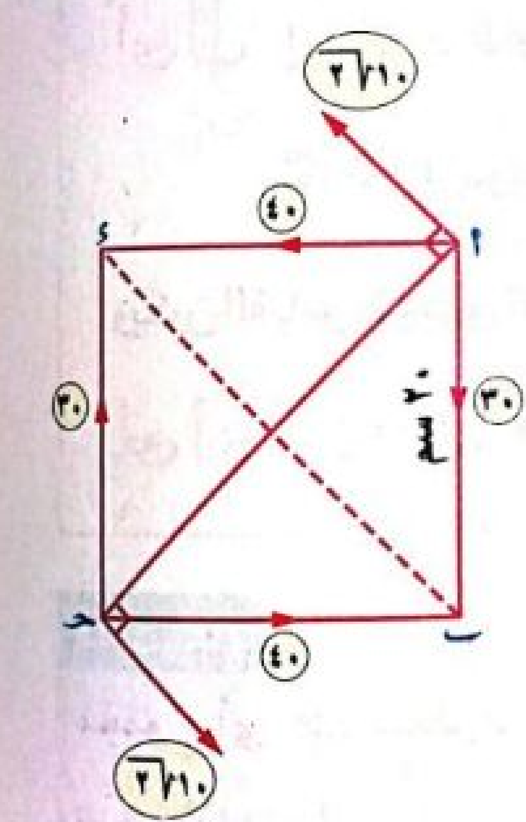
ملاحظة

- الازدواج $\overleftarrow{ج}$ يسمى الازدواج المحصل كما يُقال إننا اختزلنا مجموعة الازدواجات إلى ازدواج واحد محصل.
- إذا كان ج (القياس الجبرى لعزم مجموع عدة ازدواجات مستوية) = صفرًا فيُقال حينئذٍ لمجموعة الازدواجات إنها متوازنة.

مثال ١

أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٢٠ سم. أثرت قوى مقاديرها ٣٠ ، ٤٠ ، ٣٠ ، ٤٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب. كما أثرت فى أ ، حـ قوتان مقدار كل منهما ١٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن فى اتجاهى $\overleftarrow{ب ء}$ ، $\overleftarrow{ء ب}$ على الترتيب. أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل.

الحل



∵ طول ضلع المربع أ ب حـ ء = ٢٠ سم

∴ طول قطره = ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ القوتين اللتين مقداراهما (٣٠ ، ٣٠) نيوتن

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_١$

∴ $ج_١$ = −٣٠ × ب حـ = −٣٠ × ٢٠ = −٦٠٠ نيوتن.سم

، ∵ القوتين اللتين مقداراهما (٤٠ ، ٤٠) نيوتن

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_٢$

∴ $ج_٢$ = ٤٠ × أ ب = ٤٠ × ٢٠ = ٨٠٠ نيوتن.سم

، ∵ القوتين اللتين مقداراهما (١٠ $\sqrt{٢}$ ، ١٠ $\sqrt{٢}$) نيوتن

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_٣$:

∴ $ج_٣$ = ١٠ $\sqrt{٢}$ × أ حـ = ١٠ $\sqrt{٢}$ × ٢٠ $\sqrt{٢}$ = ٤٠٠ نيوتن.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ج :

، ج = $ج_١$ + $ج_٢$ + $ج_٣$ = −٦٠٠ + ٨٠٠ + ٤٠٠ = ٦٠٠ نيوتن.سم.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٢

ا ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : $\text{ا ب} = ٨$ سم ، $\text{ب حـ} = ١٠$ سم ، ق$(\angle \text{ا ب حـ}) = ١٢٠^\circ$

أثرت قوتان مقدار كلٍ منهما ٦ ثقل كجم فى $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ كما أثر ازدواج متجه عزمه عمودى على المستوى ا ب حـ ء ومعيار عزمه $٢٠\sqrt{٣}$ ثقل كجم.سم

فأوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل إذا كان :

① اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى فى نفس اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين ٦ ، ٦ ثقل كجم.

② اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى فى اتجاه مضاد لاتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين ٦ ، ٦ ثقل كجم.

الحـل

نرسم $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overleftarrow{\text{ا ب}}$ فيكون :

$\text{ء هـ} = \text{ا ء}$ جا $\text{ا} = ١٠$ جا $٦٠^\circ = ٥\sqrt{٣}$ سم

∴ $ج_١$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٦ ، ٦ ثقل كجم) $= -٦ \times ٥\sqrt{٣} = -٣٠\sqrt{٣}$ ثقل كجم.سم

① إذا كان متجه عزم الازدواج المعطى فى نفس اتجاه متجه عزم الازدواج $\overleftarrow{ج_١}$

كان $ج_٢$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج المعطى) $= -٢٠\sqrt{٣}$ ثقل كجم.سم

∴ $ج$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل) $= ج_١ + ج_٢ = -٣٠\sqrt{٣} - ٢٠\sqrt{٣}$

$= -٥٠\sqrt{٣}$ ثقل كجم.سم.

② إذا كان متجه عزم الازدواج المعطى فى اتجاه مضاد لعزم الازدواج $\overleftarrow{ج_١}$

كان $ج_٢$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج المعطى) $= ٢٠\sqrt{٣}$

∴ $ج_٢$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل) $= ج_١ + ج_٢ = -٣٠\sqrt{٣} + ٢٠\sqrt{٣}$

$= -١٠\sqrt{٣}$ ثقل كجم.سم.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٣

الشكل المقابل :

يمثل صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع تؤثر عليها القوى عموديًا على الأضلاع كما بالشكل.
أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل.

الحل

∵ القوتين اللتين مقداراهما (٣٠٠ ، ٣٠٠) نيوتن تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_1$

∴ $ج_1$ = − ٣٠٠ × ٤٠ = − ١٢٠٠٠ نيوتن.سم

، القوتين اللتين مقداراهما (١٥٠ ، ١٥٠) نيوتن تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_2$

∴ $ج_2$ = ١٥٠ × ٤٠ = ٦٠٠٠ نيوتن.سم

، القوتين اللتين مقداراهما (٢٠٠ ، ٢٠٠) نيوتن تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_3$

∴ $ج_3$ = ٢٠٠ × ٤٠ = ٨٠٠٠ نيوتن.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ج حيث :

ج = $ج_1$ + $ج_2$ + $ج_3$ = − ١٢٠٠٠ + ٦٠٠٠ + ٨٠٠٠ = ٢٠٠٠ نيوتن.سم

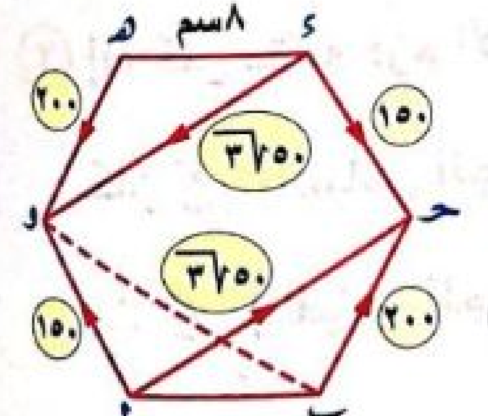
مثال ٤

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ٨ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٠٠ ، ١٥٠ ، ٥٠ $\sqrt{3}$ ، ٢٠٠ ، ٥٠ $\sqrt{3}$ ، ١٥٠ ثقل جرام فى $\overrightarrow{ب حـ}$ ، $\overrightarrow{ء حـ}$ ، $\overrightarrow{أ حـ}$ ، $\overrightarrow{ء و}$ ، $\overrightarrow{هـ و}$ ، $\overrightarrow{أ و}$ على الترتيب

أوجد : ① القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة.

② مقدار واتجاه قوتين تعملان فى $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ء هـ}$ لتصبح المجموعة متزنة.

الحل



∵ طول ضلع السداسى (ل) = ٨ سم

∴ أ حـ = ب و = ل $\sqrt{3}$ = ٨ $\sqrt{3}$

$ج_1$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى قوتاه ٢٠٠ ، ٢٠٠ ثقل جرام)

= ٢٠٠ × ٨ $\sqrt{3}$ = ١٦٠٠ $\sqrt{3}$ ثقل جم.سم

، $ج_٢$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى قوتاه ١٥٠ ، ١٥٠ ثقل جرام)

$= -١٥٠ \times ٨ \sqrt{٣} = -١٢٠٠ \sqrt{٣}$ ثقل جم.سم

، $ج_٣$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى قوتاه $٥٠\sqrt{٣}$ ، $٥٠\sqrt{٣}$ ثقل جرام)

$= ٥٠\sqrt{٣} \times ل = ٥٠\sqrt{٣} \times ٨ = ٤٠٠\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم

① ج (القياس الجبرى لمجموع عزوم الازدواجات) $= ج_١ + ج_٢ + ج_٣$

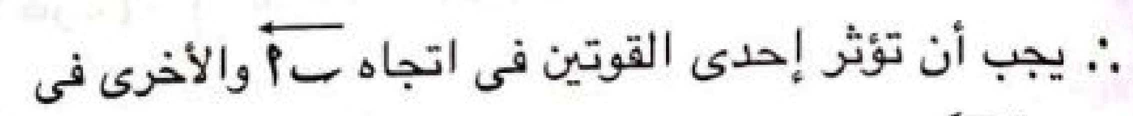
$= ١٦٠٠\sqrt{٣} - ١٢٠٠\sqrt{٣} + ٤٠٠\sqrt{٣} = ٨٠٠\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة $= ٨٠٠\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم.

② لكى تتزن المجموعة يجب أن تكون القوتان اللتان تعملان فى $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ءهـ}$ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى



$-٨٠٠\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم



∴ يجب أن تؤثر إحدى القوتين فى اتجاه $\overleftarrow{ب أ}$ والأخرى فى اتجاه $\overleftarrow{هـ ء}$ (كما فى الشكل) وبفرض أن مقدار كلٍ من القوتين $ق$ ثقل جرام

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين الذى مقداراهما $(ق ، ق) = -٨\sqrt{٣}\, ق$

∴ $-٨\sqrt{٣}\, ق = -٨٠٠\sqrt{٣}$ ∴ $ق = ١٠٠$ ثقل جرام.



نظام القوى المستوية الذى يكافئ ازدواجًا

يقال لعدة قوى مستوية $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، ... ، $\overleftarrow{ق_ن}$ إنها تكافئ ازدواجًا إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا :

① انعدام محصلة القوى (أو مجموع المركبات الجبرية للقوى فى أى اتجاه = صفر).

② مجموع عزوم القوى حول أى نقطة لا ينعدم.

ملاحظة

إذا كانت محصلة عدة قوى = صفر فإن القوى إما متزنة أو تكافئ ازدواجًا وبالتالى يكون :

- إذا كان $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{٠}$ ، $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{٠}$ فإن القوى متزنة.
- إذا كان $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{٠}$ ، $\overleftarrow{ج} \neq \overleftarrow{٠}$ فإن القوى تكافئ ازدواج.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٥

تؤثر القوى $\overrightarrow{\text{ق}}_{١} = ٤\,\overrightarrow{\text{س}} + ٢\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{٢} = ٢\,\overrightarrow{\text{س}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{٣} = -٦\,\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$

فى النقط أ = (٢ ، ٣) ، ب = (−٢ ، ٣) ، حـ = (٤ ، −٦) على الترتيب.

أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

الحـــل

$\because \overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ق}}_{١} + \overrightarrow{\text{ق}}_{٢} + \overrightarrow{\text{ق}}_{٣} = (٤ + ٢ - ٦)\,\overrightarrow{\text{س}} + (٢ - ٣ + ١)\,\overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{٠}$

> **لاحظ أنه**
> يمكننا أخذ العزم حول أى نقطة اختيارية أخرى ولتكن أ أو ب ونجد أن :
> $\text{ج}_{\text{أ}} = \text{ج}_{\text{ب}} = \text{ج}_{\text{حـ}} = -٤٠$

$\therefore$ إما أن تكون مجموعة القوى متزنة

أو تكافئ ازدواجًا

، $\because \overrightarrow{\text{ج}}_{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{حـ أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}_{١} + \overrightarrow{\text{حـ ب}} \times \overrightarrow{\text{ق}}_{٢}$

حيث : $\overrightarrow{\text{حـ أ}} = (٢\,\overrightarrow{\text{س}} + ٣\,\overrightarrow{\text{ص}}) - (٤\,\overrightarrow{\text{س}} - ٦\,\overrightarrow{\text{ص}})$

$= -٢\,\overrightarrow{\text{س}} + ٩\,\overrightarrow{\text{ص}}$

، $\overrightarrow{\text{حـ ب}} = (-٢\,\overrightarrow{\text{س}} + ٣\,\overrightarrow{\text{ص}}) - (٤\,\overrightarrow{\text{س}} - ٦\,\overrightarrow{\text{ص}}) = -٦\,\overrightarrow{\text{س}} + ٩\,\overrightarrow{\text{ص}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ج}}_{\text{حـ}} = (-٢\,\overrightarrow{\text{س}} + ٩\,\overrightarrow{\text{ص}}) \times (٤\,\overrightarrow{\text{س}} + ٢\,\overrightarrow{\text{ص}})$

$+ (-٦\,\overrightarrow{\text{س}} + ٩\,\overrightarrow{\text{ص}}) \times (٢\,\overrightarrow{\text{س}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ص}})$

$= (-٤ - ٣٦)\,\overrightarrow{\text{ع}} + (١٨ - ١٨)\,\overrightarrow{\text{ع}} = -٤٠\,\overrightarrow{\text{ع}}$ (لا يساوى $\overrightarrow{٠}$)

$\therefore$ القوى تكافئ ازدواجًا معيار عزمه = ٤٠ وحدة عزم.

مثال ٦

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ١٢ سم أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٧ ، ١٠ ثقل جرام فى $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ و}}$ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه ثم أوجد مقدار كلٍ من القوتين اللتين تؤثران عند حـ ، و عموديتين على $\overline{\text{حـ و}}$ لكى تتزن المجموعة.

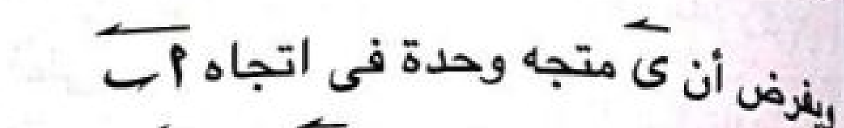
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل

∴ طول الضلع (ل) = ١٢ سم

∴ أهـ = ل √٣ = ١٢ √٣

، حـ و = ٢ ل = ٢٤ سم



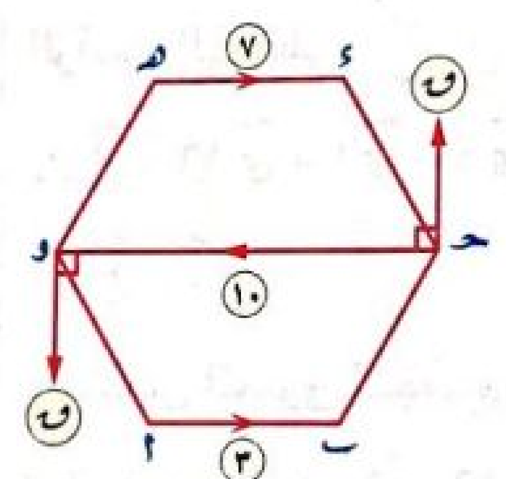
ويفرض أن ى متجه وحدة فى اتجاه أب

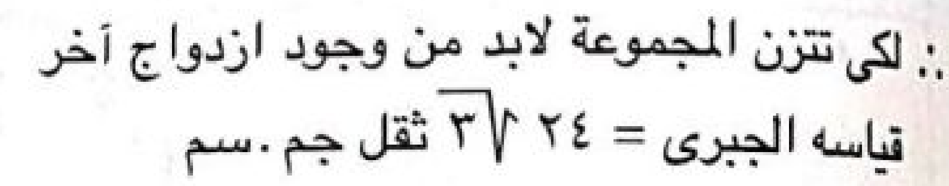
∴ ح (محصلة القوى) = ٣ ى + ٧ ى − ١٠ ى = ٠

، ∵ ع_و = ٣ × ½ أهـ − ٧ × ½ أهـ = ٣ × ٦ √٣ − ٧ × ٦ √٣ = −٢٤ √٣

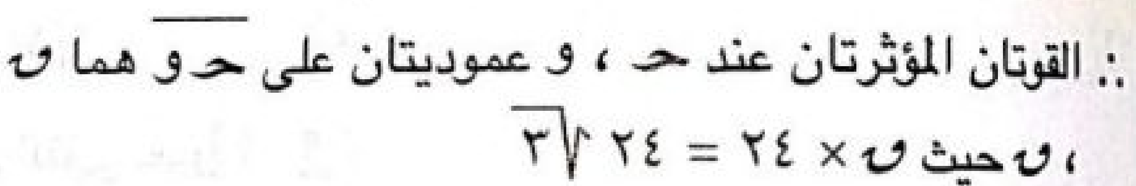
∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه = ٢٤ √٣ ثقل.جم.سم

، ∵ المجموعة تكافئ ازدواجًا





∴ لكى تتزن المجموعة لابد من وجود ازدواج آخر قياسه الجبرى = ٢٤ √٣ ثقل جم.سم



∴ القوتان المؤثرتان عند حـ ، و عموديتان على حـو هما ق

، ق حيث ق × ٢٤ = ٢٤ √٣



∴ ق = √٣ ثقل جم

∴ مقدار كلٍ من القوتين اللتين تؤثران عند حـ ، و عموديتين على حـو لكى تتزن المجموعة هما √٣ ثقل جم ، √٣ ثقل جم.

حل آخر:

* نحلل القوة ١٠ ثقل جرام المؤثرة فى حـو إلى قوتين ٧ ثقل جم ، ٣ ثقل جم فى اتجاه حـو

فتكون القوتان ٧ ثقل جم فى هـ ء ، ٧ ثقل جم فى حـو تكافئان ازدواجًا قياسه الجبرى = −٧ × ٦ √٣ = −٤٢ √٣ ثقل جم.سم

، القوتان ٣ ثقل جم فى أب ، ٣ ثقل جم فى حـو تكافئان ازدواجًا قياسه الجبرى

= ٣ × ٦ √٣ = ١٨ √٣ ثقل جم.سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا واحدًا قياسه الجبرى = −٤٢ √٣ + ١٨ √٣ = −٢٤ √٣ ثقل جم.سم.

مثال ٧

أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس نقط على مستقيم أفقى واحد حيث :

أب = ٢ سم ، بحـ = ١ سم ، حـء = ٣ سم ، ءهـ = ٤ سم. أثرت فى أ ، حـ ، هـ قوى مقاديرها ٥ ، ٦ ، ٩ ثقل جم رأسيًا إلى أسفل ، كما أثرت فى ب ، ء قوتان مقداراهما ١٦ ، ٤ ثقل جرام رأسيًا إلى أعلى.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

الحــل

بفرض أن ى⃗ متجه وحدة فى الاتجاه الرأسى إلى أعلى

∴ ح⃗ = ١٦ ى⃗ + ٤ ى⃗ − ٥ ى⃗ − ٦ ى⃗ − ٩ ى⃗

∴ ح⃗ = ٠⃗ (١)

، القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى حول أ (ج)

= ٦ × ٣ + ٩ × ١٠ − ١٦ × ٢ − ٤ × ٦

= ١٨ + ٩٠ − ٣٢ − ٢٤ = ١٠٨ − ٥٦ = ٥٢ ثقل جم.سم

∴ ج = ٥٢ ثقل جم.سم (٢)

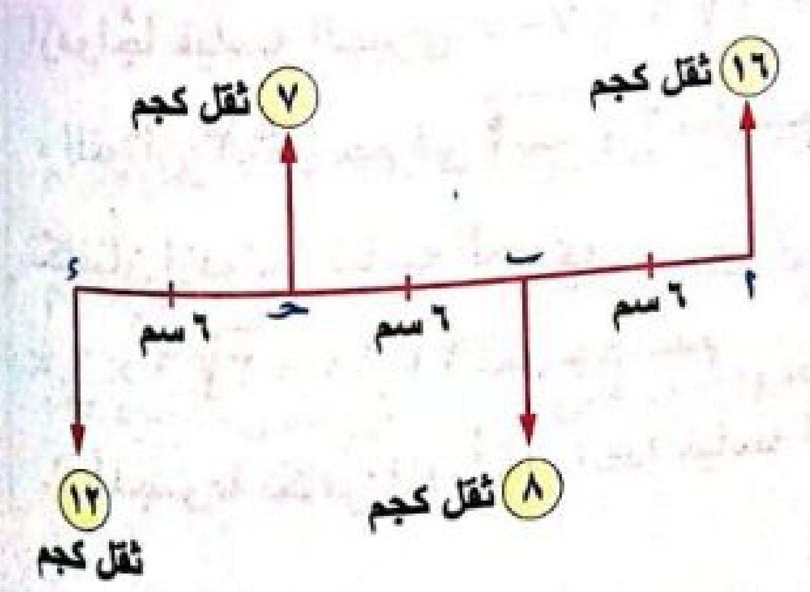
من (١) ، (٢) ينتج أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٥٢ ثقل جم.سم ويعمل على الدوران فى اتجاه عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

مثال ٨

فى الشكل المقابل :

أب = بحـ = حـء = ٦ سم

أوجد قوة ق⃗ بحيث تؤول القوى الخمس إلى ازدواج القياس الجبرى لعزمه ١٦٢ ثقل كجم. سم.



الحل

نفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة قوة فى الاتجاه الرأسى إلى أعلى

∵ مجموعة القوى الخمس تكافئ ازدواج ∴ $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{٠}$

∴ ١٦ $\overleftarrow{ى}$ + ٧ $\overleftarrow{ى}$ − ٨ $\overleftarrow{ى}$ − ١٢ $\overleftarrow{ى}$ + $\overleftarrow{ق}$ = $\overleftarrow{٠}$ ∴ ٣ $\overleftarrow{ى}$ + $\overleftarrow{ق}$ = $\overleftarrow{٠}$ ∴ $\overleftarrow{ق}$ = −٣ $\overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ق}$ مقدارها ٣ ثقل كجم واتجاهها رأسى إلى أسفل

∵ القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة = ١٦٢ ثقل كجم.سم

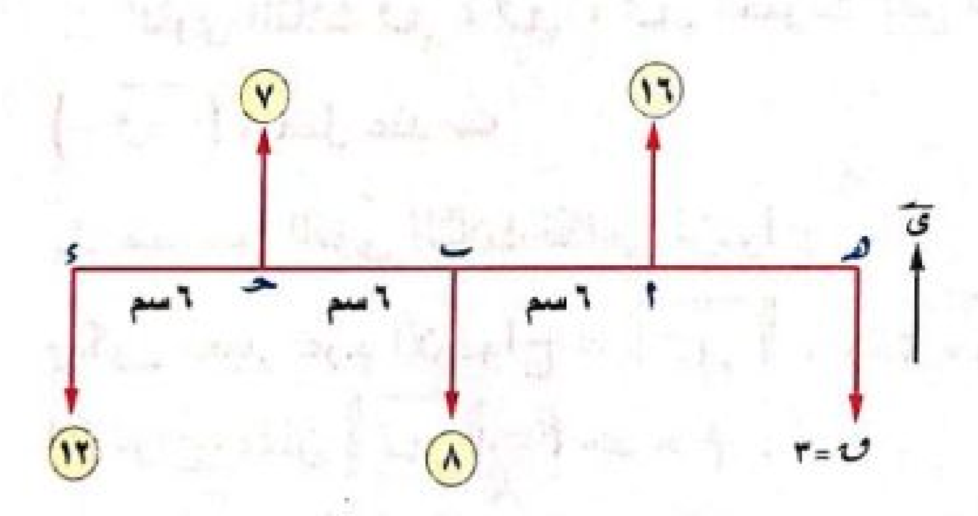
∴ $ج_{أ}$ = ١٦٢ ∴ ١٦ × ٠ + ٨ × ٦ + ١٢ × ١٨ − ٧ × ١٢ + $ج_{ق}$ = ١٦٢

حيث $ج_{ق}$ هو القياس الجبرى لعزم القوى $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة أ

∴ $ج_{ق}$ = ١٦٢ − ٤٨ − ٢١٦ + ٨٤ ∴ $ج_{ق}$ = − ١٨ ثقل كجم. سم

∵ القياس الجبرى لعزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة أ سالب ، واتجاه $\overleftarrow{ق}$ إلى أسفل

∴ خط عمل $\overleftarrow{ق}$ يقطع $\overleftrightarrow{ءأ}$ فى



نقطة هـ (مثلًا) حيث هـ $\notin$ $\overline{ءأ}$

∴ −٣ × أهـ = − ١٨

∴ أهـ = ٦ سم.

قاعدة هامة

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية وغير متلاقية فى نقطة فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تامًا أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المثلث × م حيث م ثابت يساوى $\frac{\text{مقدار القوة}}{\text{طول الضلع الممثل لها}}$

أى أن : إذا كانت $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٣}}$ ثلاث قوى يمثلها

تمثيلاً تامًا أضلاع المثلث أ ب حـ

وكان : $\frac{ق_{١}}{أب} = \frac{ق_{٢}}{ب حـ} = \frac{ق_{٣}}{حـ أ}$ = م حيث م مقدار ثابت

ومأخوذة فى اتجاه دورى واحد $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ على الترتيب

فإن مجموعة القوى $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٣}}$ تكافئ ازدواجًا معيار عزمه

= ٢ × مساحة سطح Δ أ ب حـ × م

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

البرهان : (لا يمتحن فيه الطالب)

نفرض أن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{بحـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـأ}}$ تمثل تمثيلاً تامًا القوى

$\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_3$ على الترتيب بمقياس رسم :

كل ١ وحدة طول تمثل م وحدة من وحدات مقادير القوى

$\because$ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} + \overrightarrow{\text{حـأ}} = \vec{0}$ $\therefore$ $\overrightarrow{\text{ق}}_1 + \overrightarrow{\text{ق}}_2 + \overrightarrow{\text{ق}}_3 = \vec{0}$

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{ق}}_1 + \overrightarrow{\text{ق}}_2 = -\overrightarrow{\text{ق}}_3$

أى أن : محصلة القوتين $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ هى قوة تساوى $(-\overrightarrow{\text{ق}}_3)$

لكننا نعلم أن خط عمل محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة يمر بنفس هذه النقطة

$\therefore$ خط عمل القوة $(-\overrightarrow{\text{ق}}_3)$ وهى محصلة $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ يمر بالنقطة ب

$\therefore$ القوى الثلاث $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_3$ اختزلت إلى قوتين متوازيتين $\overrightarrow{\text{ق}}_3$ وتعمل فى $\overrightarrow{\text{حـأ}}$ $(-\overrightarrow{\text{ق}}_3)$ وتعمل عند ب

$\therefore$ مجموعة القوى الثلاث تكافئ ازدواج

ويكون معيار عزم الازدواج = $\|\overrightarrow{\text{ق}}_3\|$. ب ء حيث (ب ء البُعد العمودى بين خطى عمل قوتى الازدواج) ولكن $\|\overrightarrow{\text{ق}}_3\|$ = أحـ × م

$\therefore$ معيار عزم الازدواج = أحـ × م × ب ء = (أحـ × ب ء) × م

= ضعف مساحة سطح Δ أ ب حـ × م

(وهو المطلوب)

مثال ٩

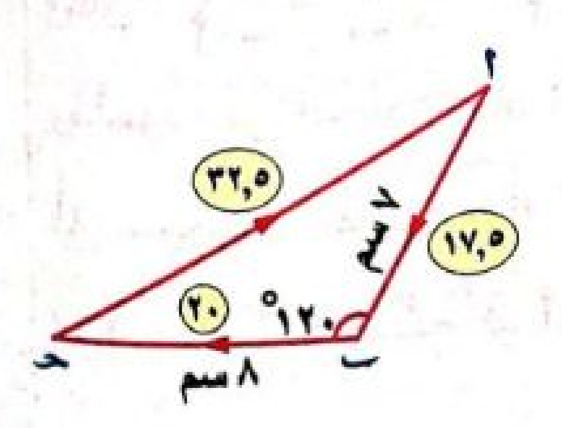
أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٧ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق (∠ أ ب حـ) = ١٢٠° أثرت قوى مقاديرها ١٧,٥ ، ٢٠ ، ٣٢,٥ نيوتن فى $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{بحـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـأ}}$ على الترتيب. بيِّن أن مجموعة هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

الحـل

نحسب طول $\overline{\text{أحـ}}$ حيث من دراستنا لحساب المثلثات نعلم أن :

$\text{ب}^2 = \text{حـ}^2 + \text{أ}^2 - ٢ \text{ حـ أ جتا ب} = ٤٩ + ٦٤ - ٢ \times ٧ \times ٨ \times -\frac{١}{٢}$

(حيث : جتا ١٢٠° = $-\frac{١}{٢}$)





الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∵ $ح^٢ = ١٦٩$ ∴ ب = أ ح = ١٣ سم

∵ $\frac{١٧,٥}{٧} = \frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٢٠}{٨} = \frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٣٢,٥}{١٣} = \frac{٥}{٢}$

∴ القوى الثلاثة ممثلة تمثيلاً تامًا بأضلاع المثلث أ ب حـ فى اتجاه دورى واحد

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا معيار عزمه = ضعف مساحة سطح Δ أ ب حـ × م

، ∵ مساحة سطح Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ حـ ما ب = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٧ حا ١٢٠° = ١٤ $\sqrt{٣}$

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواج معيار عزمه = ٢ × ١٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{٥}{٢}$ = ٧٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.سم.

مثال ١٠

ثلاث قوى مقاديرها ٢٥ ، ٣٠ ، ٢٥ نيوتن يمثلها تمثيلاً تامًا القطع المستقيمة الموجهة أ ب ، ب حـ ، حـ أ على الترتيب من Δ أ ب حـ الذى فيه : ب حـ = ٤٥ سم

أوجد معيار عزم الازدواج الذى يكافئ القوى الثلاث.

الحل

∵ ب حـ يمثل ٣٠ نيوتن أى أن ٤٥ سم تمثل ٣٠ نيوتن

∴ م (عدد وحدات القوة التى تمثلها وحدة الطول)

= $\frac{٣٠}{٤٥} = \frac{٢}{٣}$ نيوتن / سم

∴ أ ب = أ حـ = ٢٥ ÷ $\frac{٢}{٣}$ = ٣٧,٥ سم

نرسم أ ء ⊥ ب حـ فيكون ب ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٢٢,٥ سم ويكون :

أ ء = $\sqrt{(٣٧,٥)^٢ - (٢٢,٥)^٢}$ = ٣٠ سم

∴ معيار عزم الازدواج = ضعف مساحة سطح Δ أ ب حـ × م

= ٢ × $\frac{ب حـ × أ ء}{٢}$ × م = ٤٥ × ٣٠ × $\frac{٢}{٣}$ = ٩٠٠ نيوتن.سم

مثال ١١

أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب حـ ، أ ب عمودى عليهما ، هـ مسقط ء على ب حـ ، ب حـ = ١٥ سم ، أ ب = ٨ سم ، أ ء = ٩ سم أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٨ ، ٢٠ ، ١٢ ، ٣٤ نيوتن فى أ ب ، أ ء ، ء حـ ، هـ ء ، حـ أ على الترتيب.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد قياسه الجبرى.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـــل

واضح أن $\overline{بهـ}$ = ٩ سم

∴ هـ حـ = ٦ سم

∴ ءحـ = $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = ١٠ سم

، حـ أ = $\sqrt{(٨)^٢ + (١٥)^٢}$ = ١٧ سم

القوتان ١٢ فى $\overleftarrow{هـ ء}$ ، ١٢ فى $\overleftarrow{أ ب}$ تكونان ازدواجًا

والقياس الجبرى لعزمه = ١٢ × ٩ = ١٠٨ نيوتن.سم. (١)

، القوى ١٨ ، ٢٠ ، ٣٤ نيوتن فى ترتيب دورى واحد فى Δ أءحـ حيث :

$\frac{١٨}{٩} = \frac{٢٠}{١٠} = \frac{٣٤}{١٧} = ٢$

∴ هذه المجموعة تكون ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه = − ٢ مساحة Δ أءحـ × ٢

ولكن مساحة سطح Δ أءحـ = $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٨ = ٣٦

∴ القياس الجبرى لعزم هذا الازدواج = − ٢ × ٣٦ × ٢ = −١٤٤ نيوتن.سم. (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا واحدًا قياسه الجبرى = −١٤٤ + ١٠٨ = −٣٦ نيوتن.سم.

مثال ١٢

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ١٤ سم أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٦ ، ٦$\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٨ ثقل جرام فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{حـ و}$ ، $\overleftarrow{هـ ء}$ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا واحسب معيار عزمه.

الحـــل

القوتان ٨ ثقل جرام فى $\overleftarrow{حـ و}$ ، ٨ ثقل جرام فى $\overleftarrow{هـ ء}$ تكونان ازدواجًا

القياس الجبرى لعزمه = −٨ × ٧$\sqrt{٣}$ = −٥٦$\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم (١)

، القوى ٦ ، ٦ ، ٦$\sqrt{٣}$ ثقل جرام تؤثر فى أضلاع المثلث أ ب حـ وفى ترتيب دورى واحد كما أن :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\frac{6}{14} = \frac{6}{14} = \frac{6\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{3}{7}$

∴ هذه المجموعة تكون ازدواج القياس الجبرى لعزمه

= ٢ مساحة سطح Δ أ ب حـ × $\frac{3}{7}$

∵ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × ١٤ × ١٤ × حا ١٢٠° = ٤٩ $\sqrt{3}$

∴ القياس الجبرى لعزم هذا الازدواج = ٢ × ٤٩ $\sqrt{3}$ × $\frac{3}{7}$

= ٤٢ $\sqrt{3}$ ثقل جم.سم. (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ الجموعة كلها تكون ازدواجًا واحدًا القياس الجبرى لعزمه

= −٥٦ $\sqrt{3}$ + ٤٢ $\sqrt{3}$ = −١٤ $\sqrt{3}$ ثقل جم.سم

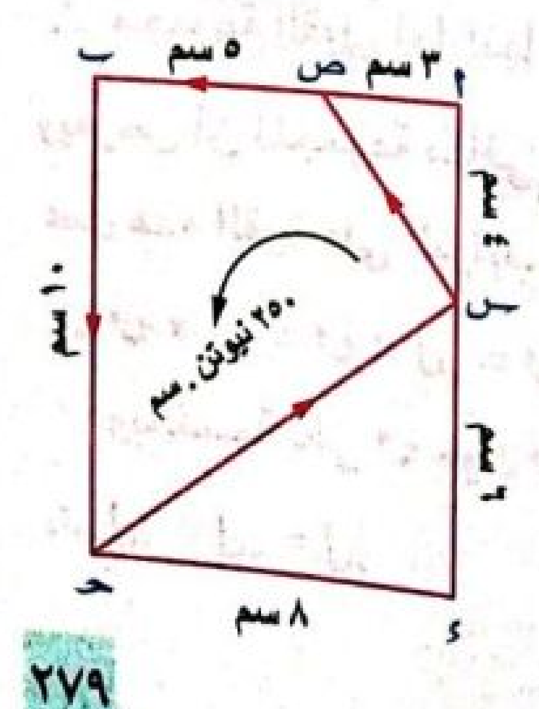
∴ معيار عزم الازدواج = ١٤ $\sqrt{3}$ ثقل جم.سم.

تعميم

إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تامًا أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المضلع فى عدد وحدات القوة التى تمثلها وحدة الأطوال.

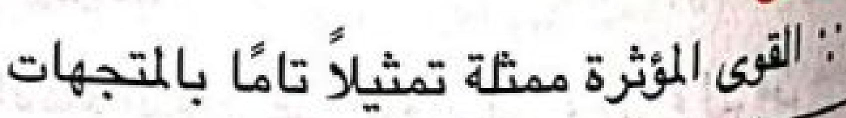
مثال ١٣

أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٠ سم فإذا كانت : س ∈ $\overline{أء}$ حيث : أ س = ٤ سم ، ص ∈ $\overline{أب}$ حيث : أ ص = ٣ سم أثرت قوى ممثلة تمثيلاً تامًا بالمتجهات $\overleftarrow{سص}$ ، $\overleftarrow{صب}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{حـس}$ ، فإذا علم أن المجموعة تؤول إلى ازدواج عزمه ٢٥٠ نيوتن.سم فى الاتجاه أ ب حـ ء أوجد مقدار كلٍ من القوى المؤثرة.



الحل

∵ القوى المؤثرة ممثلة تمثيلاً تامًا بالمتجهات



$\overleftarrow{سص}$ ، $\overleftarrow{صب}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{حـس}$ وفى ترتيب دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا عزمه ٢٥٠ نيوتن.سم

∴ يمكن حساب مقادير القوى من أطوال المضلع حـ س ص ب

∵ س ص = $\sqrt{16 + 9}$ = ٥ سم ، ص ب = ٥ سم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

، ب حـ = ١٠ سم (معطى) ، حـ س = $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = ١٠ سم

∴ مقاديرالقوى على الترتيب هى ٥ ك ، ٥ ك ، ١٠ ك ، ١٠ ك حيث ك مقدار ثابت

، ∵ مساحة الشكل حـ س ص ب

= مساحة المستطيل − (مجموع مساحتى المثلثين أ س ص ، س ء حـ)

= ٨٠ − (٦ + ٢٤) = ٥٠ سم^{٢}

، ∵ معيار عزم الازدواج = ٢ مساحة الشكل حـ س ص ب × ك

∴ ٢٥٠ = ٢ × ٥٠ × ك ∴ ك = ٢,٥

∴ مقادير القوى هى : ١٢,٥ ، ١٢,٥ ، ٢٥ ، ٢٥ نيوتن على الترتيب.

قاعدة

إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط فى مستواها ليست على استقامة واحدة يساوى مقدار ثابتًا (لا يساوى الصفر) كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

أى أن : إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاث نقط فى مستوى القوى وليست على استقامة واحدة وكان $ج_{أ}$ = $ج_{ب}$ = $ج_{حـ}$ = مقدار ثابت (لا يساوى الصفر) فإن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

البرهان : (لا يمتحن فيه الطالب)

بفرض أن النقط الثلاث هى : أ ، ب ، حـ

، ∵ $ج_{أ}$ = $ج_{ب}$ = $ج_{حـ}$ = مقدار ثابت (لا يساوى الصفر)

∴ لا يمكن أن تكون مجموعة القوى متوازنة إذ أن مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى لا تنعدم

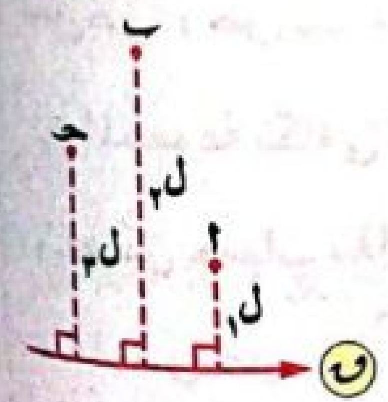
∴ مجموعة القوى إما انها تكافئ قوة أو تكافئ ازدواجًا

وبفرض أن المجموعة تكافئ قوة مقدارها ق وأن النقط الثلاث على أبعاد $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ ، $ل_{٣}$ من خط عمل هذه القوة على الترتيب.

∴ ق × $ل_{١}$ = ق × $ل_{٢}$ = ق × $ل_{٣}$ = مقدار ثابت

وبالقسمة على ق حيث ق ≠ ٠

∴ $ل_{١}$ = $ل_{٢}$ = $ل_{٣}$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أى أن : النقط أ ، ب ، حـ تقع على مستقيم واحد يوازى خط عمل $\overline{ق}$

وهذا يتنافى مع الفرض (حيث إن أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة)

∴ فرض أن مجموعة القوى تكافئ قوة لا يمكن أن يتحقق.

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى المقدار الثابت.

* لاحظ أن : إذا كان المقدار الثابت يساوى صفرًا فإن مجموعة القوى تكون متزنة.

مثال ١٤

أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند ب ، $\overline{أء} // \overline{ب حـ}$ ، أ ب = ٢٠ سم

ب حـ = ٣٠ سم ، أ ء = ١٥ سم أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٨ ، ١٥ ، ٩ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ على الترتيب.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا ، أوجد معيار عزمه.

الحل

نرسم $\overline{ء و} \perp \overline{ب حـ}$

∴ ب و = ١٥ سم ، و حـ = ٣٠ − ١٥ = ١٥ سم

∴ من Δ ء و حـ القائم الزاوية فى و يكون

ء حـ = $\sqrt{(٢٠)^٢ + (١٥)^٢}$ = ٢٥ سم

∴ جتا هـ = $\frac{١٥}{٢٥} = \frac{٣}{٥}$ ، جا هـ = $\frac{٢٠}{٢٥} = \frac{٤}{٥}$

بأخذ $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$ اتجاهين متعامدين كما فى الرسم

وفرض أن $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة القوة فى اتجاهى $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$ وبفرض أن القوى

هى $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ، $\overleftarrow{ق_٤}$ ∴ $\overleftarrow{ق_١}$ = −١٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = −١٨ $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ق_٤}$ = ٩ $\overleftarrow{س}$

$\overleftarrow{ق_٣}$ = (١٥ جتا هـ) $\overleftarrow{س}$ + (١٥ جا هـ) $\overleftarrow{ص}$ = ١٥ × $\frac{٣}{٥}$ $\overleftarrow{س}$ + ١٥ × $\frac{٤}{٥}$ $\overleftarrow{ص}$

= ٩ $\overleftarrow{س}$ + ١٢ $\overleftarrow{ص}$

∴ $\overleftarrow{ح}$ = −١٢ $\overleftarrow{ص}$ − ١٨ $\overleftarrow{س}$ + ٩ $\overleftarrow{س}$ + ١٢ $\overleftarrow{ص}$ + ٩ $\overleftarrow{س}$ = $\overleftarrow{٠}$

∵ $ج_{حـ}$ (القياس الجبرى لمجموع العزوم بالنسبة للنقطة حـ)

= −١٢ × ٣٠ − ٩ × ٢٠ = −٣٦٠ − ١٨٠ = −٥٤٠ نيوتن.سم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

، ∵ $\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{٠}$ ، $ج_{حـ}$ = −٥٤٠ نيوتن.سم

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٥٤٠ نيوتن.سم ويعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة.

حل آخر :

$ج_{حـ}$ (القياس الجبرى لمجموع العزوم حول حـ) = −٥٤٠ نيوتن.سم (من الحل السابق)

، $ج_{ء}$ (القياس الجبرى لمجموع العزوم حول ء)

= −١٢ × ١٥ − ١٨ × ٢٠ = −١٨٠ − ٣٦٠ = −٥٤٠ نيوتن.سم

، $ج_{ب}$ (القياس الجبرى لمجموع العزوم حول ب)

= −٩ × ٢٠ − ١٥ × ب ن = −١٨٠ − ١٥ × ب حـ جا هـ

= −١٨٠ − ١٥ × ٣٠ × $\frac{٤}{٥}$ = −١٨٠ − ٣٦٠ = −٥٤٠ نيوتن.سم

، ∵ $ج_{حـ} = ج_{ء} = ج_{ب}$ = −٥٤٠ نيوتن.سم والنقط ب ، حـ ، ء ليست على استقامة واحدة

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه = −٥٤٠ نيوتن.سم

حل ثالث :

∵ القوى ١٢ ، ١٨ ، ١٥ ، ٩ نيوتن فى ترتيب دورى واحد

، ∵ $\frac{١٢}{٢٠} = \frac{١٨}{٣٠} = \frac{١٥}{٢٥} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

∴ هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه = −٢ × مساحة شبه المنحرف × $\frac{٣}{٥}$

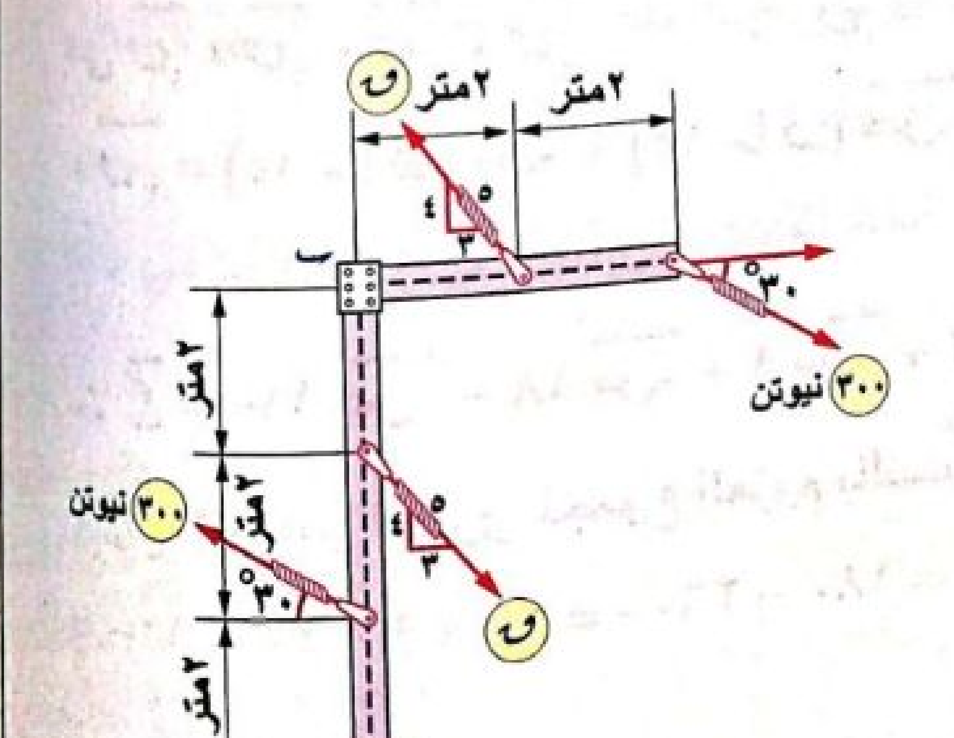
= −٢ × $\frac{٣٠ + ١٥}{٢}$ × ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$

= −٥٤٠ نيوتن.سم

مثال ١٥

فى الشكل المقابل :

أوجد ق التى تجعل القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ١٠٠ − ٦٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.متر.



الحـل

• بتحليل القوى إلى مركبات متعامدة فإن

القوتين (٣٠٠ جتا ٣٠° ، ٣٠٠ جتا ٣٠°)

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ج١

حيث ج١ = −٣٠٠ جتا ٣٠° × ٤

= −٦٠٠ √٣ نيوتن.متر

، القوتان (٣٠٠ جا ٣٠° ، ٣٠٠ جا ٣٠°)

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ج٢

حيث ج٢ = −٣٠٠ جا ٣٠° × ٤ = −٦٠٠ نيوتن.متر

، القوتان (ق جا هـ ، ق جا هـ) تكونان ازدواجا القياس الجبرى لعزمه ج٣

حيث ج٣ = ق جا هـ × ٢ = ق × $\frac{٤}{٥}$ × ٢ = $\frac{٨}{٥}$ ق نيوتن.متر

، القوتان (ق جتا هـ ، ق جتا هـ) تكونان ازدواجا القياس الجبرى لعزمه ج٤

حيث ج٤ = ق جتا هـ × ٢ = ق × $\frac{٣}{٥}$ × ٢ = $\frac{٦}{٥}$ ق نيوتن.متر

، ∵ القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل = ١٠٠ − ٦٠٠ √٣

∴ ج١ + ج٢ + ج٣ + ج٤ = ١٠٠ − ٦٠٠ √٣

∴ −٦٠٠ √٣ − ٦٠٠ + $\frac{٨}{٥}$ ق + $\frac{٦}{٥}$ ق = ١٠٠ − ٦٠٠ √٣

∴ $\frac{١٤}{٥}$ ق = ٧٠٠

∴ ق = ٢٥٠ نيوتن.

حل آخر :

$\because$ جا هـ $= \frac{٤}{٥}$ ، جتا هـ $= \frac{٣}{٥}$

، القوتان (٣٠٠ ، ٣٠٠)

تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_١$

حيث $ج_١ = -٣٠٠ \times ٤\sqrt{٢}$ جا ٧٥°

$= -٣٠٠ \times ٤\sqrt{٢} \times \frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{٤}$

$= -٦٠٠\sqrt{٣} - ٦٠٠$

، القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $ج_٢$

حيث $ج_٢ =$ ق $\times ٢\sqrt{٢}$ جا (١٣٥° − هـ)

$= ٢\sqrt{٢}$ ق [جا ١٣٥° جتا هـ − جتا ١٣٥° جا هـ]

$= ٢\sqrt{٢}$ ق $\left[\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{٣}{٥} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{٤}{٥}\right]$

$= ٢\sqrt{٢}$ ق $\times \frac{٧}{٥\sqrt{٢}} = \frac{١٤}{٥}$ ق

، $\because ج_١ + ج_٢ = -١٠٠ - ٦٠٠\sqrt{٣}$

$\therefore -٦٠٠\sqrt{٣} - ٦٠٠ + \frac{١٤}{٥}$ ق $= -١٠٠ - ٦٠٠\sqrt{٣}$

$\therefore \frac{١٤}{٥}$ ق $= ٧٠٠$

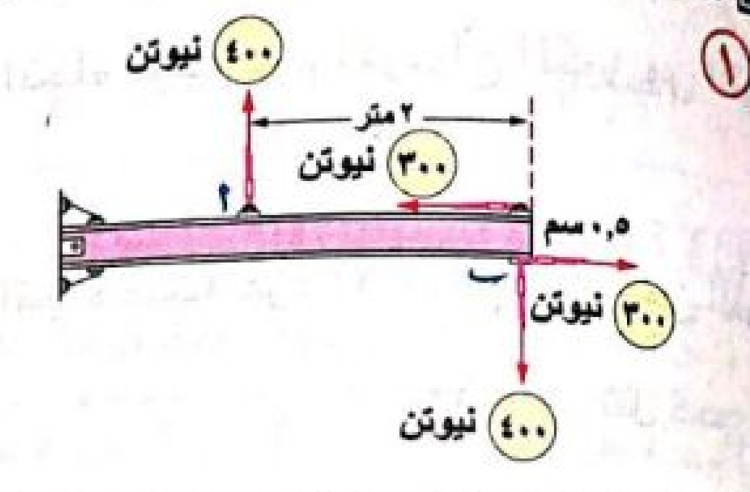
$\therefore$ ق $= ٢٥٠$ نيوتن.

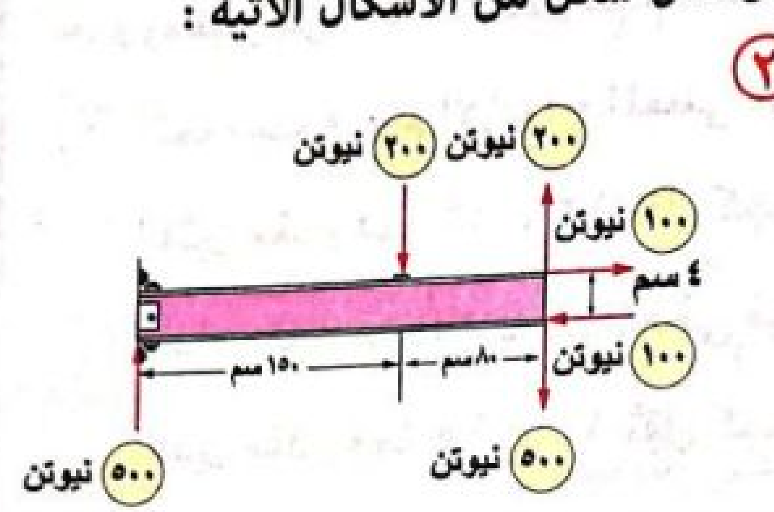
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

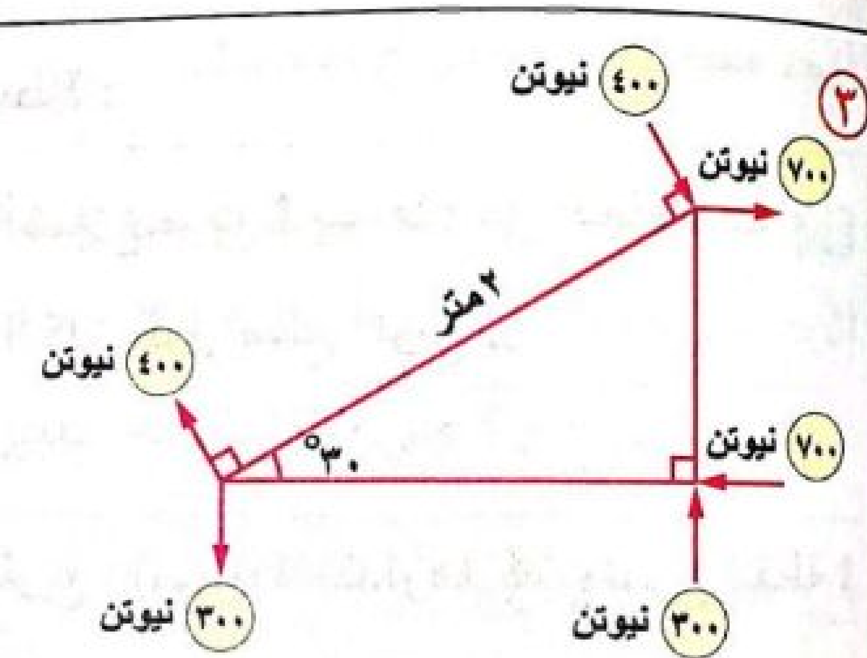


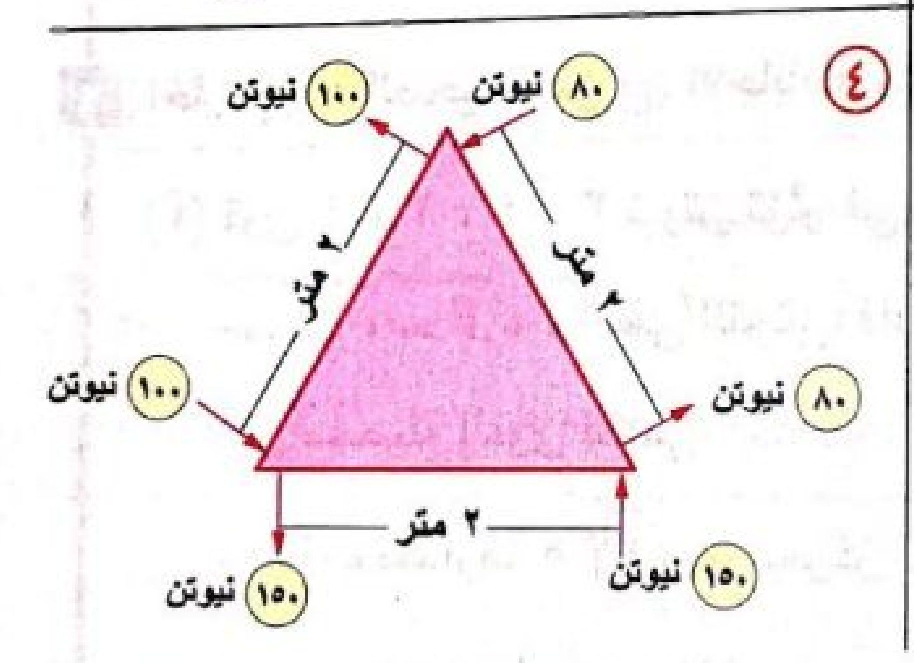
من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل لكل شكل من الأشكال الآتية :









---

٢ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ أثرت قوى مقدار كل منها ٧ ث. كجم فى كل من $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ على الترتيب.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا ، أوجد معيار عزمه. «٩٨ ث.كجم.سم»

---

٣ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٢٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ث.كجم فى $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ على الترتيب كما أثرت قوتان مقدار كلٍ منهما $٤\sqrt{٢}$ ث.كجم فى الرأسين أ ، حـ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ على الترتيب.

أوجد معيار الازدواج المحصل الذى يكافئ المجموعة. «١٢٠ ث.كجم.سم»

---

٤ (دور أول ٢٠٠١) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق(∠ أ) = ٦٠° أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ٨ ، ١٠ نيوتن فى $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ على الترتيب. أوجد معيار عزم الازدواج الذى يكافئ مجموعة هذه القوى. «$٢\sqrt{٣}$ نيوتن.سم»

٥ أ ب ح ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٦ سم ، ب ح = ١٠ سم ، وطول العمود الساقط من الرأس ء على $\overline{ب ح}$ = ٤,٥ سم أثرت القوى ١٢ ، ١٥ ، ١٢ ، ١٥ ثقل كجم فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ح ب}$ ، $\overleftarrow{ء ح}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب كما أثر ازدواج متجه عزمه عمودى على المستوى أ ب ح ء ومعيار عزمه ٧٢,٥ ثقل كجم.سم **فأوجد معيار عزم الازدواج المحصل إذا كان :**

① اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى فى نفس اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين اللتين مقدارهما ١٢ ، ١٢ ثقل كجم.

② اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى فى نفس اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين اللتين مقدارهما ١٥ ، ١٥ ثقل كجم.

« ٩٥ ، ٥٠ ثقل كجم. سم»

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① قوى ٤ ، ٣ ، ٤ ، ٣ نيوتن تؤثر فى أضلاع مربع أ ب ح ء فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب ح}$ ، $\overleftarrow{ح ء}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ على الترتيب فإذا كان طول ضلع المربع ل فإن محصلة القوى تكافئ ....

(أ) قوة مقدارها ٥ $\sqrt{٢}$ وتمر بمركز المربع (ب) قوة مقدارها ١٤ وتمر بالنقطة أ

(ج) ازدواج معيار عزمه ٧ ل (د) ازدواج معيار عزمه = ل

② يؤثر على الجسم ازدواجان ، الأول مقدار إحدى قوتيه ٢٠ ث.كجم وذراع العزم = $\frac{1}{2}$ متر واتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة والثانى مقدار إحدى قوتيه ٣٠ ث.كجم وذراع العزم = ١ متر واتجاه دورانه هو اتجاه عقارب الساعة فإن القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل = ... ث.كجم.متر.

(أ) ٢٠ (ب) -٢٠ (ج) ٤٠ (د) ١٠

③ إذا وقع جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين متجها عزميهما $\overleftarrow{ج}_١$ ، $\overleftarrow{ج}_٢$ وكان : $ج_١ \neq ج_٢$ ، $ج_١ + ج_٢ \neq$ صفر فإن : ....

(أ) الجسم متزن. (ب) الازدواجين متكافئين.

(ج) الجسم يتحرك حركة خطية. (د) الجسم يتحرك حركة دورانية.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤ فى الشكل المقابل :

إذا كان عزم الازدواج المحصل = −٥ , ١ نيوتن.متر

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) $\frac{٧}{٣}$ (ب) $\frac{٤١}{٦٠}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١٣}{٢٠}$

---

٧ أ ب جـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، نصف أ ب فى س ، جـ ء فى ص وأثرت قوى مقاديرها ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ٢٦٠ ، ٢٦٠ ث.جم فى أ ب ، ب جـ ، جـ ء ، أ ء ، أ ص ، جـ س على الترتيب.

أوجد معيار عزم الازدواج المحصل. «١٠٤٠ ث.جم. سم»

---

٨ أ ب جـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٥ سم.

أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ٥٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٣٠ نيوتن فى أ ب ، ب جـ ، جـ ء ، ء هـ ، و هـ ، و أ على الترتيب. عيِّن معيار عزم الازدواج المحصل. «$٣٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن.سم»

---

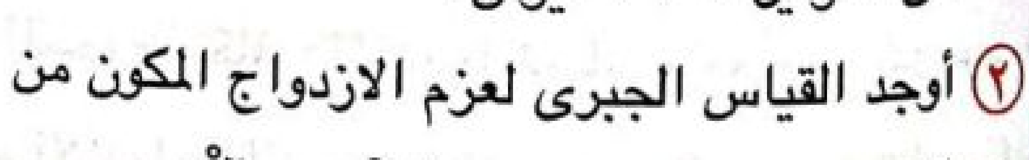
٩ الشكل المقابل :

يوضح صفيحة على شكل

متوازى أضلاع أثر عليها ازدواجان.

① أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون

من القوتين ٧ ، ٧ نيوتن.



② أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من

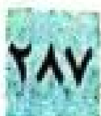
القوتين ٥ ، ٥ نيوتن عندما θ = ٦٠°

③ إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٣٠ نيوتن.سم فما قيمة θ ؟

④ إذا اتزنت الصفيحة فما قيمة θ ؟

---

١٠ (دور ثان ١٩٩٩) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٦ سم أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ٤٠ ، ق ، ق ثقل جرام فى ب أ ، ب جـ ، ء جـ ، ء أ على الترتيب فإذا كانت هذه القوى الأربع تكافىء ازدواجًا معيار عزمه = ٤٨٠ ث.جم.سم فى الاتجاه أ ء جـ ب أوجد : ق «١٠ ث.جم»



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١١ (دور أول ٢٠١٨) أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٣٠ سم ، ب حـ = ٤٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ٣٠ ، ١٥ ، ٣٠ نيوتن فى ب أ ، ب حـ ، ء حـ ، ء أ على الترتيب. أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران فى أ ، حـ عموديًا على أ حـ بحيث تتزن المجموعة. «-٣٠٠ نيوتن.سم ، ٦ ، ٦ نيوتن»

١٢ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ء = ٢ أ ب = ٨ سم ، ق(د أ) = ١٢٠° ، و منتصف أ ء ، هـ منتصف ب حـ أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٦ ، $ق_1$ ، $ق_2$ ، ١٦ ، ١٢ ثقل جم فى أ ب ، حـ ب ، هـ أ ، و حـ ، أ ء ، حـ ء على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة فأوجد قيمتى : $ق_1$ ، $ق_2$ «$ق_1$ = $ق_2$ = ٨ ثقل جم»

١٣ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ثقل كجم فى ب أ ، أ و ، هـ و ، هـ ء ، ء حـ ، ب حـ على الترتيب أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة ثم أوجد مقدار واتجاه قوتين تؤثران فى أ هـ ، ب ء لتصبح المجموعة متزنة. «٤٠ $\sqrt{3}$ ثقل كجم.سم ، ٤ $\sqrt{3}$ ، ٤ $\sqrt{3}$ ثقل كجم»

١٤ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٠٠ ، ٥٠٠ ، ٢٠٠ ، ٥٠٠ ثقل جرام فى ب أ ، ب حـ ، ء حـ ، ء أ كما أثرت فى أ ، حـ قوتان مقدار كلٍ منهما ٣٠٠ ثقل جرام الأولى فى اتجاه ب ء والثانية فى اتجاه ء ب أوجد عزم الازدواج المحصل ثم أوجد مقدار واتجاه قوتين تؤثران فى ب ، ء عموديتان على ب ء لكى تصبح المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٤٨٠ ثقل جم.سم ومتجه عزمه فى اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين ٢٠٠ ، ٢٠٠ ثقل جرام.

«١٤٨٠ ثقل جم.سم ، ١٠٠ ، ١٠٠ ثقل جم»

١٥ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، نُصفت حـ ء فى هـ ، أ ء فى و ثم أثرت قوى مقاديرها ١٥ ، ٢٥ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٢٠ ، ٢٠ نيوتن فى ب أ ، حـ ب ، ء حـ ، أ ء ، أ حـ ، هـ و على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا ثم أوجد القياس الجبرى لعزمه. «٢٢٢ نيوتن.سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٦ ا ب حـ ء مستطيل فيه : ا ب = ٦٠ سم ، ب حـ = ١٦٠ سم ، س ، ص منتصفات ب حـ ، ا ء على الترتيب ، أثرت القوى التى مقاديرها ٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٤٠٠ ، ٤٠٠ ، ق ، ق نيوتن فى الاتجاهات ا ب ، حـ ء ، حـ ب ، ا ء ، س ا ، ص حـ ، على الترتيب ، إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ٦٤٠٠ نيوتن. سم فى الاتجاه ا ء حـ ب أوجد : ق

«٣٠٠ نيوتن»

---

١٧ (دور أول ٢٠١٠) ا ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ا ب = ١٨ سم ، ب حـ = ٢٠ سم ، ق (∠ ا) = ٣٠° أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٦ ، ٨ ، ٦ نيوتن فى ب ا ، ب حـ ، ء حـ ، ء ا على الترتيب. أثبت أن هذه القوى تكافىء ازدواجًا وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار قوتين تؤثران فى ا ، ء وعموديتين على ا ء وتكافئان المجموعة السابقة.

«٢٦ نيوتن.سم ، ١,٣ ، ١,٣ نيوتن»

---

١٨ ا ب حـ ء معين طول ضلعه ١٢ سم ، ق (∠ ا) = ٦٠° أثرت القوى ٥٠ ، ٨٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ثقل جرام فى ب ا ، ب حـ ، ء حـ ، ء ا على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران عند ا ، حـ توازيان ب ء حتى تتزنا مع المجموعة السابقة.

«١٨٠ $\sqrt{3}$ ث. جم.سم ، ١٥ ، ١٥ ث.جم»

---

١٩ ا ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوى ٣ ، ٩ ، ١٢ ، ٣ ، ٩ ، ١٢ ثقل جم فى الاتجاهات ا ب ، ب حـ ، ء حـ ، ء هـ ، هـ و ، ا و على الترتيب. برهن أن مجموعة القوى متزنة.

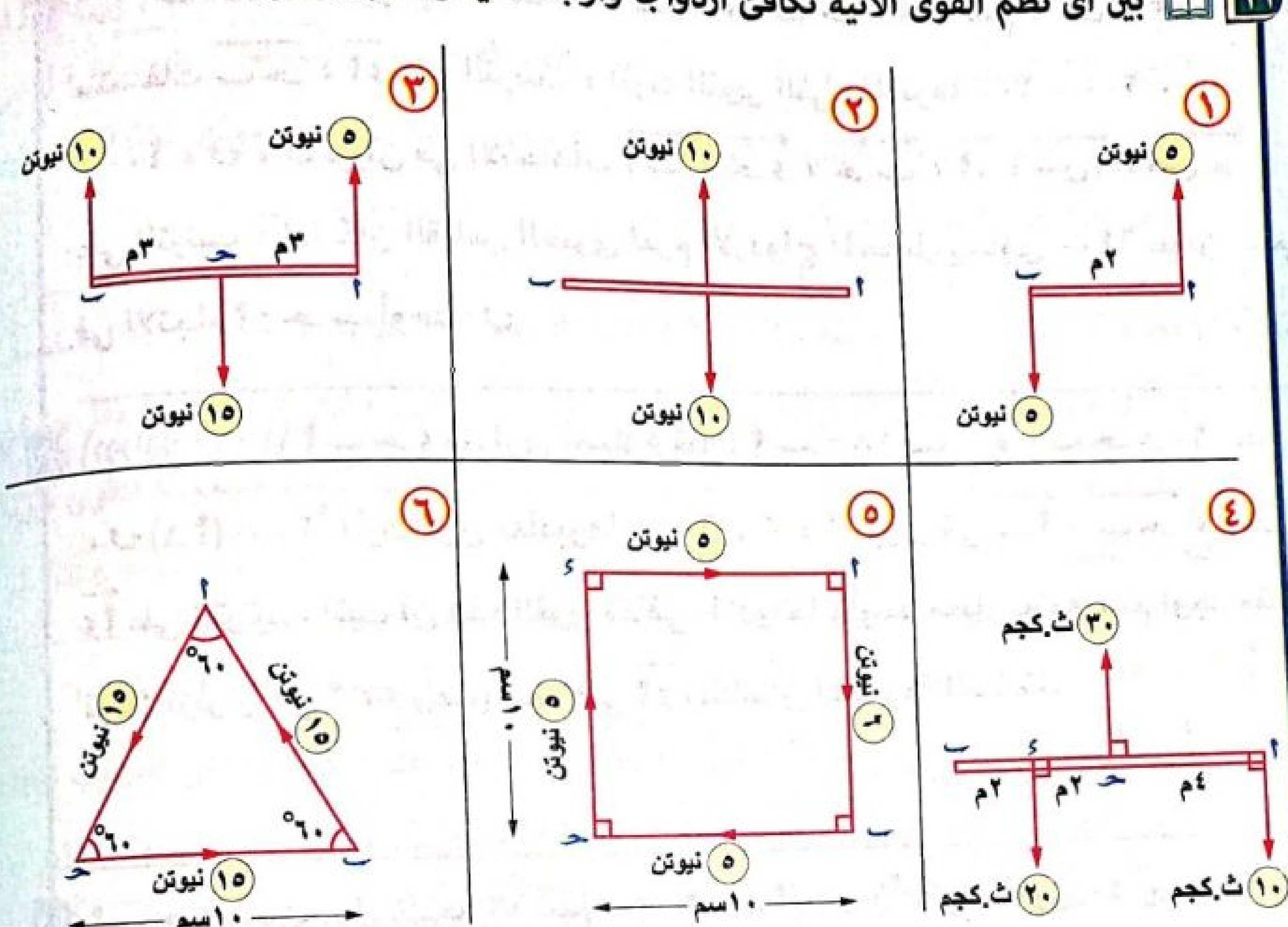
---

٢٠ (دور أول ٢٠٠٨) ا ب حـ ء هـ و مسدس منتظم أثرت قوى مقاديرها ١٠ $\sqrt{3}$ ، ٦ ، ١٠ $\sqrt{3}$ ، ٦ نيوتن فى ا ب ، ء ب ، ء هـ ، ا هـ على الترتيب. أثبت أن هذه القوى تكافىء ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. ثم أوجد مقدار واتجاه قوتين تؤثران فى ب هـ ، ا و حتى تتزن المجموعة.

«٢٤ ل نيوتن.سم ، ١٦ $\sqrt{3}$ ، ١٦ $\sqrt{3}$ نيوتن»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢١) بيِّن أى نظم القوى الآتية تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبرى لعزمه :



(٢٢) (دورثان ٢٠١٨) أثرت القوى $\overrightarrow{ق_1} = ٢\ \overrightarrow{س} - ٤\ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = \overrightarrow{س} - ٣\ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = -٣\ \overrightarrow{س} + ٧\ \overrightarrow{ص}$ فى النقط أ (-١ ، ١) ، ب (-٢ ، ٣) ، حـ (٠ ، ١) على الترتيب. برهن أن هذه المجموعة من القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٨ وحدة عزم»

(٢٣) تؤثر القوى $\overrightarrow{ق_1} = ٢\ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٣\ \overrightarrow{س} - ٢\ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = -٥\ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ فى النقط أ = (١ ، ١) ، ب = (-١ ، ٣) ، حـ = (٤ ، ٥) على الترتيب.

أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا. وأوجد معيار عزمه. «٢١ وحدة عزم»

(٢٤) أثرت القوى $\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{ص} - ٤\ \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٤\ \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = -٨\ \overrightarrow{س} - ٦\ \overrightarrow{ص}$ فى النقط : أ = (٣ ، -١) ، ب = (٧ ، ٢) ، حـ = (-٢ ، ٦) على الترتيب كما أثرت قوة $\overrightarrow{ق_4}$ مقدارها ١٠ نيوتن فى $\overrightarrow{أب}$ أثبت أن القوى الأربع تكافئ ازدواجاً ، أوجد عزمه. «٧٠ ع»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٥ في الشكل المقابل :

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا ، أوجد القياس الجبرى لعزمه.

---

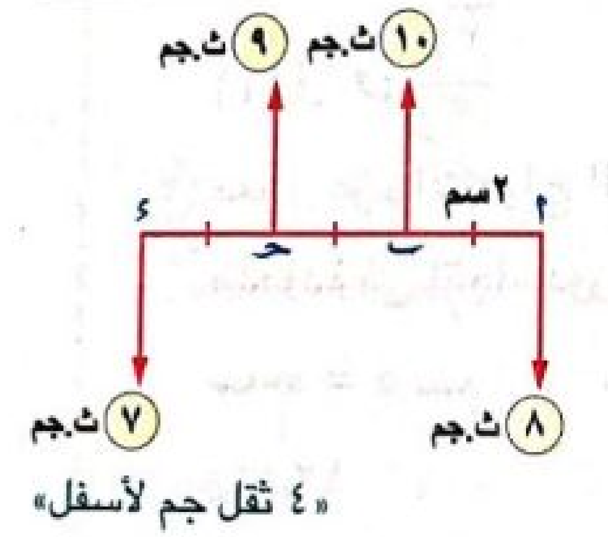
٢٦ $\overline{اب}$ قضيب منتظم طوله ٢٤ سم ووزنه ٤ نيوتن يؤثر فى منتصفه م ، حـ ، ء ∈ $\overline{اب}$ حيث : احـ = ٦ سم ، اء = ١٤ سم. أثرت قوتان مقداراهما ٨ ، ١٢ نيوتن فى النقطتين ا ، ب على الترتيب رأسيًا إلى أعلى ، كما أثرت قوتان مقداراهما ٩ ، ٧ نيوتن فى نقطتى حـ ، ء على الترتيب رأسيًا إلى أسفل. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٨٨ نيوتن.سم»

---

٢٧ فى الشكل المقابل :

اب = ب حـ = حـ ء = ٢ سم

أوجد مقدار واتجاه وخط عمل قوة $\vec{ق}$ بحيث تؤول مجموعة القوى إلى ازدواج القياس الجبرى لعزمه يساوى −٢٦ ثقل جم.سم.

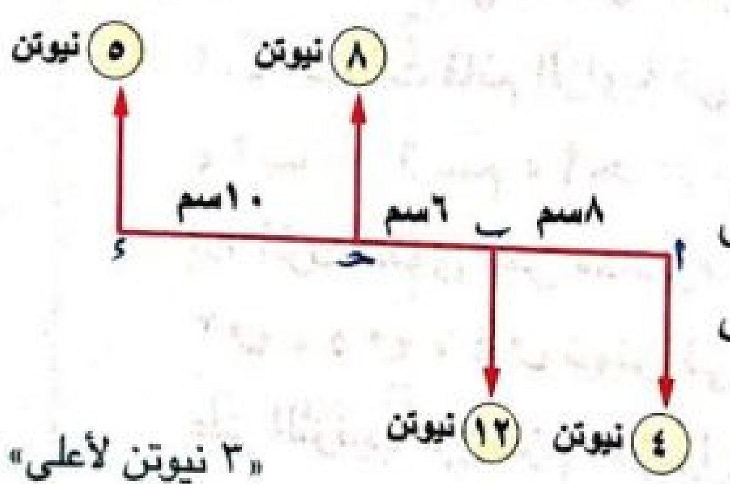


«٤ ثقل جم لأسفل»

---

٢٨ فى الشكل المقابل :

اب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، حـ ء = ١٠ سم. أوجد مقدار واتجاه وخط عمل قوة $\vec{ق}$ بحيث تؤول المجموعة إلى ازدواج القياس الجبرى لعزمه يساوى − ١٥١ نيوتن.سم.



«٣ نيوتن لأعلى»

---

٢٩ فى الشكل المقابل :

يوضح مجموعة من القوى المؤثرة على قضيب اء تكون ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى − ٧٥ نيوتن . م

أوجد قيمة كل من : ق ، ك

«٢٠ ، ١٥ نيوتن»

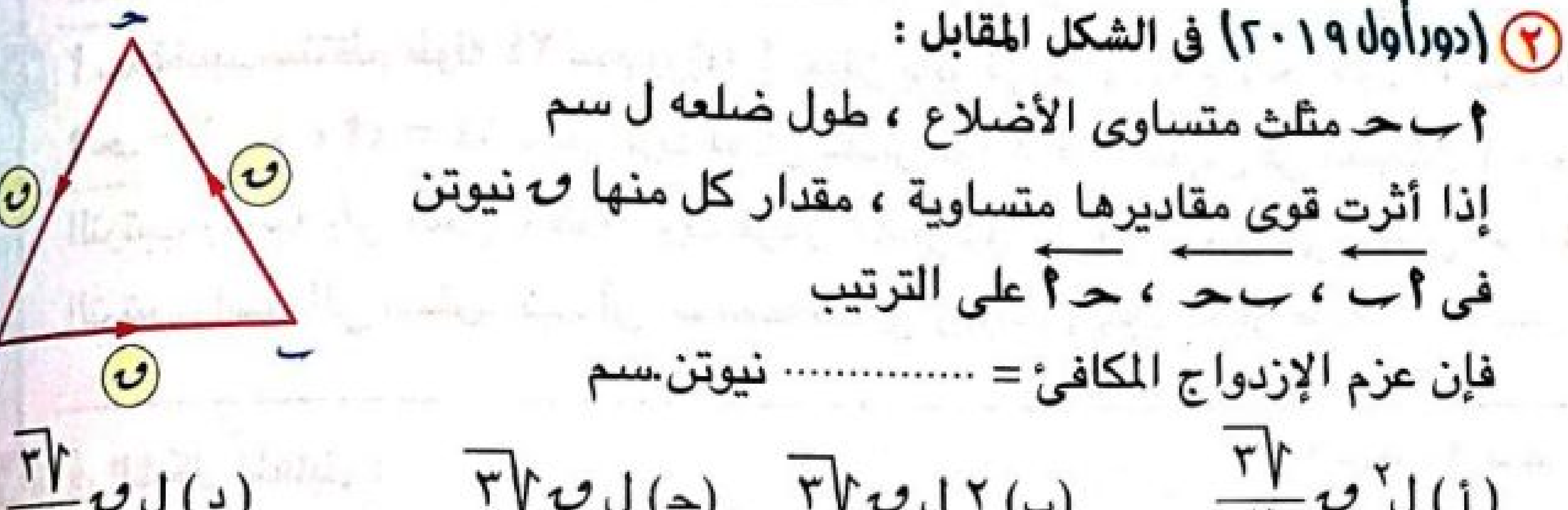
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مثلث ثلاث قوى تمثيلًا تامًا بأضلاع مثلث متساوى الأضلاع أ ب حـ مأخوذة فى ترتيب دورى واحد وبمقياس رسم ١ سم لكل ٢ ث.جم فإذا كان طول ضلع المثلث يساوى ٣٠ سم فإن معيار عزم الازدواج الناتج = ... ث.جم.سم

(أ) ٤٥٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ٩٠٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢٠٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٢٥ $\sqrt{٣}$

② (دور أول ٢٠١٩) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ل سم

إذا أثرت قوى مقاديرها متساوية ، مقدار كل منها ق نيوتن

فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ على الترتيب

فإن عزم الإزدواج المكافئ = ... نيوتن.سم

(أ) ل^{٢} ق $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) ٢ ل ق $\sqrt{٣}$ (جـ) ل ق $\sqrt{٣}$ (د) ل ق $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

③ معيار عزم الازدواج الناتج من ثلاث قوى ممثلة تمثيلاً تامًا بأضلاع المثلث أ ب حـ مأخوذة فى اتجاه دورى واحد حيث وحدة القوة ممثلة بوحدة الطول ،

ب حـ = ٥ سم ، حـ أ = ٥ سم ، أ ب = ٨ سم هو .... وحدة عزم.

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٦ (د) ١٦

④ (دور ثان ٢٠١٩) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ

، أ ب = ٦٠ سم ، أ حـ = ٨٠ سم

إذا أثرت القوى التى مقاديرها

٣ ق ، ٥ ق ، ٤ ق نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$

على الترتيب فإن عزم الازدواج المكافئ يساوى .... نيوتن.سم

(أ) ٤٨٠ ق (ب) ٢٤٠ ق (جـ) ١٢٠ ق (د) $\frac{٩٦٠٠}{ق}$

⑤ إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة بحيث كان هناك مجموعة من القوى فى مستويها وكان : $\overleftarrow{ج_{أ}} = \overleftarrow{ج_{ب}} = \overleftarrow{ج_{حـ}} = \overleftarrow{٠}$

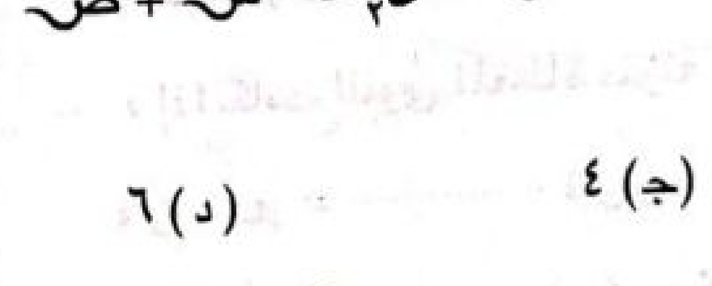
فإن المجموعة تكون ....

(أ) متزنة. (ب) تكافىء ازدواج.

(جـ) متوازية. (د) متلاقية فى نقطة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑥ إذا كانت القوى $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ تؤثر فى النقط (٠ ، ٠) ، (١ ، ٠) ، (٠ ، ١)

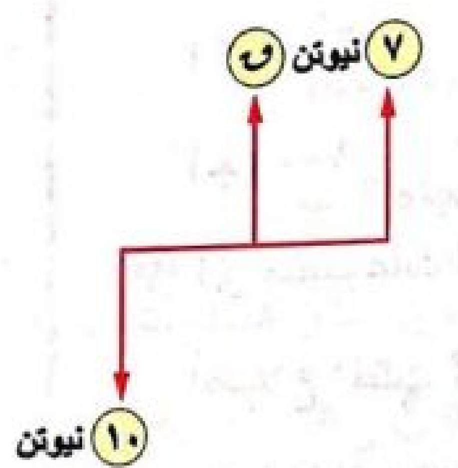


وتكافئ ازدواج بحيث كانت : $\overrightarrow{ق_1}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = − $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$

فإن : مقدار عزم الازدواج = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٤ (د) ٦

⑦ إذا كان نظام القوى المقابل يكافئ ازدواج

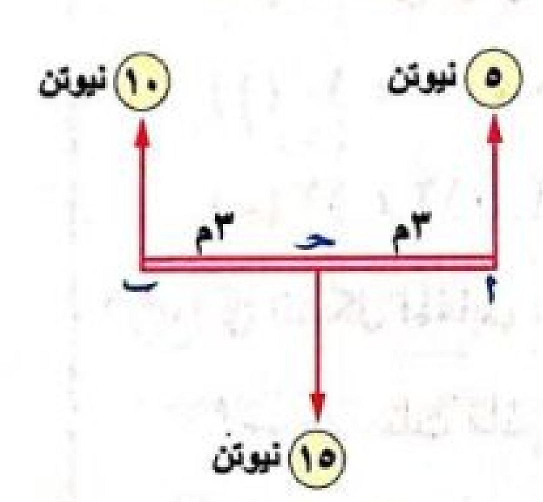


فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٣ (ب) ٧

(جـ) ١٠ (د) ١٧

⑧ القياس الجبرى لعزم الازدواج لمجموعة القوى الموضحة بالشكل بوحدة نيوتن.متر تساوى ....



(أ) −١٥٠ (ب) −٣٠

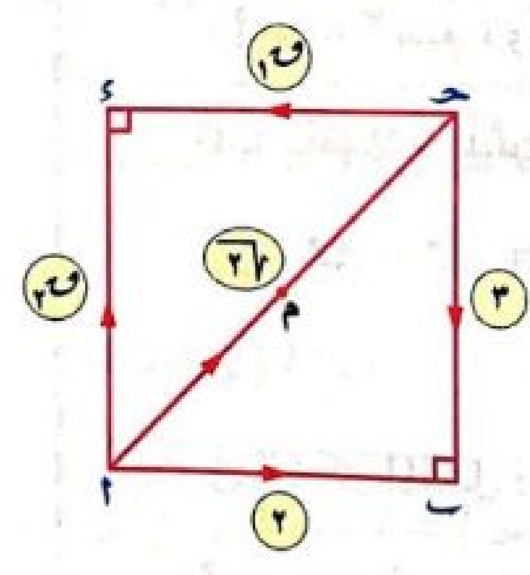
(جـ) −١٥ (د) ١٣٥

⑨ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مربع ، القوى المبينة مقاسة بالداين



، فإذا كانت مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا



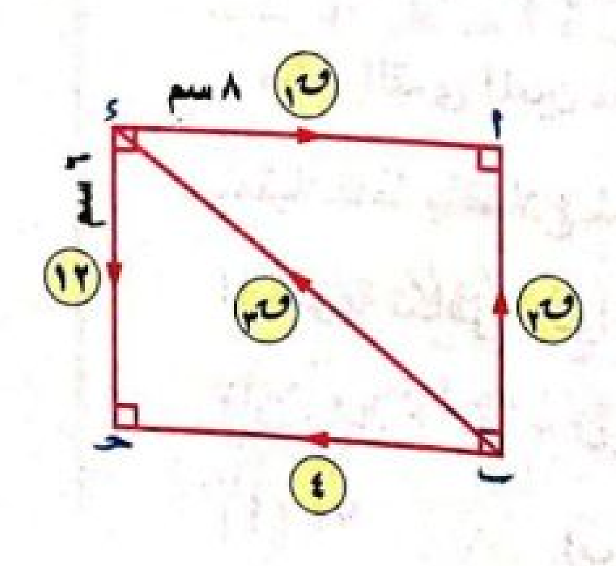
فإن : $ق_1 - ق_2$ = ... داين.

(أ) ٣ (ب) ٢

(جـ) ١ (د) −١

⑩ (دور أول ٢٠١٧) فى الشكل المقابل :

إذا كانت مقادير القوى بالنيوتن والمجموعة متزنة



فإن : $ق_2$ = ... نيوتن.

(أ) ١٦ (ب) ٥

(جـ) ٣ (د) ٨

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١١) (دور أول ٢٠١٩) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ٤٠ سم

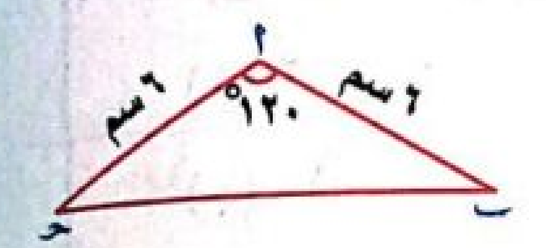
، إذا كانت القوى المعطاة متزنة

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٦٠٠ (ب) $300\sqrt{3}$

(جـ) ١٠٠ (د) ١٥٠

(١٢) أى مجموعات القوى الآتية إذا أثرت فى



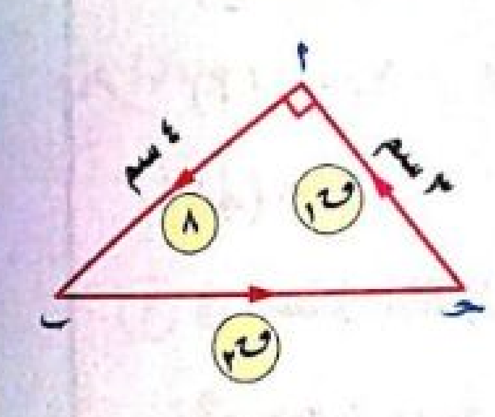
أضلاع المثلث أ ب حـ وفى ترتيب دورى واحد

فإنها تكافئ ازدواج ؟

(أ) ١٠ ، ١٠ ، ١٠ نيوتن. (ب) ٦ ، ٨ ، ١٠ نيوتن.

(جـ) ١٢ ، ١٢ ، $12\sqrt{2}$ نيوتن. (د) ١٥ ، ١٥ ، $15\sqrt{3}$ نيوتن.

(١٣) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، أ ب = ٤ سم

، أ حـ = ٣ سم ، والقوى المبينة مقاسة بالنيوتن وممثلة تمثيلاً

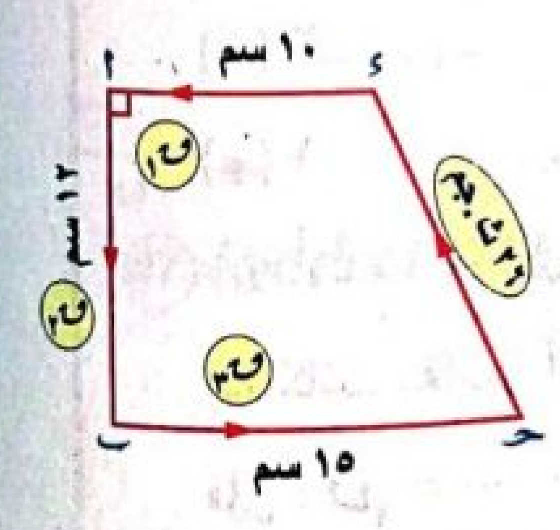
تامًا بأضلاع المثلث وكانت مجموعة القوى تكافئ ازدواج



فإن : ق١ + ق٢ = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ٤ (د) ١٦

(١٤) فى الشكل المقابل :

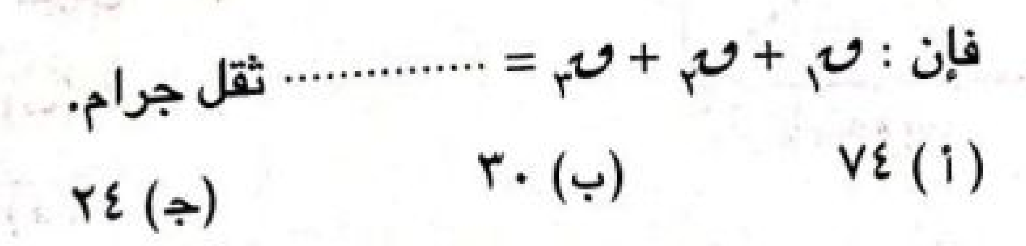


أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى أ

، مثلت القوى المبين مقاديرها واتجاهاتها

تمثيلاً تامًا بأضلاع شبه المنحرف فإذا كانت

المجموعة تكافئ ازدواج



فإن : ق١ + ق٢ + ق٣ = ... ثقل جرام.

(أ) ٧٤ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٤ (د) ٢٠

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٥) في الشكل المقابل :

إذا كانت مقادير القوى مقدرة بالنيوتن

فإن مقدار القوة التي تضاف للمجموعة

لتكافئ ازدواج = ...

(أ) ٢ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) ١٢ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{ب أ}$

(جـ) ١٢ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (د) ٣٦ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{أب}$

(١٦) إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة بحيث كان هناك مجموعة من القوى في مستواها تكون ازدواج وكان : ٢ $ج_أ$ + ٣ $ج_ب$ + ٥ $ج_حـ$ = ٢٤٠ نيوتن.سم

فإن : ٤ $ج_أ$ − ٢ $ج_حـ$ = ... نيوتن.سم.

(أ) ٢٤ (ب) ٤٨ (جـ) ٩٦ (د) ١٩٢

---

٣١ أب حـ مثلث فيه : أب = ١٠,٥ سم ، ب حـ = ١٤ سم ، أ حـ = ١٧,٥ سم

أثرت قوى مقاديرها ٤,٥ ، ٦ ، ٧,٥ نيوتن في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ على الترتيب.

بيِّن أن مجموعة هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٦٣ نيوتن.سم»

---

٣٢ ثلاث قوى مقاديرها ١٥ ، ١٥ ، ١٨ ثقل كجم يمثلها تمثيلاً تامًا $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ من المثلث أب حـ الذي فيه : ب حـ = ١٢ سم

أوجد معيار عزم الازدواج الذي يكافئ القوى الثلاث. «١٤٤ ثقل كجم.سم»

---

٣٣ أب حـ مثلث فيه : أب = ٥ سم ، ب حـ = ٦ سم ، حـ أ = ٧ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٥٠ ، ٣٠٠ ، ٣٥٠ ثقل جرام في $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ على الترتيب.

بيِّن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «$٦٠٠\sqrt{٦}$ ثقل جم.سم»

---

٣٤ أب حـ مثلث فيه : أب = ١٠ سم ، ب حـ = ١٦ سم ، ق(∠ب) = ٦٠° أثرت قوى مقاديرها ٢,٥ ، ٤ ، ٣,٥ ثقل كجم في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ على الترتيب.

بيِّن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «$٢٠\sqrt{٣}$ ثقل جم.سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣٥ ثلاث قوى مقاديرها ١٠,٥ ، ١٢ ، ١٩,٥ نيوتن يمثلها تمثيلاً تامًا القطع المستقيمة الموجهة أب ، ب حـ ، حـ أ على الترتيب من المثلث أ ب حـ الذى فيه أ حـ = ١٣ سم
أوجد معيار عزم الازدواج الذى يكافئ القوى الثلاث. «٤٢ $\sqrt{3}$ نيوتن.سم»

٣٦ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ أ = ١٣ سم أثرت القوى ١٥ ، ٣٦ ، ٣٩ ثقل جرام فى أب ، ب حـ ، حـ أ على الترتيب أوجد القوتين المتساويتين فى المقدار وتؤثران فى نهايتى أ حـ وعموديتين عليه لكى تحدثا اتزانًا مع مجموعة القوى السابقة. «كل قوة = $\frac{١١}{١٣}$ ١٣ ثقل جرام»

٣٧ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ١٣ سم ، ب حـ = ١٤ سم ، حـ أ = ١٥ سم أثرت القوى التى مقاديرها ٣٩ ، ٤٢ ، ٤٥ نيوتن فى الاتجاهات أب ، ب حـ ، حـ أ على الترتيب.
أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه ثم أوجد قوتين متوازيتين عند ب ، حـ عموديتين على ب حـ لتتزن مع القوى السابقة. «٥٠٤ نيوتن.سم ، ٣٦ ، ٣٦ نيوتن»

٣٨ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ١٣ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، ء منتصف ب حـ أثرت القوى ٥٢ ، ٢٠ ، ٤٨ نيوتن فى أب ، ب ء ، ء أ على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبرى لعزمه. أوجد مقدار قوتين إحداهما فى أ حـ والأخرى تؤثر عند ب فى اتجاه حـ أ بحيث تصبح المجموعة فى حالة توازن.
«-٢٤٠ نيوتن.سم ، ٢٦ ، ٢٦ نيوتن»

٣٩ (دور أول ٢٠١١) أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ، هـ ، و منتصفا ب حـ ، أ ء على الترتيب. أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٤٨ ، ٣٠ ، ٢٤ ث.جم فى أب ، ب حـ ، حـ و ، و أ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. ثم أوجد مقدارى القوتين اللتين تؤثران فى هـ أ ، و حـ حتى تحدث اتزانًا مع القوى المعلومة.
«٦٤٨ ث.جم.سم ، ٩٠ ، ٩٠ ث.جم»

٤٠ 📖 أ ب حـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه : أ ء // ب حـ ، أ ء = ٩ سم ، أ ب = ء حـ = ١٥ سم ، ب حـ = ٣٣ سم أثرت القوى ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧ نيوتن فى الاتجاهات أب ، ب حـ ، حـ ء ، ء أ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.
«١١٣٤ نيوتن.سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

41 أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أء // ب حـ ، ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ، أ ء = ١٢ سم أثرت قوى مقاديرها ٤٨ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠ نيوتن في حـ ب ، ب أ ، أ ء ، ء حـ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

«٦٤٨ نيوتن .سم»

42 هـ أ ب حـ ء شكل خماسي فيه : ق(∠ هـ) = ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) = ٩٠° ، هـ أ = ١٦ سم ، أ ب = حـ ء = ١٠ سم ، ب حـ = ٢٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٥ ، ١٠ ، ٥ ، ٦ ثقل جرام في هـ أ ، أ ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء هـ على الترتيب.
أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا واحسب معيار عزمه.

«٢٩٦ ثقل جرام .سم»

43 📖 أ ب حـ ء هـ خماسي منتظم طول ضلعه ١٥ سم أثرت قوى مقدار كل منها ١٠ ث.كجم في أ ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء هـ ، هـ أ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

«٥١٦,١٤ ث.كجم.سم»

44 أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٠ $\sqrt{3}$ ، ٢٠ ، ٤٠ نيوتن في أ حـ ، حـ ء ، ء أ كما أثرت قوتان في ب حـ ، هـ و أوجد مقدار واتجاه القوتين لكي تتزن المجموعة.

«٢٠ ، ٢٠ نيوتن في حـ ب ، و هـ»

45 أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ٦ سم أثرت القوى ١١ ، ٢٧ ، ١٦ ثقل جرام في أ ب ، حـ و ، هـ ء على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

«١٥ $\sqrt{3}$ ثقل جم.سم»

46 أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ١٦ سم أثرت القوى ٨ ، ٨ ، ١٢ ، ١٢ ، ٨ $\sqrt{3}$ ثقل جرام في أ ب ، ب حـ ، حـ و ، هـ ء ، حـ أ على الترتيب
أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

«٣٢ $\sqrt{3}$ ثقل جرام . سم»

47 أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أء // ب حـ ، أ ب عمودي عليهما ، هـ مسقط ء على ب حـ ، حـ ب = ٧,٥ سم ، ب أ = ٤ سم ، أ ء = ٤,٥ سم أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٢٧ ، ٣٠ ، ١٨ ، ٥١ نيوتن في أ ب ، أ ء ، ء حـ ، هـ ء ، حـ أ على الترتيب.
أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

«٢٧ نيوتن .سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٤٨) أبجد مستطيل فيه : أب = ١٢ سم ، بج = ٩ سم ، أخذت نقطة م ∈ بج بحيث : بم = ٤ سم أثرت قوى مقاديرها $ق_1$ ، ٨ $\sqrt{١٠}$ ، ٢٦ ، $ق_2$ ، ١٨ نيوتن فى الاتجاهات ب أ ، أ م ، م د ، د ج ، د أ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة فأوجد قيمتى : $ق_1$ ، $ق_2$

«٢٤ ، ٢٤ نيوتن»

---

(٤٩) أبجد مستطيل فيه : أب = ٨ سم ، بج = ١٠ سم ، هـ ∈ بج حيث : ب هـ = ٤ سم أثرت قوتان مقداراهما ٢٠ نيوتن فى أ د ، ٢٠ نيوتن فى د هـ أوجد مقدار واتجاه القوة المؤثرة فى أ هـ حتى تؤول المجموعة إلى ازدواج وأوجد معيار عزمه.

«٨ $\sqrt{٥}$ نيوتن فى اتجاه هـ أ ، ١٦٠ نيوتن.سم»

---

(٥٠) أبجد شكل رباعى فيه : أب = ٨ سم ، بج = ٦ سم ، جد = د أ = ١٣ سم ، ق (∠ أبج) = ٩٠° أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ٣ ، ٦,٥ ، ٦,٥ نيوتن فى أب ، بج ، جد ، د أ على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه وإذا أثرت فى النقطتين ب ، د قوتان مقداراهما ق ، ق فى اتجاهى ج أ ، أ ج على الترتيب. أوجد قيمة ق حتى تتزن المجموعة.

«٨٤ نيوتن.سم ، ٥ نيوتن»

---

(٥١) 📖 أبجد شكل رباعى فيه : أب = أد = ٢٠ سم ، بج = جد = ١٠ $\sqrt{٧}$ سم ، ق (∠ أ) = ١٢٠° أثرت قوى ممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة أب ، بج ، جد ، د أ فإذا كانت المجموعة تؤول إلى ازدواج معيار عزمه ١٨٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن. سم فى الاتجاه أبجد أوجد مقدار القوى المؤثرة فى أضلاع الشكل.

«٦ ، ٣ $\sqrt{٧}$ ، ٣ $\sqrt{٧}$ ، ٦ نيوتن»

---

(٥٢) 📖 أبجد شبه منحرف فيه : أد // بج ، أب ⊥ بج ، أب = ٦ سم ، بج = ٩ سم ، أد = ٣ سم أثرت القوى $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ ، $ق_4$ نيوتن فى الاتجاهات أد ، جد ، بج ، أب على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى ٣٦٠ نيوتن.سم فى الاتجاه أبجد **فأوجد مقدار : $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ ، $ق_4$**

«١٥ ، ٣٠ $\sqrt{٢}$ ، ٤٥ ، ٣٠ نيوتن»

---

(٥٣) أبجد شبه منحرف فيه : ق (∠ أ) = ق (∠ ب) = ٩٠° ، أب = ٨ سم ، أد = ٩ سم ، بج = ١٥ سم ، هـ ، ى منتصفا أب ، بج أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٢٠ ، ٥١ ، ١٧ نيوتن فى أد ، دج ، ج أ ، هـ ى أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا واحسب معيار عزمه.

«٨٤ نيوتن.سم»



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥٤ اب جـ د مربع طول ضلعه ٦٠ سم أثرت قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٨٠ ، ٥٠ نيوتن فى اب ، ب جـ ، جـ د ، د ا على الترتيب واثرت قوتان مقداراهما ٥٠ √٢ ، ٢٠ √٢ نيوتن فى ا جـ ، د ب على الترتيب. برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٤٨٠٠ نيوتن.سم.

---

٥٥ اب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم ، هـ ∈ جـ ب ، و ∈ جـ د ، بحيث كان : جـ هـ = جـ و = ٣٠ سم. أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٢٠ √٢ ث.كجم فى اب ، ب جـ ، جـ د ، د ا ، هـ و على الترتيب.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

«١٠٠ ث.كجم.سم»

---

٥٦ اب جـ د مستطيل فيه : اب = ٣٠ سم ، ب جـ = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٥ ث.كجم فى اب ، ب جـ ، جـ د ، د ا ، ا جـ على الترتيب.

برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

«٢٢٠ ث.كجم.سم»

---

٥٧ اب جـ د مستطيل فيه : ب جـ = ٢ اب ، هـ ، و منتصفا اد ، ب جـ أثرت القوى ٤ ، ٤ ، ١٤ √٢ ، ١٠ √٢ ثقل جرام فى هـ ا ، اب ، ب هـ ، د و

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا واحسب معيار عزمه بدلالة طول اب

«٦ اب ثقل جم.سم»

---

٥٨ اب جـ د شبه منحرف قائم الزاوية فى ب ، اب // جـ د ، اب = ٦ سم ، ب جـ = ١٦ سم ، جـ د = ١٨ سم ، هـ ∈ جـ د حيث : د هـ = ٦ سم أثرت قوى مقاديرها ٤,٥ ، ١٢ ، ١٣,٥ ، ٣٠ ، ١٥ نيوتن فى اب ، ب جـ ، جـ د ، د ا ، ب هـ

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

«٣٦٠ نيوتن.جم»

---

٥٩ اب جـ د شبه منحرف فيه : اد // ب جـ ، ق(∠ب) = ٩٠° ، اب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٨ سم ، اد = ٩ سم ، أثرت القوى التى مقاديرها ٢٠٠ ، ٦٠٠ ، ٥٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٣٠٠ √١٣ ث.كجم فى ب ا ، ب جـ ، جـ د ، د ا ، ا جـ على الترتيب.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

«١٠٨٠٠ ث.كجم.سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦٠ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أب = ١٠ سم ، ب حـ = ٥ سم ، فإذا كانت و هى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، أثرت القوى التى مقاديرها ٤ ، ٥ ، ١٥ ، ٢ ، $٤\sqrt{٥}$ ، $٣\sqrt{٢}$ ثقل.كجم فى $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و حـ}}$ على الترتيب أثبت أن هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا واحسب معيار عزمه.

«٤٠ ث.جم.سم»

---

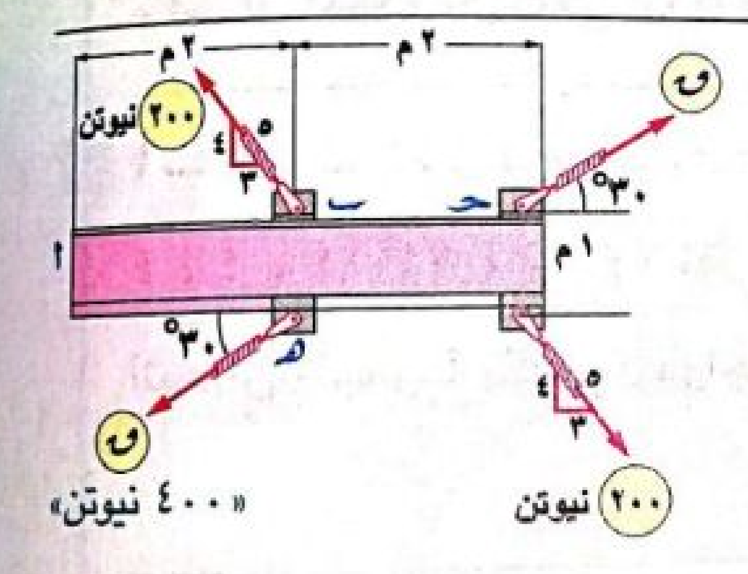
٦١ فى الشكل المقابل :

أوجد ق التى تجعل القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى $(١٥٠ - ٥٠٠\sqrt{٣})$ نيوتن.متر.

«٢٠٠ نيوتن»

---

٦٢ فى الشكل المقابل :



يمثل قنطرة تؤثر عليها القوى الموضحة بالشكل إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى $(٢٠٠ - ٢٠٠\sqrt{٣})$ نيوتن.م.

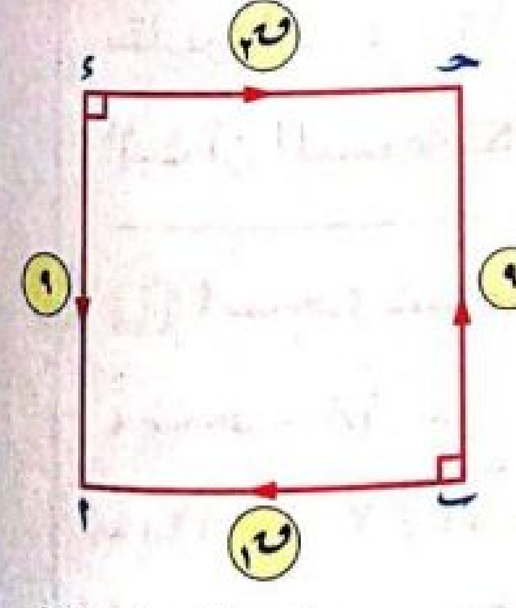
أوجد : ق

«٤٠٠ نيوتن»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٦٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٤ سم أثرت القوى المبين مقاديرها على الرسم وكانت تكافئ ازدواج معيار عزمه = ٢٠ نيوتن.سم

فإن : $ق_١ = ق_٢ = ...$

(أ) ٤ أ، ١٤ (ب) ١٤ أ، ٥٦ (جـ) ٤ أ، ٥٦ (د) ٥٦ أ، ٣٢

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② في الشكل المقابل :

إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى ١٠٠ نيوتن.سم

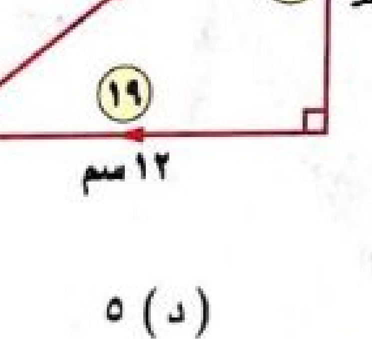
فإن : س = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ٢٠

(جـ) ٢٥ (د) ٣٠



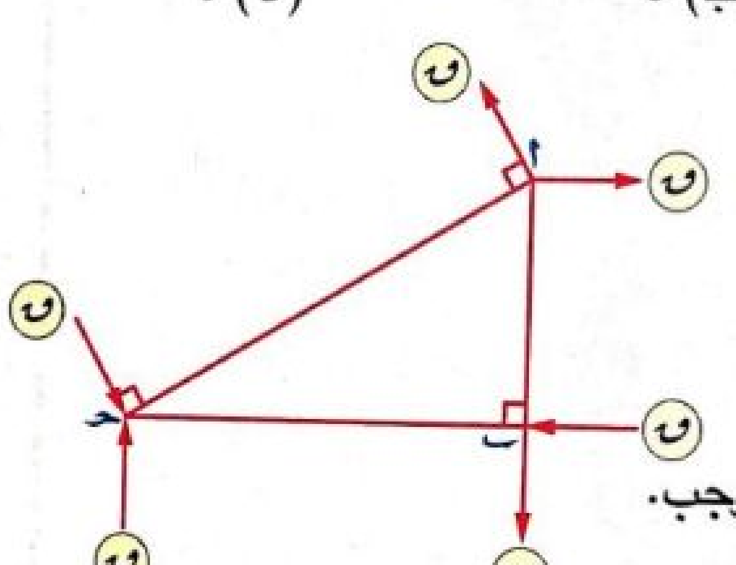
③ في الشكل المقابل :



إذا كانت مقادير القوى مقاسة بالنيوتن فإن مقدار القوة (ق) التى يجب إضافتها إلى كل قوة من القوى المعطاة حتى تجعل المجموعة تكافئ ازدواج يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

④ مجموعة القوى في الشكل المقابل ....



(أ) متزنة.

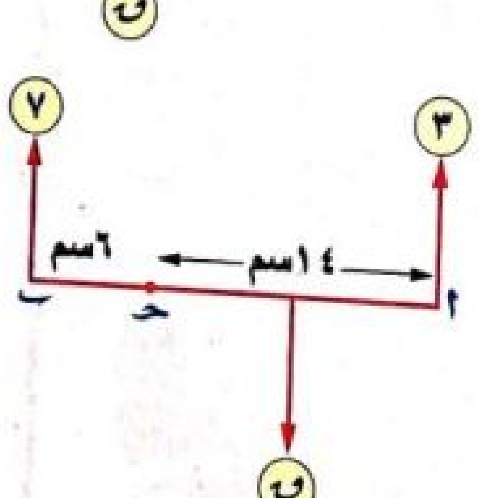


(ب) تكافئ قوة.

(جـ) تكافئ ازدواج القياس الجبرى لعزمه موجب.

(د) تكافئ ازدواج القياس الجبرى لعزمه سالب.

⑤ في الشكل المقابل :



ثلاث قوى متوازية مقاسة بالنيوتن فإن كانت المجموعة تكون ازدواج فإن ....

(أ) ق = ١٠ نيوتن وتؤثر فى حـ

(ب) ق = ١٠ نيوتن وتؤثر فى ب

(جـ) ق = ٤ نيوتن وتؤثر فى أ

(د) ق = ١٠ نيوتن وتؤثر فى أى نقطة على القضيب غير نقطة حـ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦٤ أ ب حـ مثلث ، ى مركز الدائرة الداخلة ، أثرت خمس قوى فى أ ب ، ب ى ، أ حـ ، حـ ى ، ى أ على الترتيب فإذا كانت مقادير هذه القوى تمثل بالأطوال أ ب ، ى ب ، أ حـ ، حـ ى ، ٢ ى أ على الترتيب. فبرهن أنها تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه بدلالة أطوال أ ب ، أ حـ ، ونصف قطر الدائرة الداخلة متى تتوازن هذه القوى.

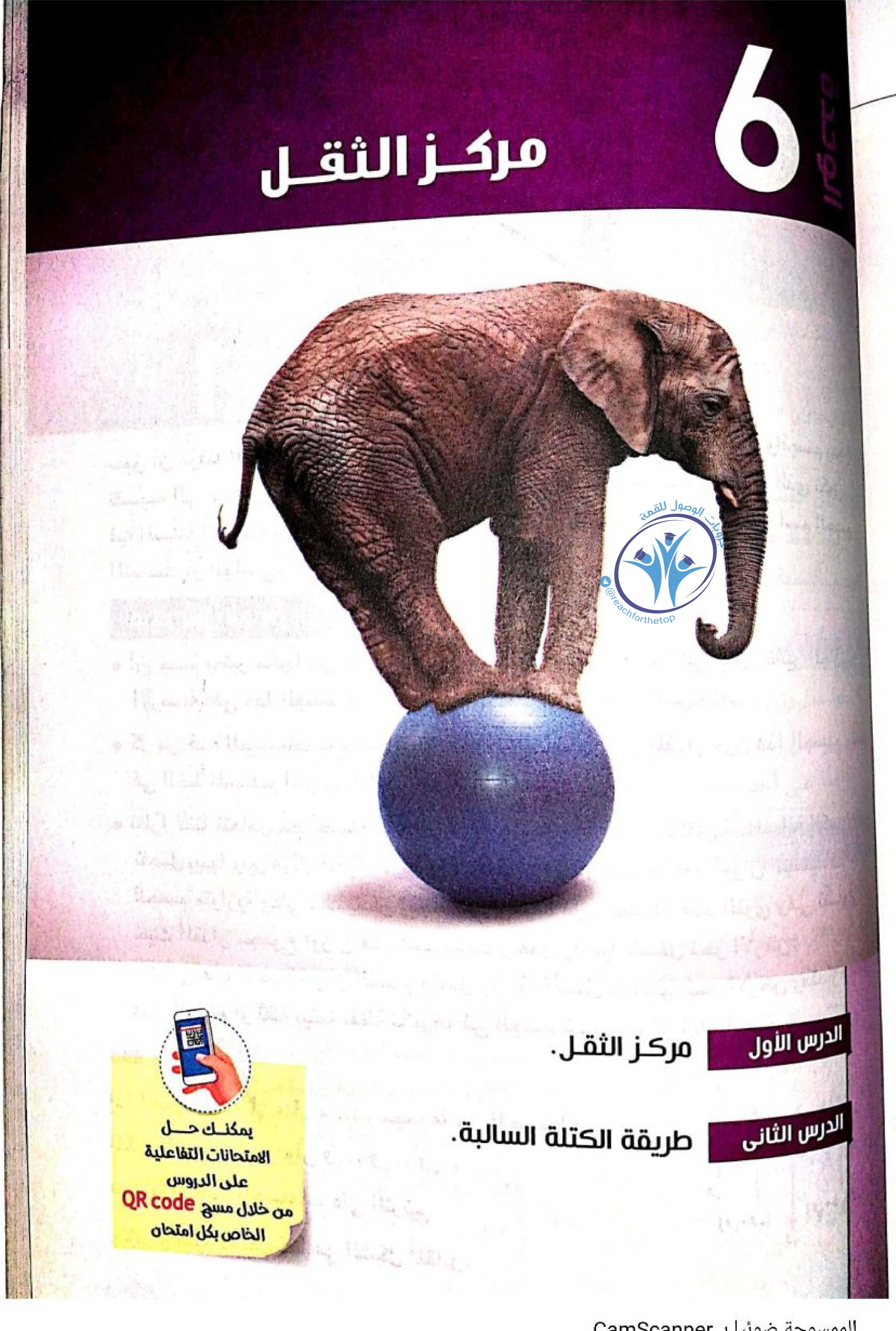
«نق (أ حـ − أ ب) وحدة عزم»

---

٦٥ أ ب حـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٦ ، ١ ، ٣ نيوتن فى أ ب ، حـ ب ، حـ ء ، هـ ء ، هـ و ، أ و على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه القوة التى يجب أن تؤثر فى مركز المسدس لكى تؤول المجموعة إلى ازدواج ثم عيِّن عزمه.

«٣ √٣ نيوتن فى اتجاه حـ أ ، −٣٥ √٣ نيوتن.سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner


الوحدة
6
مركز الثقل
جروبات الوصول للقمة
@reachforthetop
الدرس الأول
مركز الثقل.
الدرس الثانى
طريقة الكتلة السالبة.
يمكنك حل
الامتحانات التفاعلية
على الدروس
من خلال مسح QR code
الخاص بكل امتحان



الدرس 1 مركز الثقل

سبق أن عرّفنا الجسيم على أنه جسم يمكن اعتباره مركزًا فى نقطة هندسية والجسم يمكن تقسيمه إلى عدد من الأجزاء كل جزء من هذه الأجزاء نعتبره جسيمًا والجسم الذى تكون فيه المسافة الفاصلة بين أى جسيمين من الجسيمات المكونة له ثابتة يطلق عليه اسم الجسم المتماسك أو الجاسئ.

مركز ثقل الجسم الجاسئ

- أى جسم يعتبر مكونًا من مجموعة من الجسيمات الصغيرة وبالتالى يكون تأثير الجاذبية الأرضية على هذا الجسم هو ناتج تأثيراتها على الجسيمات المكونة له.
- كل من هذه الجسيمات يقع تحت تأثير قوة جذب تساوى فى المقدار وزن هذا الجسيم وتعمل فى الخط المستقيم المار بهذا الجسيم وبمركز الكرة الأرضية.
- نظرًا لأننا نتعامل مع أجسام ذات أبعاد فراغية ضئيلة للغاية بالمقارنة بالمسافة الكبيرة التى تفصل بينها وبين مركز الكرة الأرضية فإنه يمكن اعتبار خطوط عمل أوزان الجسيمات المكونة للجسم متوازية وعلى ذلك يمكن إيجاد قوة وحيدة هى محصلة هذه القوى وهى تساوى من حيث المقدار مجموع أوزان هذه الجسيمات وتعمل رأسيًا لأسفل نحو الأرض.

وتسمى هذه المحصلة وزن الجسم وتعمل رأسيًا لأسفل وموجهة نحو الأرض ومقدارها هو وزن الجسم أو ثقله بينما نقطة تأثيرها فى الجسم تسمى مركز ثقل الجسم.

فمثلًا :

إذا اعتبرنا $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ ، ..... مجموعة من الجسيمات المكونة لجسم جاسئ وأن $و_1$ ، $و_2$ ، $و_3$ ، ..... هى أوزان هذه الجسيمات على الترتيب وتؤثر رأسيًا لأسفل كما فى الشكل المقابل.

$م_3$ $م_4$ $م_1$ $م_2$ $و_1$ $(و_1+و_2)$ $(و_1+و_2+و_3)$ $و_2$ $و_3$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* محصلة القوتين المتوازيتين $و_1$ ، $و_2$ المؤثرتين عند $ا_1$ ، $ا_2$ على الترتيب وتمر بالنقطة $م_1$ هى $(و_1 + و_2)$ لذلك فإن : $و_1 \times ا_1 م_1 = و_2 \times ا_2 م_1$ مهما كان وضع الجسم بالنسبة للأرض وذلك لأن البعُد بين النقطتين $ا_1$ ، $ا_2$ ثابت لأن الجسم جاسئ وبالتالى تظل $م_1$ ثابتة.
* محصلة القوتين المتوازيتين $(و_1 + و_2)$ ، $و_3$ هى $(و_1 + و_2 + و_3)$ ونفرض أن نقطة تأثيرها هى $م_2$ لذلك فإن : $و_3 \times ا_3 م_2 = (و_1 + و_2) \times م_1 م_2$ وتظل المسافة $ا_3 م_2$ ثابتة.
وبالتالى فإن $م_2$ نقطة ثابتة مهما كان وضع الجسيمات عند النقاط $ا_1$ ، $ا_2$ ، $ا_3$
* نستمر بعد ذلك فى تحصيل وزن الجسيم $ا_4$ وهى $(و_4)$ مع المحصلة المارة بالنقطة $م_2$ وهكذا حتى يتم تجميع كافة أوزان الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ وفى النهاية نصل إلى أن وزن الجسم يساوى مجموع جميع أوزان الجسيمات ويمر دائمًا بنقطة ثابتة الوضع ولتكن (م)

تعريف

مركز ثقل الجسم الجاسئ هو نقطة وحيدة من الفراغ (غير مركز الكرة الأرضية) يمر بها دائمًا خط عمل وزن هذا الجسم وتكون ثابتة بالنسبة لهذا الجسم مهما تغير وضع الجسم بالنسبة لسطح الأرض ويرمز لمركز ثقل الجسم الجاسئ بالرمز (م)

ملاحظتان

(١) خط عمل وزن الجسم يجب أن يمر بمركز ثقل الجسم وأيضًا يمر بمركز الكرة الأرضية.
(٢) مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتًا بالنسبة لهذا الجسم ولكنه لا يكون بالضرورة واقعًا على أحد جسيمات هذا الجسم.

متجه موضع مركز الثقل للجسم الجاسئ بالنسبة لنقطة الأصل

إذا كانت : $و_1$ ، $و_2$ ، ..... ، $و_ن$ هى أوزان الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ $\overleftarrow{ر_1}$ ، $\overleftarrow{ر_2}$ ، ..... ، $\overleftarrow{ر_ن}$ هى متجهات مواضع هذه الجسيمات منسوبة إلى نقطة الأصل فإن متجه الموضع $\overleftarrow{ر_م}$ لمركز ثقل الجسم الجاسئ منسوبًا إلى نقطة الأصل يتحدد من العلاقة :

$$\overleftarrow{ر_م} = \frac{و_1 \overleftarrow{ر_1} + و_2 \overleftarrow{ر_2} + ... + و_ن \overleftarrow{ر_ن}}{و_1 + و_2 + ... + و_ن} \quad (1)$$

، ∵ $و_1 = ك_1 د$

، $و_2 = ك_2 د$ ، .....

، $و_ن = ك_ن د$

لاحظ أن

مجموع عزوم هذه الأوزان حول نقطة الأصل = عزم المحصلة حول نفس النقطة.
ومنها يمكن استنتاج أن :

$$و_1 \overleftarrow{ر_1} + و_2 \overleftarrow{ر_2} + ... + و_ن \overleftarrow{ر_ن} = (و_1 + و_2 + ... + و_ن) \overleftarrow{ر_م} \quad (2)$$

حيث ك_1 ، ك_2 ، ..... ، $\text{ك}_\text{ن}$ هى كتل الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ

وبالتعويض من (٢) فى (١) وقسمة كل من البسط والمقام على ء

$$\therefore \overrightarrow{\text{ر}}_\text{م} = \frac{\text{ك}_1 \overrightarrow{\text{ر}}_1 + \text{ك}_2 \overrightarrow{\text{ر}}_2 + ... + \text{ك}_\text{ن} \overrightarrow{\text{ر}}_\text{ن}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + ... + \text{ك}_\text{ن}}$$

ويمكن أن تكتب هذه العلاقة بدلالة المركبات فى اتجاه محورى الإحداثيين المتعامدين $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ كما يلى :

$$\text{س}_\text{م} = \frac{\text{ك}_1 \text{س}_1 + \text{ك}_2 \text{س}_2 + ... + \text{ك}_\text{ن} \text{س}_\text{ن}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + ... + \text{ك}_\text{ن}}$$

$$\text{، ص}_\text{م} = \frac{\text{ك}_1 \text{ص}_1 + \text{ك}_2 \text{ص}_2 + ... + \text{ك}_\text{ن} \text{ص}_\text{ن}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + ... + \text{ك}_\text{ن}}$$

مثال ١

جسمان ماديان كتلتاهما ٦ كجم ، ١٢ كجم والمسافة بينهما ٩٠ سم

أوجد مركز ثقل الجسمين بالنسبة للجسم ٦ كجم.

الحـــل

اعتبر أن الخط الواصل بين مركزى ثقل الجسمين يقع على محور السينات وأن مركز ثقل الجسم ٦ كجم يقع عند نقطة الأصل و (٠ ، ٠) ومركز ثقل الكتلة ١٢ كجم يقع عند أ (٩٠ ، ٠)

$$\therefore \text{س}_\text{م} = \frac{\text{ك}_1 \text{س}_1 + \text{ك}_2 \text{س}_2}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2} = \frac{٦ \times ٠ + ١٢ \times ٩٠}{٦ + ١٢} = ٦٠ \text{ سم}$$

$$\text{، ص}_\text{م} = \frac{\text{ك}_1 \text{ص}_1 + \text{ك}_2 \text{ص}_2}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2} = \frac{٦ \times ٠ + ١٢ \times ٠}{٦ + ١٢} = ٠$$

∴ مركز الثقل م = (٦٠ ، ٠)

أى أن : مركز ثقل الجسمين يقع على بُعد ٦٠ سم من الجسم ٦ كجم.

ملاحظة

مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة ل يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما ويقسم طولها بنسبة عكسية لنسبة الكتلتين.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل آخر :

نفرض أن م هى مركز ثقل الجسمين

$ك_1$ = ٦ كجم ، $ك_2$ = ١٢ كجم

∵ مركز ثقل الجسمين يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما ويقسم طولها بنسبة عكسية لنسبة الكتلتين.

∴ $\frac{أم}{بم} = \frac{١٢}{٦} = \frac{٢}{١}$ ∴ أم = ٢ بم

، ∵ أب = ٩٠ سم ∴ ٣ بم = ٩٠

∴ بم = ٣٠ سم ، أم = ٦٠ سم

∴ مركز الثقل يبعد عن الجسم ٦ كجم مسافة ٦٠ سم

مثال ٢

أ ب حـ مثلث فيه : أب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، حـ أ = ١٠ سم ، ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ ، وضعت ثلاث كتل متساوية مقدار كل منها (ك) عند النقط ب ، ء ، هـ

أوجد مركز ثقل هذه الكتل الثلاث.

الحل

∵ $(حـ أ)^2$ = ١٠٠ سم^2 ، $(أب)^2 + (ب حـ)^2$ = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ سم^2

∴ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{ب س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$

وذلك باعتبار أن ب هى نقطة الأصل

∴ أ = (٠ ، ٦) ، ب = (٠ ، ٠) ، حـ = (٨ ، ٠) ، ء = (٠ ، ٣) ، هـ = (٤ ، ٣)

ويستحسن أن ننشئ الجدول الآتى لبيان الكتل المكونة للمجموعة وإحداثيات كل منها :

	عند ب	عند ء	عند هـ
الكتلة	ك	ك	ك
الإحداثى السينى (س)	٠	٠	٤
الإحداثى الصادى (ص)	٠	٣	٣

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ويكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هي :

$$س_م = \frac{ك \times ٠ + ك \times ٠ + ك \times ٤}{ك + ك + ك}$$

$\therefore$ $س_م = \frac{٤}{٣}$ سم

$$، ص_م = \frac{ك \times ٠ + ك \times ٣ + ك \times ٣}{ك + ك + ك}$$

$\therefore$ $ص_م = ٢$ سم

$\therefore$ مركز الثقل م = $\left(\frac{٤}{٣} ، ٢\right)$

لاحظ أن

إذا اعتبرنا $\overleftarrow{ب ح}$ ، $\overleftarrow{ب ا}$ محورى إحداثيات موجبين فإن مركز الثقل = $\left(\frac{٤}{٣} ، ٢\right)$ وعند تغيير محاور الإحداثيات سوف يتغير إحداثيي مركز الثقل.

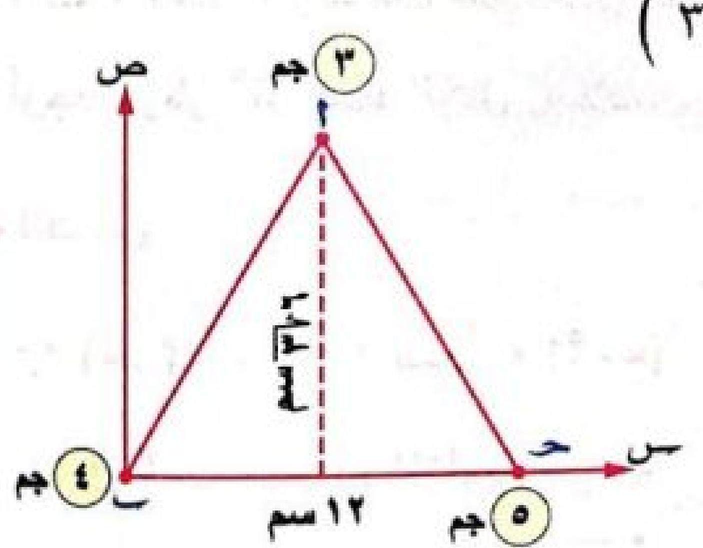
مثال ٣

ا ب ح مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم وضعت الكتل ٣ ، ٤ ، ٥ جرام عند الرؤوس ا ، ب ، ح على الترتيب. عيِّن مركز ثقل المجموعة.

الحـــل

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{ب س}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$ كما بالشكل وذلك باعتبار أن ب هى نقطة الأصل

ب = (٠ ، ٠) ، ح = (١٢ ، ٠) ، ا = (٦ ، ٦$\sqrt{٣}$)



ونكوِّن جدول كتل المجموعة وإحداثياتها كما يلى :

	ا	ب	ح
ك	٣	٤	٥
س	٦	٠	١٢
ص	٦$\sqrt{٣}$	٠	٠

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى : $س_م = \frac{٣ \times ٦ + ٤ \times ٠ + ٥ \times ١٢}{٣ + ٤ + ٥}$

$\therefore$ $س_م = \frac{٧٨}{١٢}$ $\therefore$ $س_م = \frac{١٣}{٢}$ سم

$$، ص_م = \frac{٣ \times ٦\sqrt{٣} + ٤ \times ٠ + ٥ \times ٠}{٣ + ٤ + ٥}$$

$\therefore$ $ص_م = \frac{١٨\sqrt{٣}}{١٢}$

$\therefore$ $ص_م = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ سم

$\therefore$ مركز الثقل م للمجموعة = $\left(\frac{١٣}{٢} ، \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}\right)$

بالنسبة للنقطة «ب»

لاحظ أن

نعلم أن مركز ثقل أى جسم هو نقطة ثابتة لا يتغير موضعها بتغير وضع الجسم ولكن يتغير إحداثيا مركز الثقل بتغير المحاور المتعامدة حيث إن محاور الإحداثيات المتعامدة اختيارية.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٤

أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم ثُبتت الكتل ١٢ ، ٨ ، ٦ ، ٤ جم عند رؤوسه أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب كما تثبت كتلة ٢٠ جم عند منتصف $\overline{أب}$ عيِّن مركز ثقل المجموعة.

الحـل

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$ كما بالشكل ثم نكوِّن جدول كتل المجموعة وإحداثياتها كما يلى :

	أ	ب	حـ	ء	هـ
ك	١٢	٨	٦	٤	٢٠
س	١٠	١٠	٠	٠	١٠
ص	١٠	٠	٠	١٠	٥



وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$$س_م = \frac{١٢ \times ١٠ + ٨ \times ١٠ + ٦ \times ٠ + ٤ \times ٠ + ٢٠ \times ١٠}{١٢ + ٨ + ٦ + ٤ + ٢٠} = \frac{٤٠٠}{٥٠} = ٨ \text{ سم}$$

$$، ص_م = \frac{١٢ \times ١٠ + ٨ \times ٠ + ٦ \times ٠ + ٤ \times ١٠ + ٢٠ \times ٥}{١٢ + ٨ + ٦ + ٤ + ٢٠} = \frac{٢٦٠}{٥٠} = ٥,٢ \text{ سم}$$

∴ م = (٨ ، ٥,٢) بالنسبة للنقطة «حـ»

مثال ٥

ثُبتت كتل مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ جم عند النقط أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب من الخط المنكسر أ ب حـ ء الموضح بالشكل المقابل حيث $\overline{حـ ء} \perp \overleftarrow{أب}$ ، ق(∠ أ ب حـ) = ١٢٠°

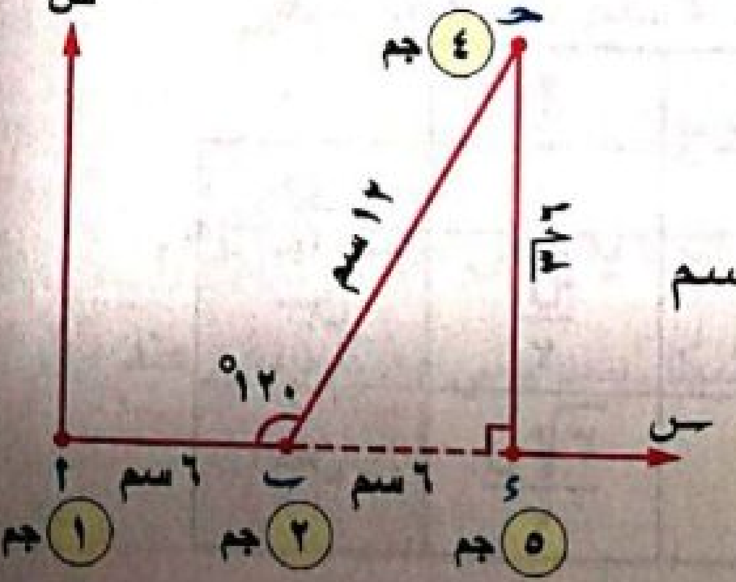
أوجد مركز ثقل المجموعة.

الحـل

∵ ق(∠ أ ب حـ) = ١٢٠° ∴ ق(∠ حـ ب ء) = ٦٠°

∴ ق(∠ ب حـ ء) = ٣٠° ∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٦ سم

، ء حـ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم



	أ	ب	حـ	ء
ك	١	٢	٤	٥
س	٠	٦	١٢	١٢
ص	٠	٠	$٦\sqrt{٣}$	٠

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{أس}$ ، $\overleftarrow{أص}$

كما بالشكل ثم نكون جدول كتل المجموعة

وإحداثياتها كما يلى وذلك باعتبار

$\overleftarrow{أس}$ ، $\overleftarrow{أص}$ اتجاهين متعامدين

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$$س_م = \frac{١ \times ٠ + ٢ \times ٦ + ٤ \times ١٢ + ٥ \times ١٢}{١ + ٢ + ٤ + ٥} = \frac{١٢٠}{١٢} = ١٠ \text{ سم}$$

$$، ص_م = \frac{١ \times ٠ + ٢ \times ٠ + ٤ \times ٦\sqrt{٣} + ٥ \times ٠}{١ + ٢ + ٤ + ٥} = \frac{٢٤\sqrt{٣}}{١٢} = ٢\sqrt{٣} \text{ سم}$$

$\therefore$ م = $(١٠ ، ٢\sqrt{٣})$ بالنسبة للنقطة «أ»

مثال ٦

وضعت أثقال مقاديرها ٥ ، ٤ ، ٦ ، ٢ ، ٧ ، ٣ ثقل جم عند الرؤوس المتتالية لسداسى منتظم أثبت أن مركز ثقل المجموعة يقع فى المركز الهندسى للسداسى.

الحل

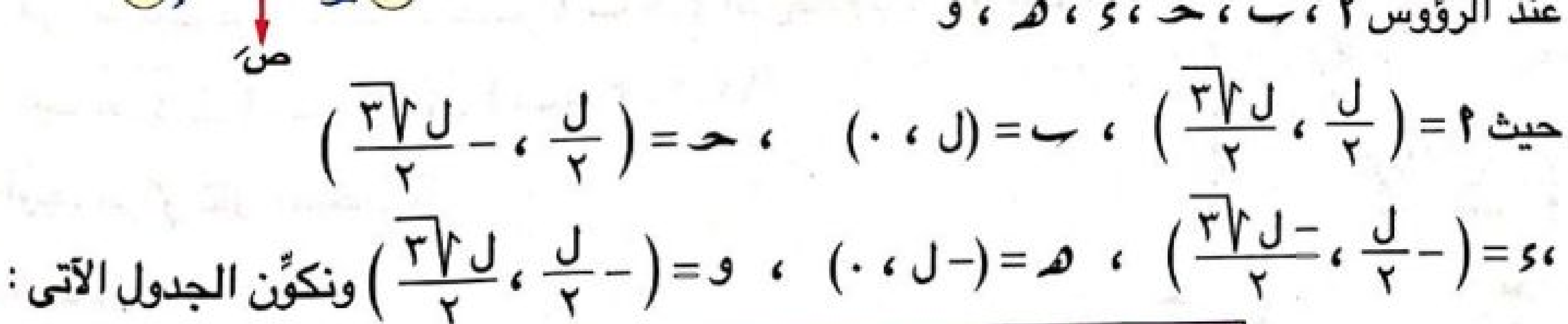
نفرض أن السداسى هو أ ب حـ ء هـ و

ونختار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{مس}$ ، $\overleftarrow{مص}$

حيث م مركز السداسى

ونفرض طول ضلع السداسى = ل وأن الكتل مثبتة على الترتيب

عند الرؤوس أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و



حيث أ = $\left(\frac{ل}{٢} ، \frac{ل\sqrt{٣}}{٢}\right)$ ، ب = (ل ، ٠) ، حـ = $\left(\frac{ل}{٢} ، -\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}\right)$

ء = $\left(-\frac{ل}{٢} ، \frac{-ل\sqrt{٣}}{٢}\right)$ ، هـ = (−ل ، ٠) ، و = $\left(-\frac{ل}{٢} ، \frac{ل\sqrt{٣}}{٢}\right)$ ونكوّن الجدول الآتى :

	أ	ب	حـ	ء	هـ	و
ك	٥	٤	٦	٢	٧	٣
س	$\frac{ل}{٢}$	ل	$\frac{ل}{٢}$	$-\frac{ل}{٢}$	−ل	$-\frac{ل}{٢}$
ص	$\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$	٠	$-\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$	$-\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$	٠	$\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$

تكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$$\text{س}_{\text{م}} = \frac{5 \times \frac{\text{ل}}{2} + 4 \times \text{ل} + 6 \times \frac{\text{ل}}{2} + 2 \times \left(-\frac{\text{ل}}{2}\right) + 7 \times (-\text{ل}) + 3 \times \left(-\frac{\text{ل}}{2}\right)}{5 + 4 + 6 + 2 + 7 + 3} = \frac{0}{27} = \text{صفر}$$

$$\text{ص}_{\text{م}} = \frac{5 \times \frac{\text{ل}\sqrt{3}}{2} + 4 \times 0 + 6 \times \left(\frac{-\text{ل}\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \times \left(\frac{-\text{ل}\sqrt{3}}{2}\right) + 7 \times 0 + 3 \times \frac{\text{ل}\sqrt{3}}{2}}{5 + 4 + 6 + 2 + 7 + 3} = \frac{0}{27} = \text{صفر}$$

∴ م = (٠ ، ٠)　　∴ مركز ثقل المجموعة يقع فى المركز الهندسى للسداسى المنتظم.

الجسم المنتظم الكثافة

هو الجسم الذى تكون كتلة وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أى جزء منه ثابتة.

ملاحظات

* إذا كان السلك (أو القضيب) منتظم الكثافة فإن وزنه يتناسب مع طوله.
* إذا كانت الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن وزنها يتناسب مع مساحتها.
* إذا كان المجسم منتظم الكثافة فإن وزنه يتناسب مع حجمه.

مراكز ثقل بعض الأجسام الجاسئة البسيطة

① مركز ثقل قضيب منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه.

② مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل متوازى الأضلاع أو أحد حالاته الخاصة (المربع – المستطيل – المعين) يقع عند مركزها الهندسى (نقطة تقاطع القطرين).

③ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات هذا المثلث (هى نقطة تقسم المتوسط من الداخل بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة).

④ مركز ثقل سلك رفيع منتظم الكثافة على شكل مثلث لا يقع عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث إلا إذا كان المثلث متساوى الأضلاع.

⑤ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع فى مركز الدائرة.

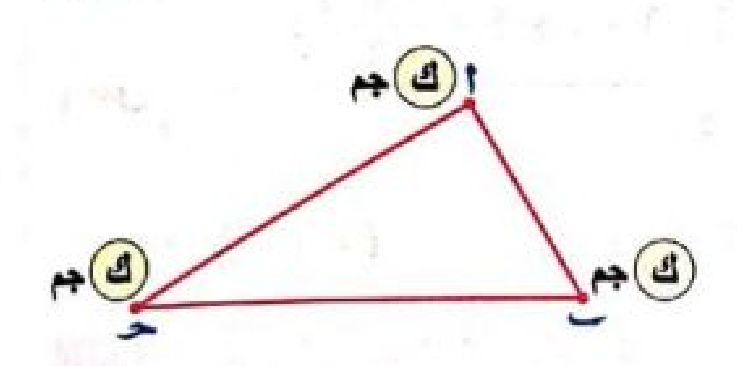
⑥ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل سداسى منتظم يقع عند مركز السداسى.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظة هامة

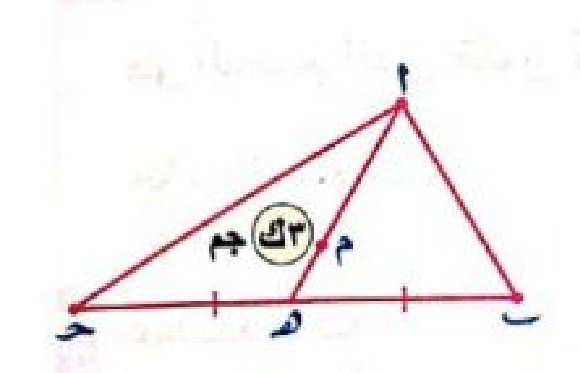
مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث.

* **ففى الشكل المقابل :**



إذا وضعت ثلاثة كتل متساوية كتلة كل منها (ك) جم مثلًا عند الرؤوس أ ، ب ، حـ من Δ أ ب حـ

فإن مركز ثقل هذه الكتل يقع عند ملتقى متوسطات المثلث أى أنه ينطبق على مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على هيئة هذا المثلث وكتلتها = (٣ ك) جم



والعكس صحيح : (فكرة التوزيع)

إذا كانت كتلة صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة = (٣ ك) جم وتؤثر فى نقطة تلاقى المتوسطات فإنه يمكن استبدالها بثلاث كتل متساوية كتلة كل منها = (ك) جم موضوعة عند رؤوس المثلث.

الإثبات :

$\because$ مركز ثقل الكتلتين (ك) عند حـ ، (ك) عند ب

هو مركز ثقل كتلة مقدارها (٢ ك) وتؤثر فى

نقطة هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، $\because$ مركز ثقل الكتلتين (ك) عند أ ، (٢ ك) عند هـ هو مركز ثقل كتلة مقدارها (٣ ك) وتؤثر فى نقطة م $\in \overline{\text{أ هـ}}$ حيث ك × أ م = ٢ ك × هـ م

$\therefore$ أ م = ٢ هـ م $\therefore$ أ م : هـ م = ٢ : ١

$\therefore$ م هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث

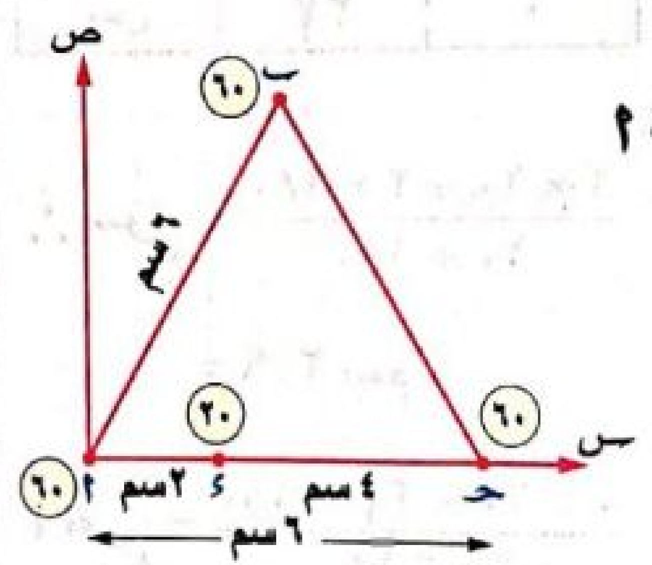
أى أن : مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث ينطبق مع مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمثلث.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٧

صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ١٨٠ جرام على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٦ سم ، لصقت كتلة قدرها ٢٠ جرام عند نقطة ى ∋ $\overline{أحـ}$ بحيث : أى = ٢ سم. عيِّن مركز ثقل المجموعة.

الحـل



نختار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{أس}$ ، $\overleftarrow{أص}$ بحيث تكون نقطة أ فى نقطة الأصل نستعيض عن كتلة الصفيحة وهى ١٨٠ جم بثلاث كتل متساوية مقدار كل منها $\frac{١٨٠}{٣}$ أى ٦٠ جم مُثبتة عند رؤوس المثلث فتصبح المجموعة المكافئة مكونة من أربعة كتل موضوعة عند النقط أ ، ب ، حـ ، ى حيث : أ = (٠ ، ٠)

، ب = (٦ جتا ٦٠° ، ٦ جا ٦٠°) = (٣ ، ٣ $\sqrt{٣}$) ، حـ = (٦ ، ٠) ، ى = (٢ ، ٠)

ثم نكوِّن جدول كتل المجموعة وإحداثياتها كما يلى :

	أ	ب	حـ	ى
ك	٦٠	٦٠	٦٠	٢٠
س	٠	٣	٦	٢
ص	٠	٣ $\sqrt{٣}$	٠	٠

$$\therefore س_م = \frac{٦٠ \times ٠ + ٦٠ \times ٣ + ٦٠ \times ٦ + ٢٠ \times ٢}{٦٠ + ٦٠ + ٦٠ + ٢٠} = ٢,٩ \text{ سم}$$

$$، ص_م = \frac{٦٠ \times ٠ + ٦٠ \times ٣\sqrt{٣} + ٦٠ \times ٠ + ٢٠ \times ٠}{٦٠ + ٦٠ + ٦٠ + ٢٠} = \frac{٩\sqrt{٣}}{١٠} \text{ سم}$$

∴ م = (٢,٩ ، ٠,٩ $\sqrt{٣}$) بالنسبة للنقطة «أ»

حل آخر :

بدلًا من توزيع كتلة المثلث عند رؤوسه يمكننا تعيين مركز ثقل المثلث م (نقطة تقاطع المتوسطات)

$$\text{حيث م} = \left(\frac{٠ + ٣ + ٦}{٣} ، \frac{٠ + ٣\sqrt{٣} + ٠}{٣}\right) = (٣ ، \sqrt{٣})$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثم نكوِّن جدول كتل المجموعة وإحداثياتها :

	م	ء
ك	١٨٠	٢٠
س	٣	٢
ص	$\sqrt{3}$	٠

تذكر أن :

إذا كان : أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$ ، ح $(س_3 ، ص_3)$ هى رؤوس مثلث فإن نقطة تلاقى متوسطات المثلث

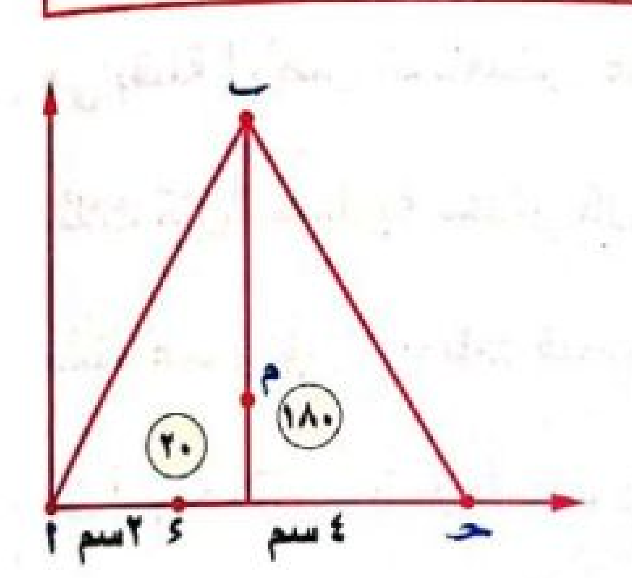
$$م = \left(\frac{س_1 + س_2 + س_3}{3} ، \frac{ص_1 + ص_2 + ص_3}{3}\right)$$

$$\therefore س_م = \frac{180 \times 3 + 20 \times 2}{180 + 20}$$

$= 2,9$ سم

$$، ص_م = \frac{180 \times \sqrt{3} + 20 \times 0}{180 + 20} = \frac{9\sqrt{3}}{10} \text{ سم}$$

$$\therefore م = (2,9 ، 0,9\sqrt{3})$$



مثال ٨

صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل المثلث أ ب ح وكتلتها ١٨ جم ثُبتت الكتلتان ١٠ ، ٤ جرام عند الرأسين أ ، ب كما ثُبتت كتلة قدرها ٨ جم عند منتصف $\overline{أح}$ أثبت أن مركز ثقل المجموعة ينطبق على نقطة منتصف المستقيم المتوسط $\overline{أء}$

الحل

نستعيض عن كتلة الصفيحة بثلاث كتل متساوية

مقدار كل منها = $\frac{18}{3}$ = ٦ جرام عند رؤوس المثلث

وكذلك الكتلة ٨ جم تُستبدل بكتلتين مقدار كل منها $\frac{8}{2}$ = ٤ جم عند الرأسين أ ، ح وتصبح الكتل المثبتة كما بالشكل ①

الكتلتان ١٠ جم ، ١٠ جم عند ب ، ح يستعاض عنهما بكتلة ٢٠ جم عند ء منتصف $\overline{بح}$ كما هو واضح بالشكل رقم ②

، الكتلتين ٢٠ جم عند أ ، ٢٠ جم عند ء يستعاض عنهما بكتلة ٤٠ جم عند ں منتصف $\overline{أء}$ حيث ں مركز ثقل المجموعة

$\therefore$ مركز ثقل المجموعة ينطبق على نقطة منتصف المستقيم المتوسط $\overline{أء}$

شكل ①

شكل ②

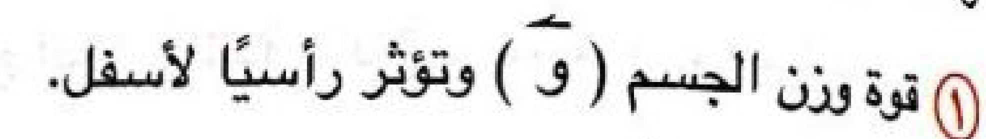
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التعليق الحر للجسم الجاسئ

فى الشكل المقابل :

إذا فرضنا جسمًا جاسئًا وزنه (و) ومركز ثقله م مُعلق تعليقًا حُرًا من إحدى نقطه (أ) بواسطة خيط فى نقطة تعليق ب

وعندما يتزن الجسم يكون واقعًا تحت تأثير قوتين :



① قوة وزن الجسم ($\vec{و}$) وتؤثر رأسيًا لأسفل.

② قوة الشد ($\vec{ش}$)

، ∵ الجسم متزن

∴ $\vec{ش}$ + $\vec{و}$ = $\vec{٠}$ ∴ $\vec{ش}$ = − $\vec{و}$

أى أن : قوة الشد تكون موجهة رأسيًا لأعلى

وهذا معناه أن الخيط فى وضع الاتزان يكون رأسيًا ويكون ش = و

وأيضًا يجب أن ينطبق خطا عمل قوتى الوزن والشد ولذلك

> **نجد أن**
>
> مركز ثقل الجسم الجاسئ المُعلق تعليقًا حُرًا يقع على الخط المستقيم الرأسى المار بنقطة التعليق.

مثال ⑨

صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٣ كجم على هيئة المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = أ حـ ، ب حـ = طول ارتفاع المثلث يساوى ٦ سم ثُبتت الكتل ٣ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كجم عند أ ، ب ، حـ ، ء منتصف $\overline{أ ب}$ على الترتيب. عيِّن مركز ثقل المجموعة وأثبت أنه يبعد عن حـ مسافة ٤ سم وإذا عُلقت الصفيحة من حـ تعليقًا حُرًا. فأوجد فى وضع الاتزان قياس زاوية ميل كلٍ من : $\overline{حـ ب}$ ، $\overline{حـ أ}$ على الرأسى.

الحـــل

نرسم $\overleftarrow{\text{حـ ص}} \perp \overline{\text{حـ ب}}$

ونختار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$

بحيث تكون نقطة حـ هى نقطة الأصل نستعيض عن كتلة

الصفيحة وهى ٣ كجم بثلاث كتل متساوية مقدار كلٍ منها

١ كجم مُثبتة عند رؤوس المثلث وبذلك تصبح الكتل المثبتة عند أ ، ب ، حـ ، ى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

هى ٤ ، ٣ ، ٤ ، ٤ كجم

حيث : أ = (٣ ، ٦) ، ب = (٦ ، ٠) ، حـ = (٠ ، ٠) ، ى = $\left(٤\frac{١}{٢} ، ٣\right)$

ثم نكوِّن جدول كتل المجموعة وإحداثياتها كما يلى :

	أ	ب	حـ	ى
ك	٤	٣	٤	٤
س	٣	٦	٠	$٤\frac{١}{٢}$
ص	٦	٠	٠	٣

$\therefore$ س$_م$ = $\frac{٤ \times ٣ + ٣ \times ٦ + ٤ \times ٠ + ٤ \times ٤,٥}{٤ + ٣ + ٤ + ٤}$ $\therefore$ س$_م$ = $\frac{١٢ + ١٨ + ١٨}{١٥}$

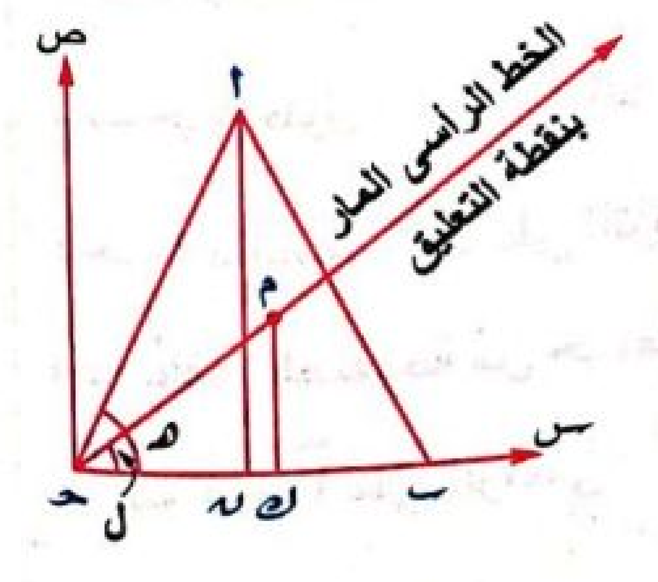
$\therefore$ س$_م$ = ٣,٢ سم ، ص$_م$ = $\frac{٤ \times ٦ + ٣ \times ٠ + ٤ \times ٠ + ٤ \times ٣}{٤ + ٣ + ٤ + ٤}$

$\therefore$ ص$_م$ = $\frac{٢٤ + ١٢}{١٥}$ $\therefore$ ص$_م$ = ٢,٤ سم $\therefore$ م = (٣,٢ ، ٢,٤)

، بُعد مركز الثقل م عن حـ = م حـ = $\sqrt{(٣,٢)^٢ + (٢,٤)^٢}$ = ٤ سم **(المطلوب أولًا)**

إيجاد قياس زاوية ميل $\overline{\text{حـ ب}}$ على الرأسى :

نرسم $\overleftarrow{\text{حـ م}}$ فيكون هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق (حـ) ونفرض أن ل هى قياس زاوية ميل $\overline{\text{حـ ب}}$ على $\overleftarrow{\text{حـ م}}$ ونرسم $\overline{\text{م ك}} \perp \overline{\text{حـ ب}}$



$\therefore$ ظا ل = $\frac{\text{م ك}}{\text{ك حـ}}$ $\therefore$ ظا ل = $\frac{٢,٤}{٣,٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

$\therefore$ ل = °٣٦ َ٥٢

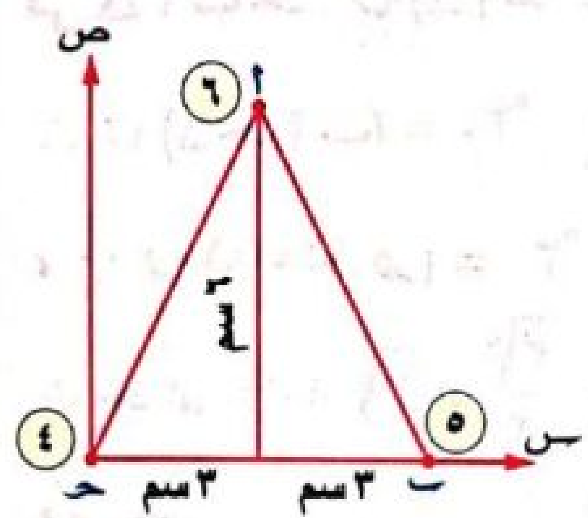
إيجاد قياس زاوية ميل حـ أ على الرأسى :

نحسب قياس ∠ أ حـ ب ولتكن هـ وذلك من Δ أ ن حـ

حيث : ظا هـ = $\frac{\text{أ ن}}{\text{ن حـ}}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ ∴ هـ = ٦٣° ٢٦َ

∴ قياس زاوية ميل $\overline{\text{حـ أ}}$ على الرأسى $\overleftarrow{\text{حـ م}}$ = هـ − ل = ٦٣° ٢٦َ − ٣٦° ٥٢َ = ٢٦° ٣٤َ

(المطلوب ثانيًا)



حل آخر :

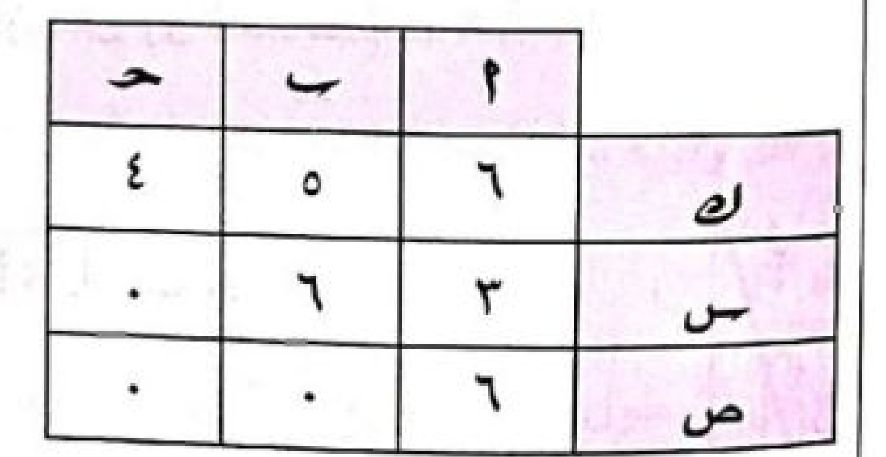
نستعيض عن كتلة الصفيحة وهى ٣ كجم بثلاث كتل متساوية

مقدار كل منها ١ كجم مُثبتة عند رؤوس المثلث

وكذلك نستعيض عن الكتلة ٤ كجم المُثبتة عند منتصف

$\overline{\text{أ ب}}$ بكتلتين مقدار كل منهما ٢ كجم مُثبتة عند أ ، ب

وبذلك تكون الكتل عند أ ، ب ، حـ كما بالشكل المقابل :



	أ	ب	حـ
ك	٦	٥	٤
س	٣	٦	٠
ص	٦	٠	٠

∴ $س_م$ = $\frac{٦ \times ٣ + ٥ \times ٦ + ٤ \times ٠}{٦ + ٥ + ٤}$ = ٣,٢ سم

، $ص_م$ = $\frac{٦ \times ٦ + ٥ \times ٠ + ٤ \times ٠}{٦ + ٥ + ٤}$ = ٢,٤ سم

ثم نكمل الحل .....

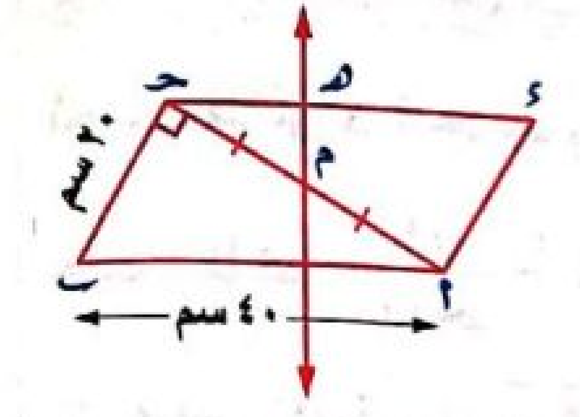
مثال ١٠

صفيحة رقيقة منتظمة على شكل متوازى الأضلاع أ ب حـ ء الذى فيه :

أ ب = ٤٠ سم ، ب حـ = ٢٠ سم ، ق(∠ ب حـ أ) = ٩٠° عُلقت الصفيحة من نقطة

(هـ) على $\overline{\text{حـ ء}}$ فاتزنت عندما كان $\overline{\text{حـ ء}}$ أفقيًا. أوجد طول : $\overline{\text{حـ هـ}}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الحل

∵ الخط الرأسى المار بنقطة التعليق (هـ)

لابد وأن يمر بمركز ثقل الصفيحة (م)

∴ $\overleftrightarrow{هـ م}$ رأسى ∴ ق(∠ م هـ حـ) = ٩٠°

، ∵ $\overline{حـ ء}$ أفقى

فى Δ أ ب حـ : ق(∠ أ حـ ب) = ٩٠° ، ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب

∴ ق(∠ حـ أ ب) = ٣٠° ، أ حـ = ٢٠ $\sqrt{٣}$ سم ∴ م حـ = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم

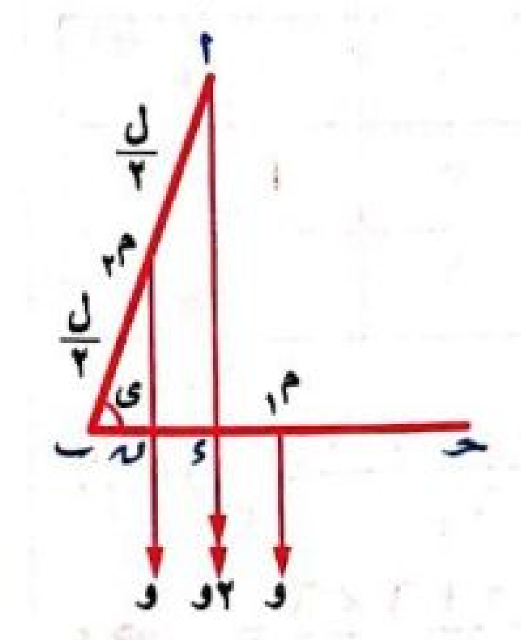
، ∵ ق(∠ م حـ هـ) = ٣٠° ∴ حـ هـ = م حـ جتا ٣٠°

∴ حـ هـ = ١٠ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ حـ هـ = ١٥ سم

مثال (١١)

ثنى قضيب منتظم $\overline{أ ب حـ}$ طوله ٢ ل من نقطة منتصفه ب ثم عُلق من الطرف أ تعليقًا حُرًا فإذا علم أن $\overline{ب حـ}$ كان أفقيًا فى وضع الاتزان فأثبت أن : ق(∠ أ ب حـ) ≃ ٣٢ َ ٧٠°

الحل



∵ أ هى نقطة التعليق ، $\overline{ب حـ}$ أفقى لذلك نرسم $\overleftrightarrow{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

∴ مركز الثقل يقع على $\overleftrightarrow{أ ء}$

وبفرض أن وزن القضيب $\overline{ب حـ}$ يساوى و ويؤثر عند منتصفه $م_١$

∴ وزن القضيب $\overline{أ ب}$ يساوى و ويؤثر عند منتصفه $م_٢$

ويكون و × $م_١$ ء = و × ن ء ∴ $م_١$ ء = ن ء (١)

، ∵ $\overline{أ ء}$ // $\overline{م_٢ ن}$ ، $م_٢$ منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ ن منتصف $\overline{ب ء}$ ∴ ن ب = ء ن (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن : $م_١$ ء = ن ء = ن ب = $\frac{١}{٣}$ ب $م_١$ = $\frac{١}{٣}$ × $\frac{ل}{٢}$ = $\frac{ل}{٦}$

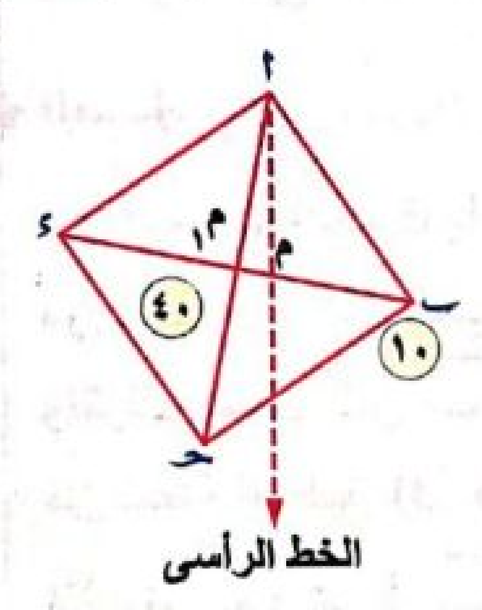
∴ جتا ى = $\frac{ل}{٦}$ ÷ $\frac{ل}{٢}$ = $\frac{ل}{٦}$ × $\frac{٢}{ل}$ = $\frac{١}{٣}$ ∴ ى ≃ ٣٢ َ ٧٠°

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١٢

عُلقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها ٤٠ ثقل جرام تعليقًا حُرًا من الرأس أ وثُبت عند الرأس ب ثقل قدره ١٠ ثقل جرام. أثبت أن ظل زاوية ميل القطر $\overline{أحـ}$ على الرأسى فى وضع الاتزان يساوى $\frac{١}{٥}$

الحـل



ليكن $م_١$ مركز ثقل الصفيحة وهو عند نقطة تلاقى قطريها

، م هو مركز ثقل المجموعة المكونة من الصفيحة والثقل عند ب

عند وضع الاتزان تكون نقطة م واقعة على الخط الرأسى المار

بنقطة التعليق أ (كما بالشكل)

وأيضًا تكون م $\in \overline{م_١ ب}$ بحيث :

$١٠ \times م ب = ٤٠ \times م م_١$ $\therefore م م_١ = \frac{١}{٤} م ب$ $\therefore م م_١ = \frac{١}{٥} م_١ ب$

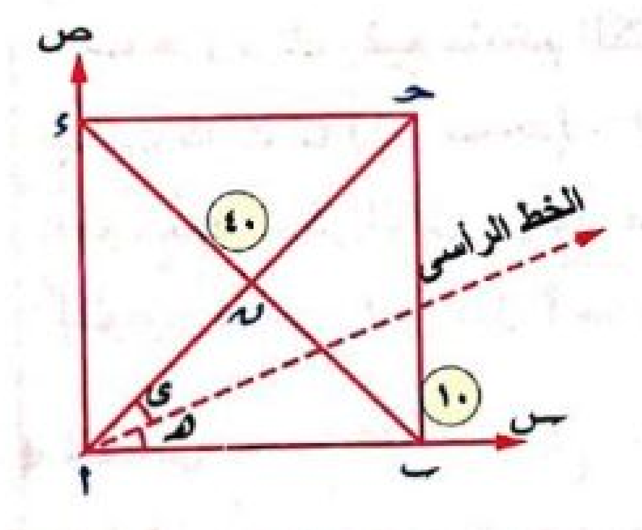
، $\because م_١ أ = م_١ ب$ $\therefore م م_١ = \frac{١}{٥} م_١ أ$ $\therefore \frac{م م_١}{م_١ أ} = \frac{١}{٥}$

وبفرض أن : فى Δ أ م $م_١$

$ق(\angle م أ م_١) = هـ$ $\therefore ظا هـ = \frac{م م_١}{م_١ أ} = \frac{١}{٥}$

$\therefore$ ظل زاوية ميل القطر $\overline{أحـ}$ على الرأسى فى وضع الاتزان يساوى $\frac{١}{٥}$

حل آخر :



نفرض أن طول ضلع المربع = ٢ ل ، ن تقاطع قطريه

	ن	ب
ك	٤٠	١٠
س	ل	٢ ل
ص	ل	٠

$\therefore س_م = \frac{٤٠ \times ل + ١٠ \times ٢ ل}{٤٠ + ١٠} = \frac{٦}{٥} ل$ ، $ص_م = \frac{٤٠ \times ل + ١٠ \times ٠}{٤٠ + ١٠} = \frac{٤}{٥} ل$

$\therefore م = \left(\frac{٦}{٥} ل ، \frac{٤}{٥} ل\right)$ ، $ظا هـ = \frac{\frac{٤}{٥} ل}{\frac{٦}{٥} ل} = \frac{٢}{٣}$

، $\because ى = ٤٥° - هـ$

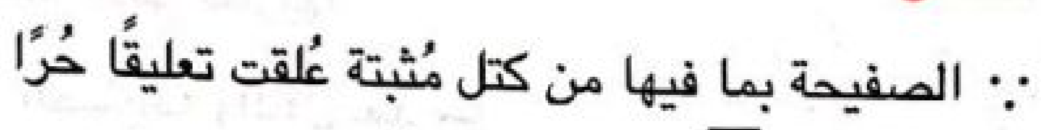
$\therefore ظا ى = ظا (٤٥° - هـ) = \frac{ظا ٤٥° - ظا هـ}{١ + ظا ٤٥° ظا هـ} = \frac{١ - \frac{٢}{٣}}{١ + \frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٥}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١٣

صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٢ كجم على هيئة مستطيل أ ب حـ ء فيه : ب حـ = ١٢ سم ، ثُبتت الكتل ١ ، ٥ ، ٣ ، ك كجم عند أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب. عُلقت الصفيحة تعليقًا حُرًا من نقطة (و) على $\overline{أء}$ بحيث : ء و = ٧ سم فاتزنت الصفيحة بحيث كان $\overline{ب حـ}$ أفقيًا. **أوجد قيمة : ك**

الحـــل



∵ الصفيحة بما فيها من كتل مُثبتة عُلقت تعليقًا حُرًا من نقطة و ∈ $\overline{أء}$ بحيث : ء و = ٧ سم

واتزنت بحيث كان $\overline{ب حـ}$ أفقيًا فمعنى ذلك أن الخط الرأسى من نقطة التعليق (و) يكون عموديًا على $\overline{ب حـ}$

لذلك نرسم و هـ ⊥ $\overline{ب حـ}$ وبذلك يكون مركز الثقل واقعًا على و هـ

وباعتبار أن $\overrightarrow{حـ س}$ ، $\overrightarrow{حـ ص}$ اتجاهين متعامدين ، أ ب = ل

فيكون الإحداثى السينى لمركز ثقل المجموعة م هو $س_م$ حيث : $س_م$ = ٧ سم

، ∵ $س_م = \frac{١ \times ١٢ + ٥ \times ١٢ + ٣ \times ٠ + ك \times ٠ + ٢ \times ٦}{١ + ٥ + ٣ + ك + ٢}$ ∴ $٧ = \frac{١٢ + ٦٠ + ١٢}{١١ + ك}$

∴ ٧٧ + ٧ ك = ٨٤ ∴ ٧ ك = ٧ ∴ ك = ١ كجم.

مثال ١٤

أ ب حـ ء سلك رفيع منتظم الكثافة فيه : أ ب = ب حـ = ٢ حـ ء = ١٢ سم ثُنى السلك عند ب ، حـ بحيث كانت ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ب حـ ء) = ٩٠° وكان $\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ فى جهة واحدة من $\overline{ب حـ}$

أوجد بُعد مركز الثقل عن كلٍ من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ب}$ وإذا علق السلك من أ تعليقًا حُرًا فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل $\overline{أ ب}$ على الرأسى.

الحـــل

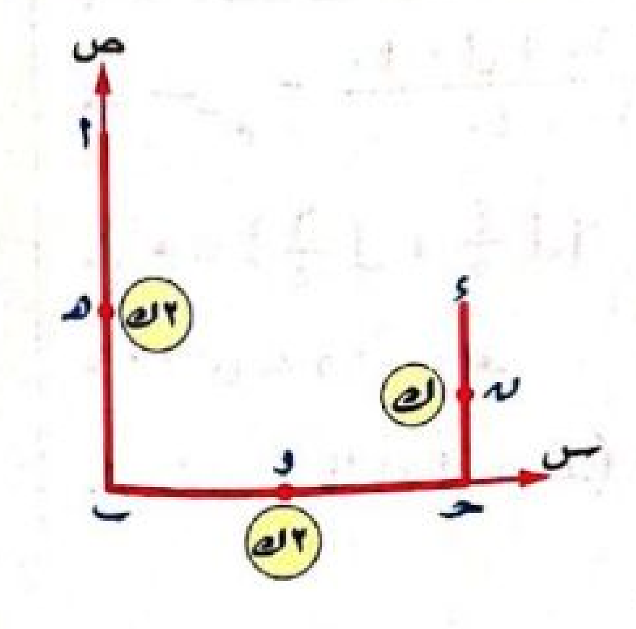
∵ أ ب = ب حـ = ٢ حـ ء = ١٢ سم

∴ أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ء = ٦ سم

، ∵ السلك رفيع ومنتظم الكثافة

∴ يمكن اعتباره مُكون من ثلاثة قضبان منتظمة من نفس المادة وهى $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$

∴ أوزانها تتناسب مع أطوالها



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وحيث أن النسبة بين أطوالها هى ١٢ : ١٢ : ٦ أى ٢ : ٢ : ١ على الترتيب

∴ نعتبر كتلتها ٢ ك ، ٢ ك ، ك على الترتيب حيث ك ثابت وحيث أن هذه القضبان منتظمة

∴ مركز ثقل كل منها عند نقطة منتصفه ففى الشكل يكون ٢ ك عند هـ ، ٢ ك عند و ، ك عند ن

ونأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{بس}$ ، $\overleftarrow{بص}$

فتكون هـ = (٠ ، ٦) ، و = (٦ ، ٠) ، ن = (١٢ ، ٣) ونكوّن الجدول الآتى :

الكتلة	٢ ك	٢ ك	ك
س	٠	٦	١٢
ص	٦	٠	٣

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هى :

$$س_م = \frac{٢ك \times ٠ + ٢ك \times ٦ + ك \times ١٢}{٢ك + ٢ك + ك} = \frac{٢٤ ك}{٥ ك} = ٤,٨$$

$$، ص_م = \frac{٢ك \times ٦ + ٢ك \times ٠ + ك \times ٣}{٢ك + ٢ك + ك} = \frac{١٥ ك}{٥ ك} = ٣$$

∴ مركز ثقل السلك م = (٤,٨ ، ٣) وهذا معناه أن مركز ثقل السلك يبعد عن $\overline{ب أ}$ مسافة ٤,٨ سم وعن $\overline{ب حـ}$ مسافة ٣ سم

عند التعليق الحُر من أ :

عند التعليق من أ نجد أن $\overleftarrow{أم}$ هو الخط الرأسى

ولنفرض أن $\overline{أب}$ يصنع مع $\overleftarrow{أم}$ زاوية قياسها ل

∴ نرسم $\overline{مط} \perp \overline{أب}$ فيكون

ظا ل = $\frac{م ط}{أ ط}$ ولكن م ط = ٤,٨ سم

، أ ط = أ ب − ط ب = ١٢ − ٣ = ٩ سم ∴ ظا ل = $\frac{٤,٨}{٩} = \frac{٨}{١٥}$

∴ ل = ٤َ ٢٨° ∴ $\overline{أب}$ يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤َ ٢٨°

أ ، ل ، ط ، م ، ء ، ٣سم ، ب ، ٤,٨ سم ، حـ ، الخط الرأسى

مثال ١٥

أ ب حـ ء هـ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة حيث أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٧ سم

، ب حـ = ١٠,٣ سم ، هـ أ ء مثلث فيه : هـ أ = هـ ء وارتفاع المثلث هو هـ و = ٦ سم

عيّن موضع مركز ثقل الصفيحة ثم إذا عُلقت الصفيحة تعليقًا حُرًا من ب

فأوجد قياس زاوية ميل $\overline{ب أ}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

الحـــل

$$\frac{\text{مساحة سطح المستطيل أ ب حـ ء}}{\text{مساحة سطح } \Delta \text{ هـ أ ء}} = \frac{١٠,٣ \times ٧}{\frac{١}{٢} \times ١٠,٣ \times ٦} = \frac{٧}{٣}$$

، ∵ الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة

∴ المساحات تتناسب مع الكتل

∴ نعتبر كتلة المستطيل = ٧ ك

فتكون كتلة المثلث = ٣ ك

ونختار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{ب س}}$

، $\overleftarrow{\text{ب ص}}$ فتكون كتلة المستطيل = ٧ ك عند

$م_١ = (٣,٥ ، ٥,١٥)$ ، كتلة المثلث = ٣ ك

عند $م_٢$ حيث $م_٢ = \left(٧ + \frac{٦}{٣} ، \frac{١٠,٣}{٢}\right) = (٩ ، ٥,١٥)$

ونكوِّن الجدول الآتى :

الكتلة	٧ ك	٣ ك
س	٣,٥	٩
ص	٥,١٥	٥,١٥

وتكون إحداثيات مركز الثقل (م) هى :

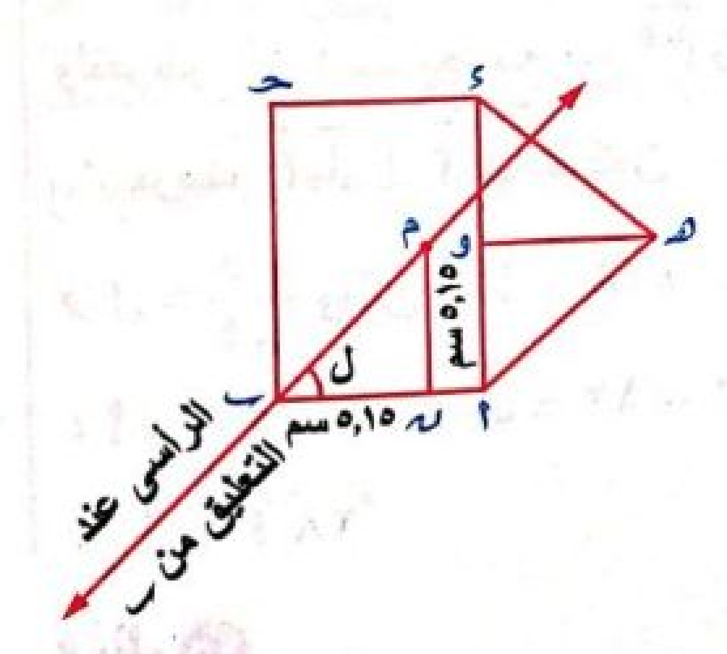
$$س_م = \frac{٧ ك \times ٣,٥ + ٣ ك \times ٩}{٧ ك + ٣ ك} = ٥,١٥$$

$$، ص_م = \frac{٧ ك \times ٥,١٥ + ٣ ك \times ٥,١٥}{٧ ك + ٣ ك} = ٥,١٥$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو م = (٥,١٥ ، ٥,١٥)

ثم نرسم $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

وليكن ل هو قياس زاوية ميل $\overline{\text{أ ب}}$ على الرأسى



∴ فى Δ م ب ن يكون :

$ظا ل = \frac{م ن}{ن ب}$ ولكن م ن = ن ب = ٥,١٥ سم

∴ ظا ل = ١ ∴ ل = ٤٥°

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١٦

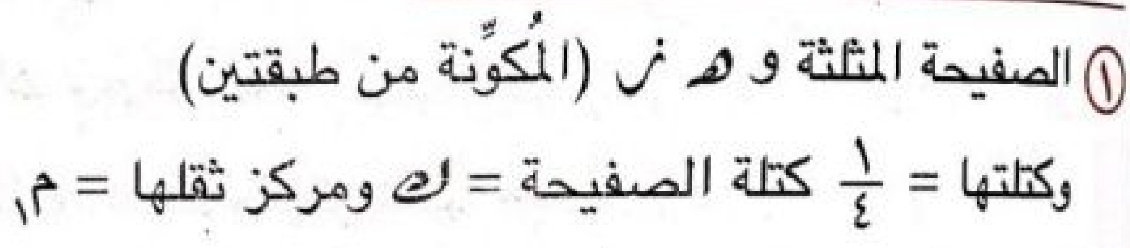
صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع أ ب حـ ء طول ضلعه ١٨ سم ، هـ ، و منتصفا الضلعين $\overline{أب}$ ، $\overline{أء}$ على الترتيب. ثُنى المثلث أ هـ و حول الضلع $\overline{هـ و}$ بحيث انطبقت أ على مركز المربع (ن) عيِّن مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد ثم إذا عُلقت الصفيحة فى هذا الوضع الجديد من الرأس حـ تعليقًا حُرًا. فأوجد ظل زاوية ميل $\overline{حـ ب}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

الحل

نفرض أن كتلة الصفيحة = ٤ ك

، وَ منتصف $\overline{ب حـ}$ فى الوضع الجديد

نعتبر الصفيحة مكوَّنة من ثلاثة أجزاء :

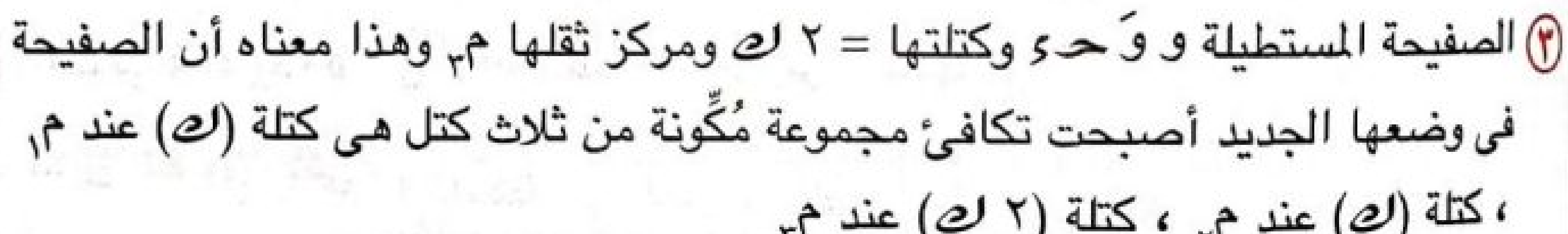


(١) الصفيحة المثلثة و هـ ن (المُكوِّنة من طبقتين)

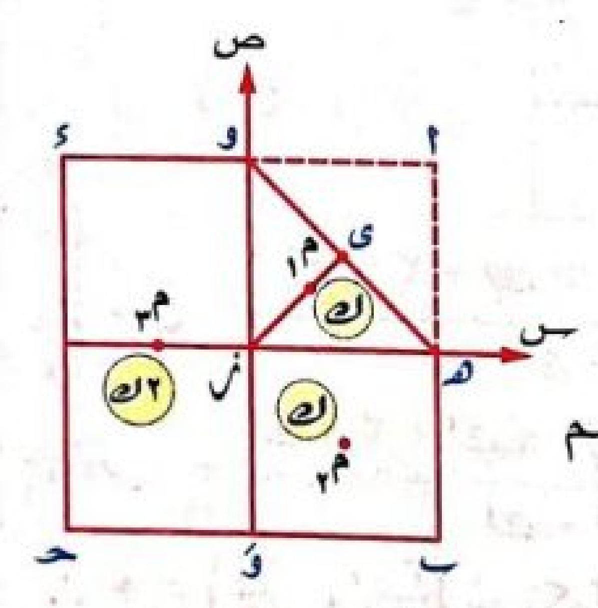
وكتلتها = $\frac{1}{4}$ كتلة الصفيحة = ك ومركز ثقلها = $م_1$



(٢) الصفيحة المربعة هـ ب وَ ن وكتلتها = ك ومركز ثقلها $م_2$



(٣) الصفيحة المستطيلة و وَ حـ ء وكتلتها = ٢ ك ومركز ثقلها $م_3$ وهذا معناه أن الصفيحة فى وضعها الجديد أصبحت تكافئ مجموعة مُكوِّنة من ثلاث كتل هى كتلة (ك) عند $م_1$ ، كتلة (ك) عند $م_2$ ، كتلة (٢ ك) عند $م_3$



• نختار اتجاهين متعامدين مناسبين $\overleftarrow{ن س}$ ، $\overleftarrow{ن ص}$

حيث ن مركز المربع أ ب حـ ء فنجد أن :

$ن م_1 = \frac{2}{3} ن ى = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} ن أ = \frac{1}{3} ن أ$

ولكن ن أ = $9\sqrt{2}$ سم $\therefore ن م_1 = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ سم

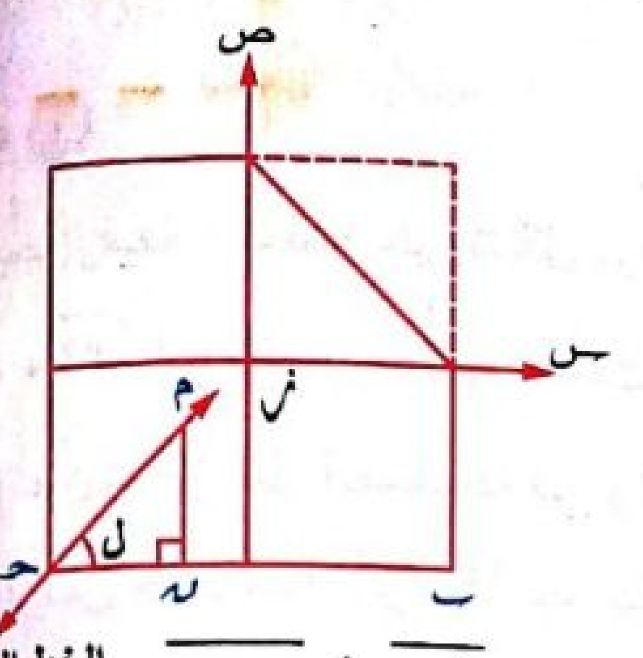
$\therefore م_1 = (3\sqrt{2}\ جتا 45°\ ،\ 3\sqrt{2}\ جا 45°) = (3\ ،\ 3)$

، $م_2 = \left(\frac{9}{2}\ ،\ -\frac{9}{2}\right)$ ، $م_3 = \left(-\frac{9}{2}\ ،\ صفر\right)$

ثم نكوِّن الجدول الآتى :

الكتلة	ك	ك	٢ ك
س	٣	$\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$
ص	٣	$-\frac{9}{2}$	صفر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



$\therefore \text{س}_{م} = \dfrac{ك \times ٣ + ك \times \frac{٩}{٢} + ٢ك \times \frac{-٩}{٢}}{ك + ك + ٢ك} = \dfrac{-٣}{٨}$

، $\text{ص}_{م} = \dfrac{ك \times ٣ + ك \times \frac{-٩}{٢} + ٢ك \times ٠}{ك + ك + ٢ك} = \dfrac{-٣}{٨}$

$\therefore م = \left(\frac{-٣}{٨} ، \frac{-٣}{٨}\right)$

ثم نصل $\overline{حم}$ فيكون هو الخط الرأسى عند التعليق من ح ونرسم $\overline{مه} \perp \overline{حب}$

فى Δ م ه ح يكون ظا ل $= \dfrac{مه}{هح} = \dfrac{٩ - \frac{٣}{٨}}{٩ - \frac{٣}{٨}} = ١$ $\therefore$ ل $= ٤٥°$

حل آخر : يمكن اعتبار الصفيحة مُكوَّنة من أربعة أجزاء

(١) الصفيحة المثلثية و هـ ن (المُكوَّنة من طبقتين)

وكتلتها = $\frac{١}{٤}$ كتلة الصفيحة = ك ومركز ثقلها = $م_{١}$

(٢) الصفيحة المربعة هـ ب وَ ن وكتلتها = ك ومركز ثقلها $م_{٢}$

(٣) الصفيحة المربعة ن وَ ح هـَ وكتلتها = ك ومركز ثقلها $م_{٣}$

(٤) الصفيحة المربعة هـَ ن و ء وكتلتها = ك ومركز ثقلها $م_{٤}$

$\therefore$ نكون الجدول الآتى :

الكتلة	ك	ك	ك	ك
س	٣	$\frac{٩}{٢}$	$\frac{-٩}{٢}$	$-\frac{٩}{٢}$
ص	٣	$-\frac{٩}{٢}$	$-\frac{٩}{٢}$	$\frac{٩}{٢}$

$\therefore \text{س}_{م} = \dfrac{ك \times ٣ + ك \times \frac{٩}{٢} + ك \times \frac{-٩}{٢} + ك \times \frac{-٩}{٢}}{ك + ك + ك + ك} = \dfrac{-٣}{٨}$

، $\text{ص}_{م} = \dfrac{ك \times ٣ + ك \times \frac{-٩}{٢} + ك \times \frac{-٩}{٢} + ك \times \frac{٩}{٢}}{ك + ك + ك + ك} = \dfrac{-٣}{٨}$

$\therefore م = \left(\frac{-٣}{٨} ، \frac{-٣}{٨}\right)$ ثم نكمل الحل.

حل ثالث : من الرسم السابق نلاحظ أن مركز ثقل الكتلة (ك) عند $م_{٢}$ ، (ك) عند $م_{٤}$ هو (٢ ك) عند ن

$\therefore$ المجموعة تؤول إلى أن جميع المراكز $م_{١}$ ، $م_{٣}$ ، ن تقع على $\overline{حأ}$

$\therefore \overleftrightarrow{حأ}$ هو الخط الرأسى $\therefore \overline{بح}$ يميل بزاوية ٤٥° على الرأسى.

على مركز الثقل



من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① **(دور أول ٢٠١٧)** مركز ثقل نظام مؤلف من كتلتين ٤ ، ٨ كجم بينهما مسافة ٦ أمتار يبعد عن الكتلة الأولى مسافة .... متر.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ٥

② **(دور ثان ٢٠١٨)** مركز ثقل نظام مؤلف من كتلتين ٧ ، ١١ كجم المسافة بينهما ٩٠ سم يبعد عن الكتلة الأولى مسافة .... سم.

(أ) ٥٠ (ب) ٥٥ (جـ) ٣٥ (د) ٤٥

③ **(دور ثان ٢٠١٨)** مركز ثقل النظام التالى : $ك_١$ = ١ كجم عند (١ ، ٠) ، $ك_٢$ = ٢ كجم عند (٠ ، ٢) ، $ك_٣$ = ٣ كجم عند (١ ، ٢) هو ....

(أ) $\left(-\frac{1}{3} ، -\frac{1}{3}\right)$ (ب) (٢ ، ١)

(جـ) $\left(\frac{5}{3} ، \frac{2}{3}\right)$ (د) $\left(\frac{2}{3} ، \frac{5}{3}\right)$

④ مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما ويقسم طولها بنسبة .... لنسبة الكتلتين.

(أ) طردية (ب) عكسية (جـ) عشوائية (د) ثابتة

⑤ **(دور ثان ٢٠١٧)** فى الشكل المقابل :

مركز ثقل ثلاث كتل متساوية قيمة كل واحدة ٢ كجم موضوعة عند رؤوس مثلث قائم الزاوية طولا ضلعى القائمة فيه ٦ سم ، ٩ سم هو ....

ص ، س ، أ ، ب ، جـ ، ٦ سم ، ٩ سم

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٤,٥ ، ٣) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (٦ ، ٤)

⑥ إذا عُلِّقت ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث أ ب جـ حيث :

أ (٢ ، ١) ، ب (٣ ، ٤) ، جـ (٤ ، ١)

فإن مركز ثقل هذه المجموعة هو ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، ٢) (جـ) (٦ ، ٩) (د) (٩ ، ٦)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ فى كل مما يأتى :

① مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتًا ولا يقع بالضرورة على أحد جسيمات هذا الجسم. ( )

② إذا عُلقت صفيحة غير منتظمة ومحدودة بمثلث من أحد رؤوسها تعليقًا حُرًا فإن الخط الرأسى المار بنقطة التعليق يمر بنقطة تلاقى المستقيمات المتوسطة للمثلث. ( )

③ إذا وُضعت ثلاث كتل متساوية عند منتصفات أضلاع مثلث متساوى الأضلاع فإن مركز ثقلها يقع على نقطة تقاطع متوسطات المثلث. ( )

④ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس هذا المثلث. ( )

⑤ إذا وُضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس شبه منحرف متساوى الساقين فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقى قُطرية. ( )

⑥ إذا عُلقت صفيحة منتظمة السُمك والكثافة ومحدودة بمثلث متساوى الأضلاع من أحد رؤوسها تعليقًا حُرًا كان الضلع المقابل لهذا الرأس أفقيًا. ( )

⑦ إذا وضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس متوازى أضلاع فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقى قطرى متوازى الأضلاع. ( )

⑧ مركز ثقل سلك رفيع منتظم السُمك والكثافة على شكل مثلث يقع فى نقطة تقاطع متوسطات المثلث. ( )

---

٣ أوجد مركز ثقل النظام التالى :

$ك_١$ = ١ كجم عند الموضع $م_١$ (٢ ، ٣) ، $ك_٢$ = ٢ كجم عند الموضع $م_٢$ (−٢ ، ١)

، $ك_٣$ = ٣ كجم عند الموضع $م_٣$ (٠ ، ١)

«$\left(-\frac{١}{٣} ، \frac{٤}{٣}\right)$»

---

٤ أين يقع مركز ثقل نظام مؤلف من ثلاث كتل موزعة على النحو التالى :

$ك_١$ = ١ كجم عند الموضع $م_١$ (٠ ، ٠) ، $ك_٢$ = ١ كجم عند الموضع $م_٢$ (٣ ، ٠)

، $ك_٣$ = ٢ كجم عند الموضع $م_٣$ = (٣ ، ٤)

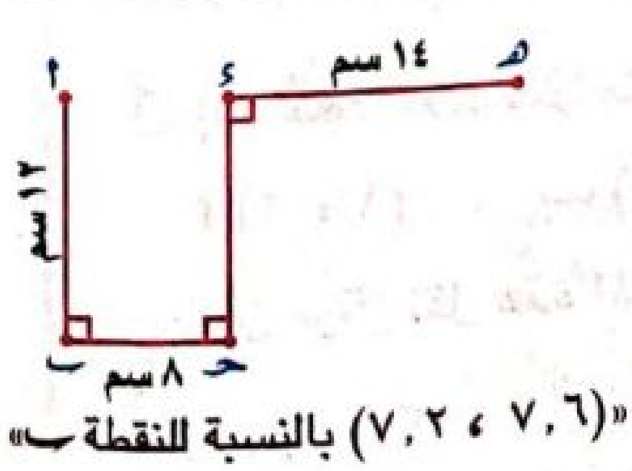
«$\left(\frac{٩}{٤} ، ٢\right)$»

---

٥ فى الشكل المقابل :

إذا ثُبتت خمس كتل متساوية مقدار كل منها ك عند النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ على الترتيب من الخط المنكسر أ ب حـ ء هـ الموضح بالشكل.

أوجد مركز ثقل المجموعة.

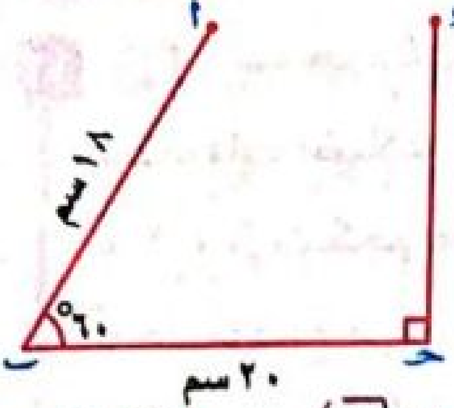


«(٧,٦ ، ٧,٢) بالنسبة للنقطة ب»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦ في الشكل المقابل :

ثُبتت أربع كتل مقاديرها ك ، ٢ك ، ٣ك ، ٤ك عند النقط أ ، ب ، ح ، ء من الخط المنكسر أ ب ح ء الموضح بالشكل. أوجد مركز ثقل المجموعة.



«(١٤٫٩ ، ٤٫٥ $\sqrt{٣}$) بالنسبة للنقطة ب»

---

٧ في الشكل المقابل :

عيّن مركز ثقل المجموعة حسب البيانات المعطاة في الجدول التالي :

الوزن	٨ ث.جم	٣ ث.جم	٢ ث.جم	٢ ث.جم
الموضع	عند أ	عند ح	عند هـ	عند و

«($\frac{١٣٠}{٣}$ ، -١٠) بالنسبة للنقطة أ»

---

٨ أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب فيه : أ ب = ٦ سم ، أ ح = ١٠ سم وضعت كتل مقاديرها ٥ك ، ٧ك ، ٨ك عند النقط أ ، ح ، ب على الترتيب.

عيّن مركز ثقل المجموعة. «(٢٫٨ ، ١٫٥) باعتبار $\overleftarrow{ب ح}$ ، $\overleftarrow{ب أ}$ محورى إحداثيات موجبين»

---

٩ أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، ب ح = ١٢ سم ، ح أ = ١٣ سم ، ء ، هـ منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ح}$ ، وضعت ثلاث كتل متساوية مقدار كل منها (ك) عند النقط ب ، ء ، هـ

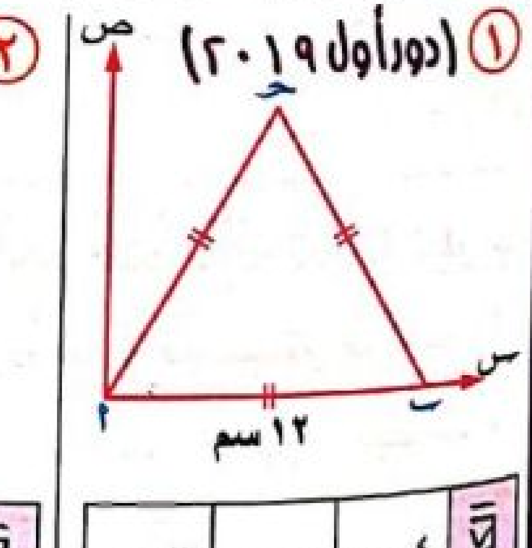
عيّن مركز ثقل المجموعة. وأوجد بُعده عن ب

«م = (٢ ، ١$\frac{٢}{٣}$) باعتبار $\overleftarrow{ب ح}$ ، $\overleftarrow{ب أ}$ محورى إحداثيات موجبين ، م ب = $\frac{\sqrt{٦١}}{٣}$ سم»

---

١٠ عيّن مركز ثقل كل من المجموعات الآتية حسب البيانات المعطاة في الجدول :

① (دور أول ٢٠١٩)

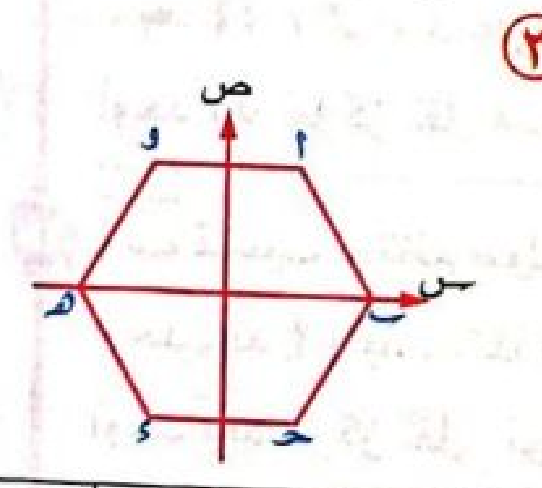


الكتلة	٤ جم	٥ جم	٣ جم
الموضع	عند أ	عند ب	عند ح

② (دور ثان ٢٠١٩)

الكتلة	٢٠ جم	٣٠ جم	١٠ جم	٤٠ جم
الموضع	عند أ	عند ب	عند ح	عند ء

③



الكتلة	١٠ جم	١٥ جم	٥ جم	٢٠ جم
الموضع	عند أ	عند ح	عند ء	عند و

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١١ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ٤ ديسيمترات ، النقط ء ، هـ ، و منتصفات أضلاعه $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ على الترتيب ، وضعت الأثقال ٥ ، ١ ، ٣ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ث.كجم عند النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و على الترتيب.

أوجد موضع مركز ثقل المجموعة من ب

«$\left(\frac{٤٤}{٢١} ، \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٢١}\right)$ باعتبار $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، العمودى عليه من ب محورى إحداثيات موجبين»

---

١٢ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٤ سم ثُبتت الكتل ٦ ، ٤ ، ٣ ، ٢ جرام عند أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب، كما ثُبتت كتلة مقدارها ١٠ جرام عند منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

عيِّن بُعد مركز ثقل المجموعة عن كل من $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{حـ ب}}$ «٣,٢ سم ، ٢,٠٨ سم»

---

١٣ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ثُبتت الكتل ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧ جم عند الرؤوس أ ، ء ، ب ، جـ على الترتيب كما ثُبتت الكتلة ١٢ جم عند منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

أوجد مركز ثقل المجموعة بالنسبة إلى $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ «(٥,٢ ، ٤,٨)»

---

١٤ ثُبتت الكتل ٦,٥ ، ٣,٥ ، ١,٥ ، ٨,٥ من الجرامات عند الرؤوس أ ، ب ، حـ ، ء من المعين أ ب حـ ء الذى فيه : أ حـ = ٢ ب ء = ١٦ سم.

أثبت أن مركز ثقل هذه الكتل يبعد $\sqrt{٥}$ سم عن مركز المعين.

---

١٥ ثُبتت الكتل ١ ، ٣ ، ٢ ، ٤ ، ١٥ ، ٥ جرام عند رؤوس السداسى المنتظم أ ب حـ ء هـ و على الترتيب. أثبت أن مركز ثقلها يقع على $\overline{\text{ب هـ}}$ وأوجد بُعده عن مركز السداسى. «$\frac{١}{٢}$ ل»

---

١٦ ثُبتت كتل مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ٣٠ ، ١٠ ، ٤٠ كجم عند الرؤوس أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و على الترتيب لمسدس منتظم طول ضلعه ٦٠ سم.

أوجد بُعد مركز ثقل هذه المجموعة على مركز المسدس. «$٥\sqrt{٣}$ سم»

---

١٧ $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب منتظم طوله ١٢ ديسيمتر وكتلته كيلو جرام واحد ثُبتت كتلة قدرها كيلو جرام واحد عند أ وثُبتت كتلة أخرى $١\frac{١}{٢}$ كجم عند نقطة حـ على بُعد ٤ ديسيمتر من ب

أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن أ

«$٥\frac{١}{٧}$ ديسيمتر من أ»

---

١٨ $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب منتظم ، وطوله ٩٠ سم وكتلته ٥ كجم ، حـ ، ء نقطتا تثليثه من ناحية الطرف أ وضعت كتل مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كجم عند النقط أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب عيِّن بُعد مركز ثقل المجموعة عن الطرف أ

«٤٩ سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

19. صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٢٠٠ جرام على هيئة المربع أ ب حـ ء الذى طول ضلعه ٢٠ سم. ثُبت الكتل ٨٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٤٠ من الجرامات عند أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب.
أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن كلٍ من $\overline{أب}$ ، $\overline{أء}$ «٩,٥ سم ، ٩ سم»

20. صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٤ كيلو جرام على شكل المستطيل أ ب حـ ء الذى فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم. ثُبتت الكتل ١٠ ، ٨ ، ٢ ، ٦ كجم عند أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب. أثبت أن مركز ثقل هذه المجموعة يبعد عن $\overline{حـ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ بمقدار ٤,٨ سم ، ٨ سم على الترتيب.

21. 📖 أ ب حـ صفيحة مثلثة الشكل متساوية الأضلاع كتلتها ٣ كجم ، م مركز ثقلها ، وضعت كتل مقاديرها ٢ ، ٢ ، ١١ كجم عند الرؤوس أ ، ب ، حـ على الترتيب. برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف $\overline{م حـ}$

22. أ ب حـ ء صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ١٦٠ جرام على شكل معين فيه : حـ أ = ٢٠ سم ، ب ء = ٦ سم ثُبتت الكتل ٢٠٠ ، ٥٢٠ ، ٤٤٠ ، ٢٨٠ جرام عند منتصفات الأضلاع $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ على الترتيب. أثبت أن مركز ثقل المجموعة يقع على $\overline{أ حـ}$ ويبعد ١,٥ سم عن مركز المعين.

23. صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٣ كجم على هيئة السداسى المنتظم أ ب حـ ء هـ و الذى طول ضلعه ١٥ سم ، ثُبتت الكتل ١ ، ٢ ، ٤ ، ٣ ، ٢ كجم عند أ ، ب ، حـ ، ء ، و على الترتيب. أثبت أن مركز ثقل المجموعة يبعد ٤ سم عن مركز السداسى.

24. أ ب حـ صفيحة مثلثة رقيقة منتظمة كتلتها ٤ كجم ثُبتت الكتل ٦ ، ٤ ، ١٢ ، ٢ كجم عند أ ، منتصف $\overline{أب}$ ، منتصف $\overline{ب حـ}$ ، حـ على الترتيب.
أثبت أن مركز ثقل المجموعة ينطبق على مركز ثقل المثلث.

25. أ ب حـ صفيحة مثلثة رقيقة منتظمة ثُبتت الأثقال ٦ ، ٨ ، ٤ ثقل جرام عند الرؤوس أ ، ب ، حـ على الترتيب. أثبت أن مركز ثقل هذه الأوزان يقع على المستقيم $\overline{م هـ}$ المرسوم من مركز المثلث (م) موازيًا $\overline{حـ ب}$ وملاقيًا $\overline{أب}$ فى هـ ويقسمه بنسبة ١ : ٢

26. أ ب حـ سلك رفيع منتظم الكثافة على شكل مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم. أوجد بُعد مركز ثقل السلك عن كلٍ من $\overline{ب أ}$ ، $\overline{ب حـ}$ «٣ سم ، ٢ سم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٧ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ سلك رفيع منتظم الكثافة ثني عند ب ، حـ

أوجد بُعد مركز الثقل عن كلٍ من $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ب}$

، ثم أوجد في وضع الاتزان قياس زاوية ميل $\overline{أب}$ على

الرأسي إذا عُلق السلك من أ تعليقًا حُرًا.

«(٤,٨ ، ٣) ، ٤ ٢٨°»

---

٢٨ سلك منتظم السُمك والكثافة طوله ١٢٠ سم وكتلته ٦٠٠ جرام ، ثنى على شكل مثلث أ ب حـ قائم الزاوية في ب حيث : أ ب = ٣٠ سم ، إذا ثُبتت كتلة ك جرام عند الرأس أ ، ثم عُلق السلك تعليقًا حُرًا من الرأس ب فاتزن عندما كانت $\overline{أحـ}$ أفقية فأوجد : ك

«٢٠٠ جرام»

---

٢٩ عُلقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها و تعليقًا حُرًا من الرأس أ وثُبت عند الرأس ب ثقل وزنه $\frac{١}{٤}$ و أثبت أن ظل زاوية ميل القطر $\overline{أحـ}$ على الرأسي في وضع الاتزان يساوي $\frac{١}{٥}$

---

٣٠ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة وعلى شكل متوازي الأضلاع أ ب حـ ء الذي فيه :

أ ب = ٦٠ سم ، ب حـ = ٣٠ سم ، ق (د ب حـ أ) = ٩٠° عيِّن نقطة مثل هـ على $\overline{حـ ء}$ بحيث إذا عُلقت منها الصفيحة أصبح $\overline{حـ ء}$ أفقيًا.

«حـ هـ = $٢٢\frac{١}{٢}$ سم»

---

٣١ صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمتوازي أضلاع أ ب حـ ء فيه :

أ ب = ٢٠ سم ، أ ء = ١٠ سم ، ق (د ب أ ء) = ٦٠° إذا عُلقت الصفيحة تعليقًا حُرًا من نقطة هـ ∈ $\overline{ءحـ}$ وكان $\overline{أب}$ أفقيًا. أوجد طول : هـ ء

«٧,٥ سم»

---

٣٢ سلك رفيع منتظم الكثافة يُكوِّن الأضلاع $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ من المربع أ ب حـ ء الذي طول ضلعه ٦ سم. أوجد بُعد مركز ثقل السلك عن كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ وإذا عُلق السلك من ب تعليقًا حُرًا. فأوجد في وضع التوازن قياس زاوية ميل $\overline{ب حـ}$ على الرأسي.

«٣ سم ، ٢ سم ، ٤١ ٣٣°»

---

٣٣ ثني قضيب منتظم أ ب حـ طوله ٢ ل من نقطة منتصفه ب ثم عُلق من الطرف أ تعليقًا حُرًا. فإذا علم أن $\overline{ب حـ}$ كان أفقيًا في وضع الاتزان.

أثبت أن : حتا (د أ ب حـ) = $\frac{١}{٣}$ ثم أوجد بُعد مركز ثقل القضيب بأكمله عن أ

«$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ل»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣٤ ثنى قضيب منتظم $\overline{أ حـ}$ طوله ١٥ ل من نقطة ب حيث : أ ب = ٥ ل بحيث : ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° وعُلق القضيب من الطرف أ تعليقًا حُرًا.
فاثبت أن : $\overline{ب حـ}$ يميل على الأفقى بزاوية θ حيث : ظا θ = $\frac{٤}{٥}$

٣٥ $\overline{أ ب}$ قضيب منتظم السُمك حيث : أ حـ = حـ ب وكان نصفه $\overline{أ حـ}$ مصنوع من مادة والنصف الآخر حـ ب من مادة أخرى وكان مركز ثقل القضيب على بُعد $\frac{٢}{٣}$ طوله من أ
أوجد النسبة بين وزنى نصفى القضيب.
«١ : ٥»

٣٦ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ قضيبان من مادة واحدة ، أ ب = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ل سم ومتصلان اتصالاً ثابتًا عند (ب) عُلق القضيبان من الطرف (أ) فاتزنا بحيث كان $\overline{ب حـ}$ أفقيًا. أثبت أنه فى هذه الحالة يكون ق (∠ أ ب حـ) = ٣٦° ٥٢َ

٣٧ الشكل المقابل يمثل إطارًا من الصلب الرفيع على هيئة شبه منحرف أ ب حـ ء فيه :
أ ء = ٤٠ سم ، حـ ء = ٦٠ سم ، ب حـ = ١٢٠ سم.
فإذا علم أن كثافة الصلب المصنوع منه الجزء $\overline{أ ء}$ تساوى ضعف كثافة الصلب المصنوع منه باقى الإطار.
عيِّن مركز ثقل الإطار علمًا بأن : ق (∠ حـ) = ق (∠ ء) = ٩٠°
«$\left(\frac{-٢٠٠}{٣} ، \frac{١٠٠}{٣}\right)$»

٣٨ عُلقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها ٥٠ ثقل جرام تعليقًا حُرًا من الرأس أ وثُبتت عند الرأس ب ثقل مقداره ١٠ ثقل جرام.
أوجد قياس زاوية ميل القطر $\overline{أ حـ}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.
«٩° ٢٨َ»

٣٩ صفيحة رقيقة منتظمة وزنها ٢٠٠ ثقل جرام على هيئة المربع أ ب حـ ء الذى طول ضلعه ٢٠ سم. وضعت الأثقال ٨٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٤٠ ثقل جرام عند أ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب.
أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن كل من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ء}$ وإذا عُلقت الصفيحة من أ تعليقًا حُرًا.
فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل $\overline{أ ء}$ على الرأسى.
«$٩\frac{١}{٢}$ ، ٩ ، ٤٣° ٢٧َ»

٤٠ صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٣٠ جرام على هيئة المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = أ حـ ، ب حـ يساوى طول ارتفاع المثلث يساوى ٦٠ سم ثُبتت الكتل ٣٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ جرام عند أ ، ب ، حـ ، منتصف $\overline{أ ب}$ على الترتيب. أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن حـ وإذا عُلقت المجموعة من ب تعليقًا حُرًا فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل $\overline{ب حـ}$ على الرأسى.
«٤٠ سم ، ٤٠° ٣٦َ»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٤١ صفيحة مستطيلة منتظمة أبحـء مقدار وزنها و١ ، فيها : أب = ٦٠ سم ، أء = ٢٠ سم تحمل ثقلاً عند الرأس ء عُلقت الصفيحة تعليقًا حُرًا من الرأس أ فاتزنت فى وضع يميل فيه الضلع أء على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥° أوجد مقدار الثقل المثبت عند ء «و١»

---

٤٢ سلك رفيع منتظم الكثافة على شكل شبه المنحرف أبحـء الذى فيه : أء = ٣بحـ = ٢٤ سم ، ءحـ = ١٢ سم ، ق(∠ أءحـ) = ق(∠ ءحـب) = ٩٠° أثبت أن مركز ثقل السلك يبعد عن كل من أء ، حـء بمقدار ٤,٥ سم ، ١٠ سم على الترتيب. وإذا عُلق السلك من حـ تعليقًا حُرًا فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل حـء على الرأسى. «٨َ ٥٣°»

---

٤٣ سلك منتظم السُمك والكثافة على هيئة شبه منحرف أبحـء متساوى الساقين فيه : أء // بحـ وأطوال أء ، ءحـ ، حـب هى ٣ ، ٥ ، ٩ سم على الترتيب. عيِّن مركز ثقل السلك. ثم إذا عُلق السلك من أ تعليقًا حُرًا فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل أء على الرأسى. «م = ($٤\frac{١}{٢}$ ، $١\frac{٥}{١١}$) باعتبار حـب والعمودى عليه محورى إحداثيات موجبين ، ٢٩َ ٥٩°»

---

٤٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جسيمان ماديان كتلتاهما ١٠ ، ك جم تؤثران عند نقطتى أ ، ب على الترتيب حيث : أب = ٥٠ سم فإذا كان مركز ثقل الجسيمين يؤثر فى نقطة حـ ∈ أب حيث : أحـ = ٢٠ سم فإن : ك = ... جم.

(أ) ٢٠ (ب) $\frac{٢٠}{٣}$ (جـ) ٤٠ (د) $\frac{٤٠}{٣}$

② سلك رفيع منتظم السُمك والكثافة ثنى على شكل مثلث أبحـ قائم الزاوية فى ب فيه : أب = ٣ سم ، بحـ = ٤ سم فإن بُعد مركز ثقل السلك عن كل من بأ ، بحـ هو ....

(أ) (١,٥ ، ١) (ب) (٢ ، ١,٥) (جـ) ($\frac{٨}{٧}$ ، $\frac{٩}{١٤}$) (د) ($\frac{١٢}{٧}$ ، $\frac{١١}{١٤}$)

③ الشكل المقابل يبين ثلاث كتل : ك ، ٤ك ، ٥ك فإن مركز ثقل المجموعة يقع عند النقطة ....

(أ) ($\frac{١٣}{١٠}$ ، $\frac{١٣}{٥}$) (ب) ($\frac{٩}{٥}$ ، $\frac{٢٧}{١٠}$) (جـ) ($\frac{١٧}{١٠}$ ، $\frac{٢٧}{١٠}$) (د) ($\frac{١٣}{٥}$ ، $\frac{١٣}{١٠}$)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ ثلاث كتل ٣ كجم ، ٢ كجم ، ك كجم وضعت عند النقاط (٦ ، ٤) ، (٣,٥ ، ٥) ، (١ ، ٢) على الترتيب فكان مركز ثقل المجموعة عند النقطة (٣ ، ص)

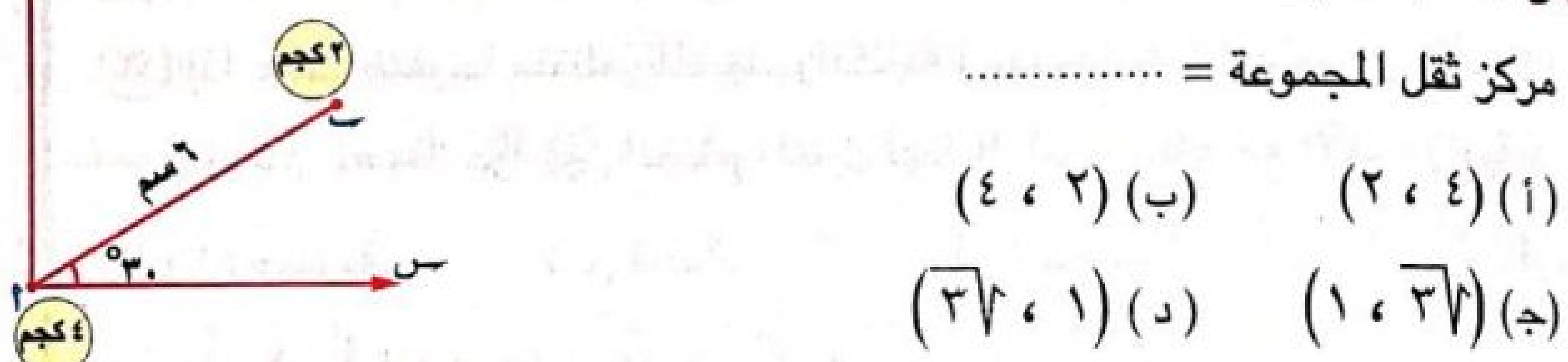
فإن : ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٣,٢ (جـ) ٣,٤ (د) -٣,٢

⑤ إذا وضعت الكتل ١ كجم عند الموضع أ (٢ ، ١) ، ٢ كجم عند الموضع ب (٣ ، ٢) ، ٣ كجم عند الموضع حـ (-٤ ، ٥) ، ٤ كجم عند الموضع (س ، ص) وكان مركز ثقل المجموعة هو نقطة الأصل فإن : (س ، ص) = ...

(أ) (١ ، ٥) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (١ ، -٥) (د) (٥ ، -١)

⑥ فى الشكل المقابل :



مركز ثقل المجموعة = ...

(أ) (٤ ، ٢) (ب) (٢ ، ٤)

(جـ) $(\sqrt{3}$ ، ١) (د) (١ ، $\sqrt{3})$

⑦ ٣ كتل متساوية موضوعة عند رؤوس مثلث قائم متساوى الساقين أ ب حـ قائم الزاوية عند أ ، ب حـ = ٨ سم إذا كان م هو مركز ثقل المجموعة

فإن : أ م = ... سم.

(أ) ٦ (ب) $\frac{٨}{٣}$ (جـ) ٤ (د) ٨

⑧ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث قائم الزاوية يقع عند نقطة تلاقى ....

(أ) ضلعى القائمة. (ب) منصفات زواياه.

(جـ) تلاقى الأعمدة. (د) متوسطاته.

⑨ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بدائرة معادلتها

س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٦ ص - ٣ = ٠ يقع فى النقطة ....

(أ) (-٤ ، ٦) (ب) (٤ ، -٦) (جـ) (٢ ، ٣) (د) (٢ ، -٣)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٠) في الشكل المقابل :

ساق من المعدن منتظم طوله ١ متر ووزنه ١ ث.كجم ومتصل بكرة حديدية منتظمة وزنها $\frac{١}{٢}$ ث.كجم عند الطرف أ حيث كان طول قطرها ٢٠ سم فإن بعد مركز ثقل المجموعة عن ب يساوى .... سم

(أ) ٥٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٦٥ (د) ٧٠

(١١) سلك منتظم السُمك والكثافة على شكل دائرة محيطها ٥٠ π سم وضعت داخل الدائرة صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مثلث أ ب جـ متساوى الأضلاع بحيث تقع رؤوسه على الدائرة فإذا كان طول ضلع المثلث يساوى ل سم فإن مركز ثقل المجموعة يبعد عن أ بمقدار .... سم

(أ) ل (ب) $\frac{ل}{٢} + ٢٥$ (جـ) $\frac{٢٥ - ٣ ل}{٣}$ (د) ٢٥

(١٢) إذا عُلقت صفيحة منتظمة السُمك والكثافة ومحدودة بمثلث متساوى الأضلاع من أحد رؤوسها تعليقًا حُرًا فإن الضلع المقابل لهذا الرأس يصنع مع الأفقى زاوية ....

(أ) صفرية. (ب) قائمة. (جـ) حادة. (د) منفرجة.

(١٣) (دور أول ٢٠١٨) في الشكل المقابل :

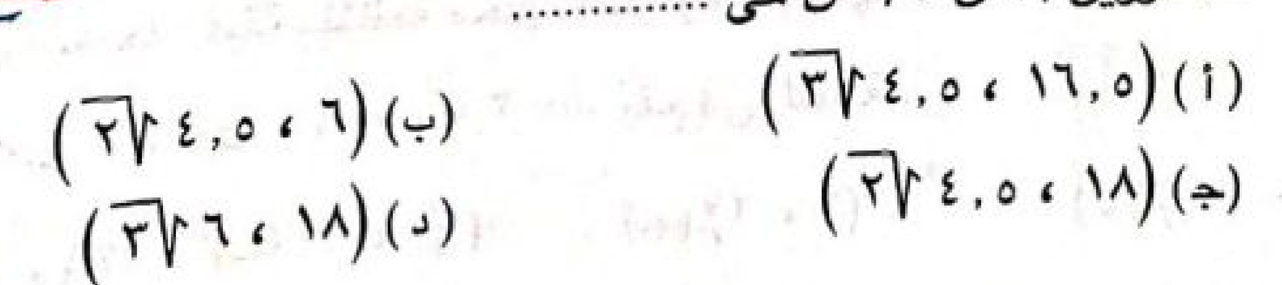
أ ب جـ ء سلك طوله ٣٢ سم فيه : أ ب = ٢ ب جـ = ٢ جـ ء = ١٦ سم فإن بُعد مركز ثقل السلك عن كلٍ من $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب أ}$ على الترتيب هو ....

(أ) (٣ ، ٣) (ب) (٤ ، ٤)

(جـ) (٣ ، ٥) (د) (٤ ، ٨)

(١٤) في الشكل المقابل :

صفيحة رقيقة كتلتها ٦٠٠ جم على شكل مثلث متساوى الأضلاع أ ب جـ طول ضلعه ٣٦ سم ، ألصقت كتلة ٢٠٠ جم في الصفيحة عند نقطة تثليث $\overline{أ ب}$ فإن مركز ثقل المجموعة بالنسبة للمحورين $\overleftarrow{أ س}$ ، $\overleftarrow{أ ص}$ هي ....



(أ) (١٦,٥ ، ٤,٥ $\sqrt{٣}$) (ب) (٦ ، ٤,٥ $\sqrt{٢}$)

(جـ) (١٨ ، ٤,٥ $\sqrt{٢}$) (د) (١٨ ، ٦ $\sqrt{٣}$)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑮ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٩ سم ، أ حـ = ١٢ سم

الكتل ٣ جم ، ك جم ، م جم وضع

عند النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب

فإذا كان مركز ثقل المجموعة (٣ ، ٤)

فإن : ٢ م + ٣ ك = ...

ص
م
حـ
١٢ سم
ك
٣
أ
٩ سم
ب
س

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٥ (د) ٢٣

⑯ بُعد مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم عن أحد رؤوس المثلث يساوى ....

(أ) $2\sqrt{3}$ سم (ب) $4\sqrt{3}$ سم (جـ) ٦ سم (د) $6\sqrt{3}$ سم

⑰ $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة طولها ١٥٠ سم وجسمان كتلتاهما ١ كجم ، ٣ كجم موضوعان على بُعد ١٥ سم ، ٥٠ سم من الطرف أ ومن الطرف ب على الترتيب المسافة التى يجب وضع كتلة ٢ كجم من الطرف أ بحيث يكون مركز ثقل المجموعة فى منتصف القطعة المستقيمة أ ب = ... سم

(أ) ٤٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٦٧,٥ (د) ٧٥

⑱ إذا عُلقت صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث أ ب حـ متساوى الأضلاع بخيط من نقطة على أحد أحرفها (وليكن $\overline{أحـ}$) تقسمه بنسبة ١ : ٢ من (جهة حـ) فإن زاوية ميل هذا الحرف على الرأسى تساوى ....

(أ) °٢٢,٥ (ب) °٣٠ (جـ) °٤٥ (د) °٦٠

⑲ مثلثان متساويًا الساقين أ ب حـ ، أ ب ء مشتركان فى القاعدة $\overline{أب}$ وفى جهتين مختلفتين منها وارتفاعيهما المناظران لهذه القاعدة هما ١٢ سم ، ٦ سم على الترتيب فإن مركز ثقل المجموعة يبعد عن $\overline{أب}$ مسافة .... سم.

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١ (جـ) ١,٥ (د) ٢

⑳ أى مما يأتى لا يكون مركز ثقله هو نفسه نقطة تقاطع متوسطاته ؟

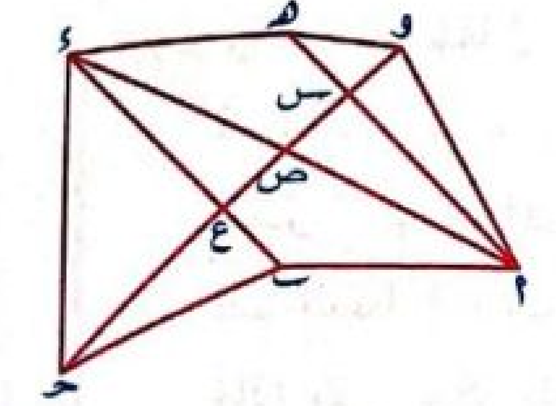
(أ) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مثلث متساوى الأضلاع.

(ب) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مثلث مختلف الأضلاع.

(جـ) سلك رفيع منتظم الكثافة على شكل مثلث متساوى الأضلاع.

(د) سلك رفيع منتظم الكثافة على شكل مثلث مختلف الأضلاع.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



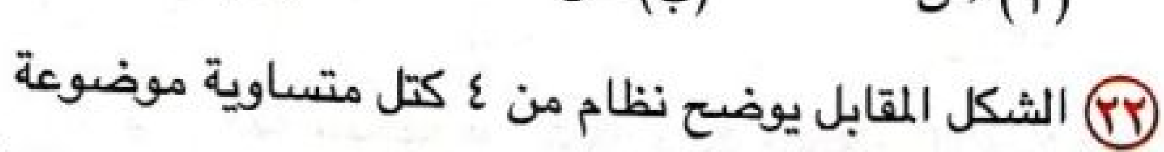
(٢١) في الشكل المقابل :

صفيحة معدنية أ ب حـ ء هـ و عُلِّقت من نقطة ب

فكان $\overline{\text{ب ء}}$ رأسيًا وعُلِّقت من نقطة حـ فكان $\overline{\text{حـ و}}$ رأسيًا

فإن مركز ثقل الصفيحة نقطة ....

(أ) س   (ب) ص   (جـ) ع   (د) منتصف $\overline{\text{أ ص}}$



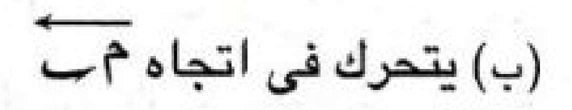
(٢٢) الشكل المقابل يوضح نظام من ٤ كتل متساوية موضوعة

عند رؤوس مربع إذا تحركت الكتلة عند ب في اتجاه $\overleftarrow{\text{ب م}}$

فإن مركز ثقل المجموعة ....



(أ) يظل ثابت عند م

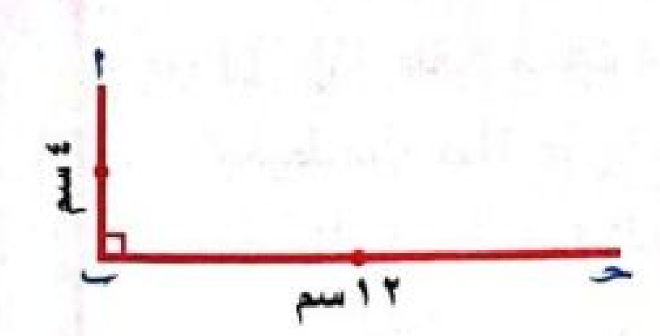


(ب) يتحرك في اتجاه $\overleftarrow{\text{م ب}}$



(جـ) يتحرك في اتجاه $\overleftarrow{\text{م ء}}$

(د) يتحرك في اتجاه $\overleftarrow{\text{م أ}}$



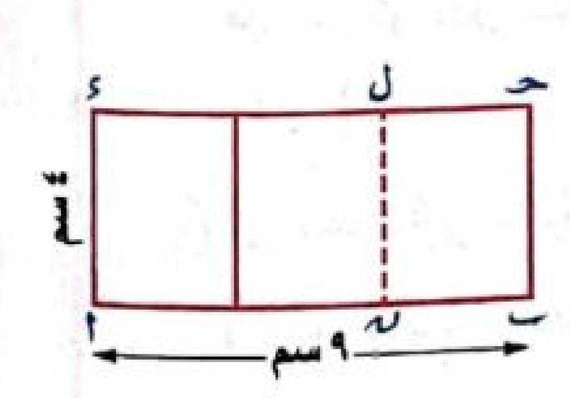
(٢٣) الشكل المقابل يمثل سلكًا منتظم الكثافة والسُمك

بحيث : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ١٢ سم

، زاوية ب قائمة ، إذا عُلق السلك تعليقًا حُرًا

من ب ، فما ظل الزاوية بين $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ والرأسي في حالة الاتزان ؟

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٣



(٢٤) الشكل المقابل يبين صفيحة مستطيلة رقيقة ومنتظمة

بُعداها ٩ سم ، ٤ سم ، قُسِّمت الصفيحة إلى ثلاث

مستطيلات متطابقة ، فإذا ثنيت الصفيحة عند $\overleftrightarrow{\text{ل ن}}$

حتى لامس سطح المنطقة ب حـ ل ن باقي الصفيحة

، فإن بُعد مركز الثقل عن $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ يساوي .... سم.

(أ) ٣   (ب) $٣\frac{١}{٢}$ (جـ) ٤   (د) ٤,٢

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

45 $\overline{أبحء}$ سلك رفيع منتظم الكثافة ثنى عند ب ، ح بحيث كان :

ق (∠ أ ب ح) = ق (∠ ب ح ء) = ٩٠° وكان $\overline{حء}$ ، $\overline{بأ}$ فى جهة واحدة من $\overline{بح}$

وكانت أطوال $\overline{أب}$ ، $\overline{بح}$ ، $\overline{حء}$ هى على الترتيب ١٢ ، ٨ ، ٤ سم.

أوجد بُعد مركز ثقل السلك عن كلٍ من $\overline{أب}$ ، $\overline{بح}$

وإذا عُلق السلك من أ تعليقًا حُرًا فأوجد فى وضع التوازن ظل زاوية ميل $\overline{أب}$ على الرأسى

ثم أوجد أين يقطع الخط الرأسى الجزء $\overline{بح}$

«$٢\frac{٢}{٣}$ سم ، $٣\frac{١}{٣}$ سم ، $\frac{٤}{١٣}$ ، على بُعد $٣\frac{٩}{١٣}$ سم من ب»

---

46 حل المسألة السابقة عندما يكون $\overline{حء}$ ، $\overline{بأ}$ فى جهتين مختلفتين من $\overline{بح}$

«$٢\frac{٢}{٣}$ سم ، $٢\frac{٢}{٣}$ سم ، $\frac{٢}{٧}$ ، على بُعد $٣\frac{٣}{٧}$ سم من ب»

---

47 📖 صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل أبحء فيه :

أب = ٦ سم ، بح = ١٠ سم ، هـ ∈ $\overline{أء}$ بحيث : أهـ = ٦ سم ، ثنى

المثلث أ ب هـ حول الضلع $\overline{بهـ}$ بحيث : يقع $\overline{أب}$ على $\overline{بح}$ تمامًا عيِّن موضع مركز

الصفيحة بعد ثنيها بالنسبة إلى $\overleftarrow{حب}$ ، $\overleftarrow{حء}$ «٢,٤ سم ، ٤,٤ سم»

---

48 صفيحة متجانسة تتكون من المربع أبحء والمثلث هـ ب ح المتساوى الساقين الذى طول كلٍ من ساقيه ١٠ سم والمرسوم فى الجهة الخارجة من المربع. فإذا علم أن طول ضلع المربع ١٢ سم فأوجد بُعد مركز ثقل الصفيحة كلها عن مركز المربع وإذا عُلقت الصفيحة من أ تعليقًا حُرًا.

فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل $\overline{أء}$ على الرأسى. «$٢\frac{١}{٦}$ سم ، ٢٤ ٤٢ ٥٣°»

---

49 📖 أبحء مربع طول ضلعه ل رسم على $\overline{بح}$ ، مثلث متساوى الساقين ب ح هـ بحيث يقع الرأس هـ خارج المربع. أوجد مركز ثقل الصفيحة منتظمة السُمك والكثافة المحدودة بالشكل الناتج علمًا بأن طول ضلع المربع يساوى ضعف طول ارتفاع المثلث.

«($\frac{١٩}{٣٠}$ل ، $\frac{١}{٢}$ل) باعتبار $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أء}$ محورى إحداثيات موجبين»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥٠ تتكون صفيحة منتظمة الكثافة من جزأين : مستطيل أ ب حـ ء فيه : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٦ سم ومثلث متساوى الساقين حـ هـ ء فيه : ء هـ = ١٠ سم والرأس هـ خارج المستطيل. عيِّن مركز ثقل الصفيحة. «$(\frac{١٥٢}{١٥}$ ، ٦) باعتبار ب حـ ، ب أ محورى إحداثيات موجبين»

---

٥١ صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع أ ب حـ ء طول ضلعه ل ، فيها هـ ، و منتصفا الضلعين أ ب ، أ ء على الترتيب. ثنى المثلث أ هـ و حول الضلع هـ و بحيث انطبقت أ على مركز المربع ى عيِّن مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد.

«($-\frac{١}{٤٨}$ ل ، $-\frac{١}{٤٨}$ ل) باعتبار ى هـ ، ى و محورى إحداثيات موجبين»

---

٥٢ صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ل إذا كان هـ ، و ، ن منتصفات الأضلاع أ ب ، أ ء ، ب حـ على الترتيب ثنى المثلث أ هـ و حول الضلع هـ و بحيث انطبقت أ على مركز المربع ى وثنى المثلث ب هـ ن على الضلع هـ ن بحيث انطبق الرأس ب على مركز المربع ى عيِّن مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد.

«($\frac{-١}{٢٤}$ ل ، ٠) باعتبار ى هـ ، ى و محورى إحداثيات موجبين»

---

٥٣ أ ب حـ ء صفيحة منتظمة السُمك والكثافة على شكل مستطيل فيه : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٦ سم ، هـ نقطة تقاطع قطرية أ حـ ، ب ء فصل المثلث أ هـ ء وثُبت فوق المثلث ب هـ حـ أوجد مركز ثقل الصفيحة فى هذه الحالة. وإذا عُلقت الصفيحة تعليقًا حُرًا من نقطة حـ ، فأوجد ظل زاوية ميل حـ ب على الرأسى. «(٠ ، −٢) باعتبار هـ نقطة الأصل ، هـ س ، هـ ص محورى إحداثيات موجبين حيث هـ س // ب حـ ، هـ ص // أ ب ، $\frac{١}{٢}$»

---

٥٤ صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على شكل مربع أ ب حـ ء طول ضلعه ٤٨ سم ، م نقطة تقاطع قطريه. قُطع المثلث حـ م ء ثم لصق على المثلث حـ م ب بحيث انطبق م ء على م ب . أوجد بُعد مركز ثقل الصفيحة عن كل من ب أ ، ب حـ «٢٠ سم ، ٢٠ سم»

---

٥٥ الشكل المقابل يمثل صفيحتين منتظمتى السُمك متصلتين معًا فى مستوى واحد وكتلة وحدة المساحات للمربع ب حـ ء هـ ضعف كتلة وحدة المساحات للمربع أ ب و ى عُلق الجسم المكوَّن منهما من نقطة أ تعليقًا حُرًا. برهن على أن أ ى يصنع مع الرأسى فى حالة التوازن زاوية ظلها $\frac{٩}{٥}$

ى و هـ ء أ ب حـ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥٦ أ ب حـ ء صفيحة رقيقة غير منتظمة على شكل مستطيل فيه :

أ ب = ٦ سم ، ب حـ = $٦\sqrt{٣}$ سم ، عُلقت الصفيحة تعليقًا حُرًا من الرأس (ء)

فوجد فى وضع التوازن أن $\overline{\text{ء ب}}$ رأسيًا ، وعندما عُلقت الصفيحة تعليقًا حُرًا من الرأس

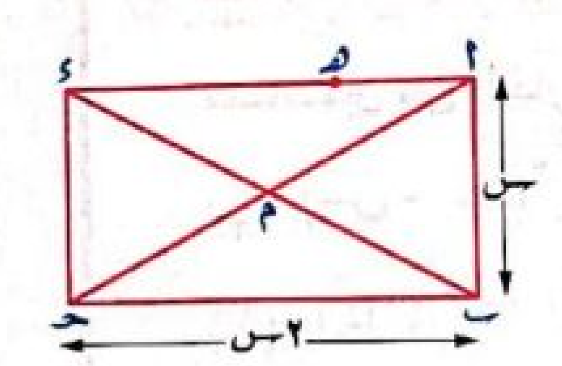
(أ) كان $\overline{\text{ء ب}}$ أفقيًا فى وضع التوازن.

عيِّن بعد مركز ثقل الصفيحة عن كلٍ من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ «$\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ سم ، $١\frac{١}{٢}$ سم»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٥٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى الشكل المقابل :



صفيحة مستطيلة طولها ضعف عرضها

علقت من نقطة هـ ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ تعليقًا حرًا

فاتزنت بحيث كان $\overline{\text{ب ء}}$ أفقيًا فإن : أ هـ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ س (ب) $\frac{١}{٤}$ س (جـ) $\frac{٣}{٨}$ س (د) $\frac{٣}{٤}$ س

② الشكل المقابل يمثل عجلة مهملة الكتلة طول نصف قطرها نق

يمكنها الدوران فى مستوى رأسى حول عمود أفقى أملس

، ثُبت عليها ثلاث كتل مقدارها ك ، ٢ ك ، م

فإذا اتزنت العجلة كما بالشكل ،

فإن قيمة م بدلالة ك هى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ ك (ب) ك (جـ) $\frac{٣}{٢}$ ك (د) ٢ ك

③ فى الشكل المقابل :

صفيحة على شكل ثلاثة مربعات متماثلة

وكان : ح ن = ن س = س و = $\frac{١}{٣}$ حـ و

إذا علقت الصفيحة من نقطة أ

فإن .... يكون رأسيًا.

(أ) $\overline{\text{أ ن}}$ (ب) $\overline{\text{أ و}}$ (جـ) $\overline{\text{أ ح}}$ (د) $\overline{\text{أ س}}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



④ فى الشكل المقابل :

نظام مكون من كتلتين ٢ كجم ، ٤ كجم عند أ ، ب

إذا تحركت الكتلة ٤ كجم فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ مسافة ٥ سم فلكى لا يتغير مركز ثقل المجموعة يجب أن تتحرك الكتلة ٢ كجم مسافة ....

(أ) ٢,٥ سم فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) ٢,٥ سم فى اتجاه $\overleftarrow{بأ}$

(جـ) ١٠ سم فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (د) ١٠ سم فى اتجاه $\overleftarrow{بأ}$

⑤ مجموعة مكونة من صفيحتين متساويتين السُمك والكثافة على شكل دائرتين متماستين من الخارج فإذا كانتا معادلتهما $د_١$: $س^٢ + ص^٢ - ٢ س = ٨$ ،

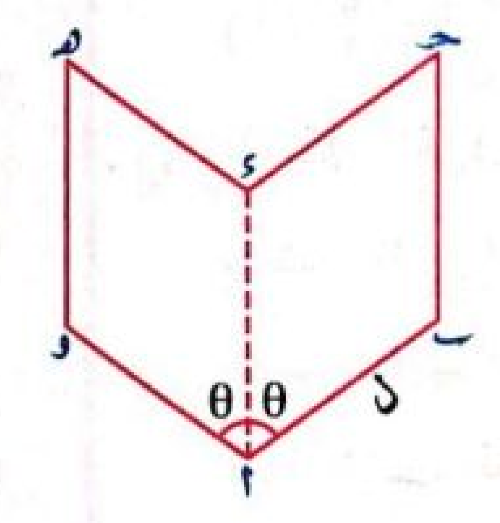


$د_٢$: $(س - ١٠)^٢ + ص^٢ = حـ$ فإن مركز ثقل المجموعة ....

(أ) داخل $د_١$ (ب) داخل $د_٢$

(جـ) فى نقطة التماس. (د) خارج الدائرتين.

⑥ فى الشكل المقابل :



صفيحة منتظمة الكثافة على شكل معينين مشتركان فى $\overline{أء}$

فإذا كان طول ضلع المعين = ل متر ، ق(∠ء أ ب) = θ

وكان مركز ثقل المجموعة فوق النقطة أ بمسافة (٠,٩ ل) متر

فإن : حتا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

٥٨ صفيحة غير منتظمة على شكل مثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠أ) = ٦٠° ، أ ب = ٣٠ سم عُلقت الصفيحة تعليقًا حُرًا من ب فوجد أن $\overline{أحـ}$ يكون أفقيًا فى وضع الاتزان ، ثم عُلقت تعليقًا حُرًا من أ فوجد أن $\overline{أحـ}$ فى وضع الاتزان يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° عيِّن بُعدى مركز ثقل الصفيحة عن كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$. ثم أوجد ظل زاوية ميل $\overline{أحـ}$ على الرأسى لو عُلقت الصفيحة من الرأس حـ

«$٥\sqrt{٣}$ سم ، ١٥ سم ، $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥٩ سلك منتظم السُمك والكثافة طوله ٧٢ سم قطع إلى جزأين ، صنع من الجزء الأول دائرة نصف قطرها ٧ سم ، وثنى الجزء الثانى من منتصفه ب على شكل زاوية قائمة أ ب حـ وثُبت الجزءان حيث $\overline{أب}$ يمس الدائرة فى ك ، $\overline{ب حـ}$ يمس الدائرة فى ل فإذا كان الجزءان فى مستوى واحد. أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{أب}$ $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

« $\frac{٢٠٣}{٣٦}$ ، $\frac{٢٠٣}{٣٦}$ »

---

٦٠ مثمن متساوى الأضلاع رؤوسه أ ، ب ، حـ ، ى ، أَ ، بَ ، حَ ، ىَ مأخوذ بالترتيب على دائرة مركزها م وطول نصف قطرها نق أثبت أن مركز ثقل ست كتل صغيرة متساوية موضوعة عند أ ، ب ، حـ ، ى ، أَ ، حَ يبعد عن م مسافة $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ نق

---

٦١ أ ب حـ ى صفيحة رقيقة مربعة منتظمة كتلتها ك جرام وطول ضلعها ٣٠ سم مركزها م ، نقطة هـ منتصف $\overline{أى}$ ، نقطة و منتصف $\overline{ى حـ}$ ثنى المثلث هـ و ى حتى انطبقت النقطتان ى ، م ثم عُلق الجسم الناتج من نقطة أ أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ على الرأسى فى وضع التوازن وفى أى موضع من الصفيحة (البعد عن كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$) يمكن أن نُثبت كتلته $\frac{١}{٢}$ك جرام حتى ينطبق مركز الثقل الجديد على مركز ثقل المربع. « $\frac{٢٣}{٢٥}$ ، $(\frac{٦٥}{٤} ، \frac{٦٥}{٤})$ »

---

٦٢ صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٦٠ جم على شكل شبه منحرف أ ب حـ ى وفيه :

ق (∠ب) = ق (∠حـ) = ٩٠° ، أب = ب حـ = ٣٩ سم ، حـ ى = ٢٦ سم.

عيِّن بُعد مركز ثقل الصفيحة عن $\overleftrightarrow{حـ ب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ى}$ وإذا وضعت الصفيحة فى مستوى رأسى بحيث انطبق حرفها $\overline{حـ ى}$ على نضد أفقى. فأوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من الرأسى أ دون أن تنقلب الصفيحة. « $(\frac{٢٤٧}{١٥} ، ٢٠,٨)$ ، ٤٤ ث.جم »

---

٦٣ صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة وزنها ٥ ث.كجم على هيئة مستطيل أ ب حـ ى فيه : أب = ٦ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، هـ ∈ $\overline{أى}$ حيث : أهـ = ٦ سم ثنى المثلث أ ب هـ حول $\overline{ب هـ}$ بحيث يقع $\overline{أب}$ على $\overline{ب حـ}$ ثم ثُبت الأوزان ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ث.كجم عند النقط ب ، حـ ، ى ، هـ على الترتيب وعُلقت الصفيحة من حـ أثبت أن $\overleftrightarrow{حـ ب}$ يصنع مع الرأسى فى وضع التوازن زاوية قياسها ى حيث : ٣١ ظا ى = ٣٣

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦٤ صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل شبه المنحرف أ ب حـ ء فيه :

$\overline{أء} // \overline{بحـ}$ ، ق(∠أ) = ٩٠° ، أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم

، أ ء = ٦ سم وكتلتها ٩٠ جرام ، انطبق قضيب رفيع منتظم كتلته ٢٥ جرام على $\overline{أب}$ تمام الانطباق. عيِّن بُعد مركز ثقل الجسم المكوَّن من الصفيحة والقضيب عن $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ وإذا عُلق الجسم تعليقًا حُرًا من ب برهن على أن $\overline{أب}$ يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥° فى وضع التوازن.

« $\frac{٨٤}{٢٣}$ ، $\frac{٨٤}{٢٣}$ »

---

٦٥ صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها (١٢ ك) جم على شكل مستطيل أ ب حـ ء مركزه م ، أ ء = ٢ أ ب ، هـ منتصف $\overline{أء}$ قطع Δ أ م هـ وثُبت لينطبق تمامًا على Δ ء م هـ وثُبت الكتل ٢٠ ، ٦٠ ، ٣٠ جم عند الرؤوس أ ، ب ، ء على الترتيب وعُلقت المجموعة تعليقًا حُرًا من حـ فكان $\overleftarrow{بحـ}$ يميل على الرأسى فى وضع التوازن بزاوية ظلها $\frac{١١}{٢٧}$

فأوجد قيمة : ك

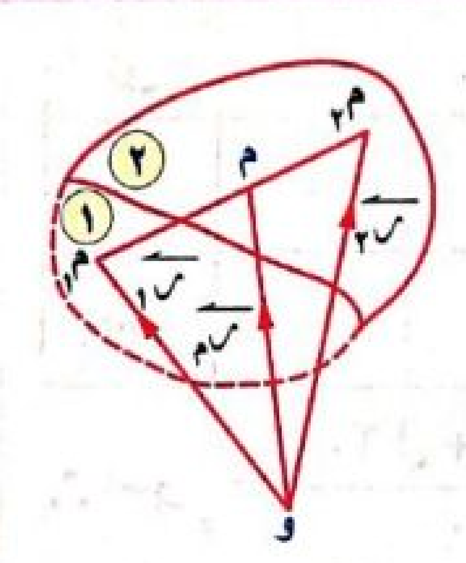
«١٠ جم»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الدرس **2**

طريقة الكتلة السالبة



نفرض أن لدينا جسمًا كتلته ك ومركز ثقله م واقتطعنا منه الجزء (١) الذى كتلته $ك_١$ ومركز ثقله $م_١$

والمطلوب إيجاد مركز ثقل الجزء المتبقى (٢) والذى كتلته $(ك - ك_١)$ ومركز ثقله $م_٢$

• نفرض أن $\overrightarrow{ر_١}$ ، $\overrightarrow{ر_٢}$ ، $\overrightarrow{ر_م}$ متجهات موضع $م_١$ ، $م_٢$ ، م على الترتيب بالنسبة لنقطة أصل (و) فيكون :

$$\overrightarrow{ر_م} = \frac{ك_١ \overrightarrow{ر_١} + (ك - ك_١) \overrightarrow{ر_٢}}{ك} \qquad \therefore ك \overrightarrow{ر_م} = ك_١ \overrightarrow{ر_١} + (ك - ك_١) \overrightarrow{ر_٢}$$

$$\therefore ك \overrightarrow{ر_م} - ك_١ \overrightarrow{ر_١} = (ك - ك_١) \overrightarrow{ر_٢} \qquad \therefore \overrightarrow{ر_٢} = \frac{ك \overrightarrow{ر_م} - ك_١ \overrightarrow{ر_١}}{ك - ك_١}$$

ويمكن أن تكتب هذه العلاقة بدلالة المركبات فى اتجاه محورى الإحداثيات المتعامدين $\overrightarrow{وس}$ ، $\overrightarrow{وص}$ كما يلى :

$$س_٢ = \frac{ك س - ك_١ س_١}{ك - ك_١} \quad ، \quad ص_٢ = \frac{ك ص - ك_١ ص_١}{ك - ك_١}$$

حيث (س ، ص) مركز ثقل الجسم الأصلى وكتلته = ك

، $(س_١ ، ص_١)$ مركز ثقل الجسم المقتطع وكتلته = $ك_١$

وهذه القاعدة تحدد لنا موضع $م_٢$ وهو مركز ثقل الجزء المتبقى كما لو كان هذا الجزء مكوّنًا من جسمين :

* الجسم الأصلى وكتلته (ك)
* الجزء المقتطع وتعتبر كتلته سالبة وتساوى $(- ك_١)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١

وضعت ٤ كتل متساوية مقدار كل منها ٢٠٠ جرام عند رؤوس المربع أ ب حـ ء ، عيِّن مركز ثقل المجموعة وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند الرأس حـ فعيِّن مركز ثقل المجموعة المتبقية باستخدام طريقة الكتلة السالبة.

الحـــل

نفرض أن هـ مركز المربع أ ب حـ ء وطول ضلع المربع = ل وأن أ هى نقطة الأصل ونرسم الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{أس}$ ، $\overleftarrow{أص}$ نكوِّن الجدول الآتى :

	عند أ	عند ب	عند حـ	عند ء
ك	٢٠٠	٢٠٠	٢٠٠	٢٠٠
س	٠	٠	ل	ل
ص	٠	ل	ل	٠

$$\therefore س_م = \frac{٢٠٠ ل + ٢٠٠ ل}{٨٠٠} = \frac{١}{٢} ل$$

$$، ص_م = \frac{٢٠٠ ل + ٢٠٠ ل}{٨٠٠} = \frac{١}{٢} ل$$

$\therefore$ مركز الثقل م للمجموعة = $\left(\frac{ل}{٢} ، \frac{ل}{٢}\right)$ أى عند هـ

لاحظ أن

$\because$ الكتل الموضوعة فى رؤوس المربع متساوية

$\therefore$ مركز الثقل هو نقطة تلاقى القطرين مباشرة.

وبعد رفع الكتلة ٢٠٠ جرام عند حـ :

نختار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{أس}$ ، $\overleftarrow{أص}$ فيكون هناك كتلة عند هـ = ٨٠٠

حيث : هـ = $\left(\frac{ل}{٢} ، \frac{ل}{٢}\right)$ ، كتلة عند حـ = − ٢٠٠ حيث : حـ = (ل ، ل)

	عند هـ	عند حـ
ك	٨٠٠	− ٢٠٠
س	$\frac{ل}{٢}$	ل
ص	$\frac{ل}{٢}$	ل

$$\therefore س_{م'} = \frac{٨٠٠ \times \frac{ل}{٢} - ٢٠٠ \times ل}{٨٠٠ - ٢٠٠} = \frac{١}{٣} ل \quad ، \quad ص_{م'} = \frac{٨٠٠ \times \frac{ل}{٢} - ٢٠٠ \times ل}{٨٠٠ - ٢٠٠} = \frac{١}{٣} ل$$

$\therefore$ م' = $\left(\frac{١}{٣} ل ، \frac{١}{٣} ل\right)$ بالنسبة للنقطة أ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٢

أ ب ح مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣٠ سم ، ء نقطة تقاطع متوسطاته ، هـ نقطة منتصف ب ح ، ثُبتت كتل مقاديرها ٢٠ ، ٤٠ ، ٣٠ ، ٦٠ ، ٥٠ جرام عند النقط أ ، ب ، ح ، ء ، هـ على الترتيب. عيِّن مركز ثقل هذه المجموعة. وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فأين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية بالنسبة للرأس ح

الحـل

أولًا : تعيين مركز ثقل المجموعة :

نختار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{ح س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح ص}}$ وذلك باعتبار ح نقطة الأصل

ومن هندسة الشكل نجد أن :

أهـ = ٣٠ جا ٦٠° = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم ، ءهـ = $\frac{١}{٣}$ × ١٥ $\sqrt{٣}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

ونكوِّن الجدول الآتى :

	عند أ	عند ب	عند ح	عند ء	عند هـ
ك	٢٠	٤٠	٣٠	٦٠	٥٠
س	١٥	٣٠	٠	١٥	١٥
ص	١٥ $\sqrt{٣}$	٠	٠	٥ $\sqrt{٣}$	٠

$$\therefore س_م = \frac{٢٠ \times ١٥ + ٤٠ \times ٣٠ + ٦٠ \times ١٥ + ٥٠ \times ١٥}{٢٠ + ٤٠ + ٣٠ + ٦٠ + ٥٠} = ١٥\frac{٣}{٤}$$

$$، ص_م = \frac{٢٠ \times ١٥\sqrt{٣} + ٦٠ \times ٥\sqrt{٣}}{٢٠ + ٤٠ + ٣٠ + ٦٠ + ٥٠} = ٣\sqrt{٣}$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو النقطة م = $\left(١٥\frac{٣}{٤} ، ٣\sqrt{٣}\right)$

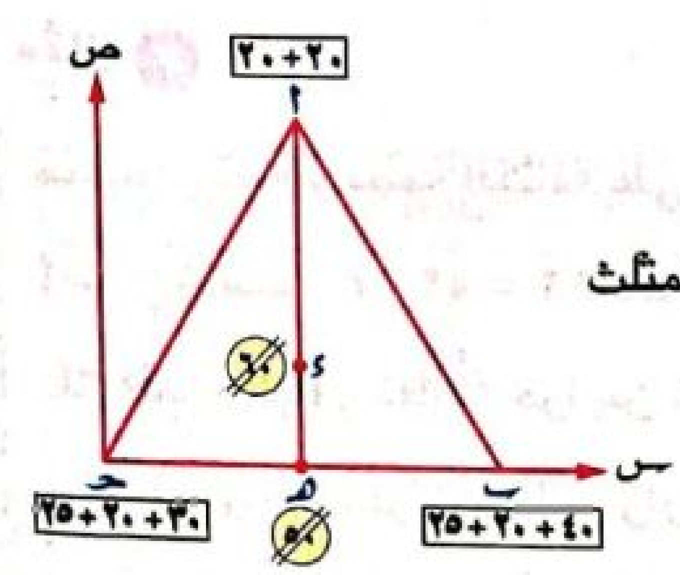
حل آخر :

∵ ء هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب ح

∴ يمكن أن نستعيض عن الكتلة عند ء وهى ٦٠ جم بثلاث كتل متساوية مقدار كل منها ٢٠ جم مُثبتة عند رؤوس المثلث

وكذلك نستعيض عن الكتلة ٥٠ جم المُثبتة عند هـ بكتلتين مقدار كل منهما ٢٥ جم مُثبتة عند ب ، ح

وبذلك تكون القوى عند أ ، ب ، ح كما بالشكل المقابل



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

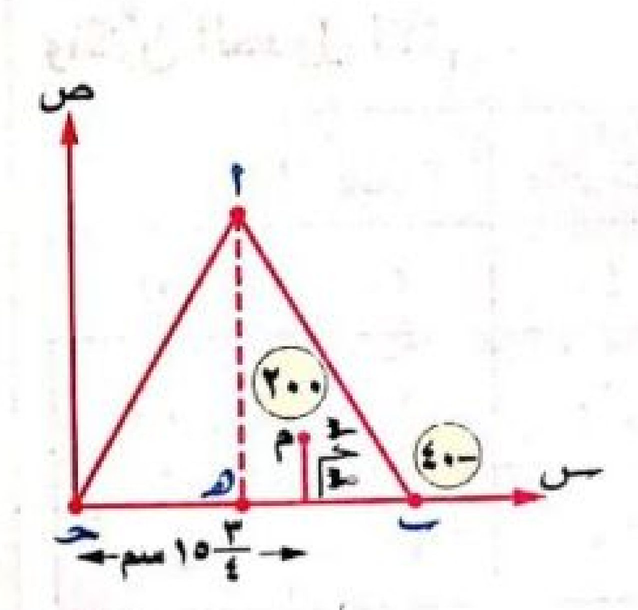
	أ	ب	حـ
ك	٤٠	٨٥	٧٥
س	١٥	٣٠	٠
ص	$١٥\sqrt{٣}$	٠	٠

$$\therefore س_م = \frac{٤٠ \times ١٥ + ٨٥ \times ٣٠ + ٧٥ \times ٠}{٤٠ + ٨٥ + ٧٥} = ١٥\frac{٣}{٤}$$

$$، ص_م = \frac{٤٠ \times ١٥\sqrt{٣} + ٨٥ \times ٠ + ٧٥ \times ٠}{٤٠ + ٨٥ + ٧٥} = ٣\sqrt{٣}$$

$\therefore$ مركز الثقل م $= \left(١٥\frac{٣}{٤} ، ٣\sqrt{٣}\right)$

ثانيًا : بعد رفع الكتلة ٤٠ جرام عند ب :



	عند م	عند ب
ك	٢٠٠	٤٠ −
س	$١٥\frac{٣}{٤}$	٣٠
ص	$٣\sqrt{٣}$	٠

$$\therefore س_{مَ} = \frac{٢٠٠ \times ١٥\frac{٣}{٤} - ٤٠ \times ٣٠}{٢٠٠ - ٤٠} = ١٢\frac{٣}{١٦} \quad ، \quad ص_{مَ} = \frac{٢٠٠ \times ٣\sqrt{٣}}{١٦٠}$$

$$\therefore ص_{مَ} = \frac{١٥\sqrt{٣}}{٤}$$

$\therefore$ مركز ثقل المجموعة بعد رفع الكتلة ٤٠ جرام عند ب هو مَ $= \left(١٢\frac{٣}{١٦} ، \frac{١٥\sqrt{٣}}{٤}\right)$

مثال ٣

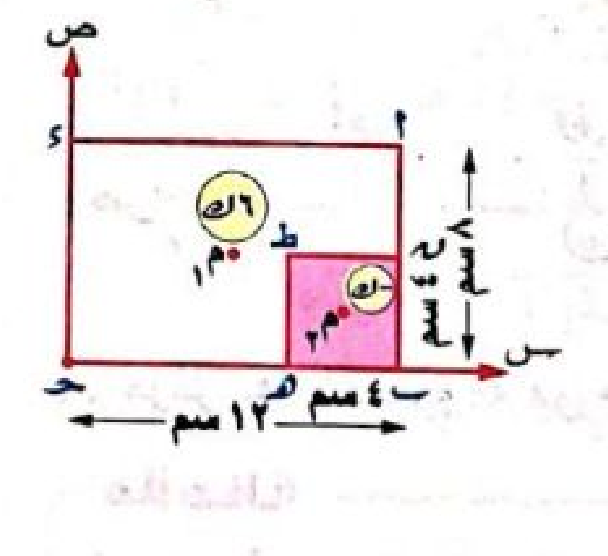
صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على هيئة المستطيل أ ب حـ ء فيه :

أ ب = ٨ سم ، أ ء = ١٢ سم فصل منه المربع ب ل ط هـ الذى طول ضلعه ٤ سم ثم علق الجزء الباقى تعليقًا حرًا من نقطة ع $\in \overline{أء}$ حيث : ء ع = ١,٦ سم.

أوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل $\overline{أء}$ على الرأسى.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـل



$\frac{\text{مساحة المربع ب ن ط هـ}}{\text{مساحة المستطيل أ ب حـ ء}} = \frac{4 \times 4}{12 \times 8} = \frac{1}{6}$

∵ المساحات تتناسب مع الكتل

∴ كتلة المستطيل = ٦ ك عند م١ = (٦ ، ٤)

، كتلة المربع المقطوع = − ك عند م٢ = (١٠ ، ٢)

وباختيار حـ نقطة أصل ، $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$

محورين متعامدين : ∴ $\text{س}_\text{م} = \frac{6\text{ك} \times 6 - \text{ك} \times 10}{6\text{ك} - \text{ك}} = 5.2$

، $\text{ص}_\text{م} = \frac{6\text{ك} \times 4 - \text{ك} \times 2}{6\text{ك} - \text{ك}} = 4.4$

∴ مركز ثقل المجموعة هو م = (٥,٢ ، ٤,٤)

ثم نرسم $\overleftrightarrow{\text{ع م}}$ فيكون هو الخط الرأسى ونرسم $\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{ء أ}}$

فى Δ ع و م يكون $\text{طا ل} = \frac{\text{م و}}{\text{ع و}}$

ولكن م و = ٨ − ٤,٤ = ٣,٦ سم

، ع و = ٥,٢ − ١,٦ = ٣,٦ سم

∴ $\text{طا ل} = \frac{3.6}{3.6} = 1$ ∴ ل = ٤٥°

الخط الرأسى المار بنقطة التعليق



حل آخر :

∵ كتلة المربع المقطوع = ك

∴ نستبدل بالمربع المتقطع أربع كتل مقدار كل منها

$-\frac{\text{ك}}{4}$ موضوعة عند الرؤوس ب ، ن ، ط ، هـ

ونختار محورى إحداثيات $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$



كما بالشكل ونكوّن جدول الكتل وإحداثياتها كما يلى :

	عند ن	عند ب	عند هـ	عند ط	عند ر
الكتلة	$-\frac{\text{ك}}{4}$	$-\frac{\text{ك}}{4}$	$-\frac{\text{ك}}{4}$	$-\frac{\text{ك}}{4}$	٦ك
س	١٢	١٢	٨	٨	٦
ص	٤	٠	٠	٤	٤

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\therefore \text{سَ}_{\text{م}} = \frac{-\frac{\text{ك}}{٤}\times ١٢ - \frac{\text{ك}}{٤}\times ١٢ - \frac{\text{ك}}{٤}\times ٨ - \frac{\text{ك}}{٤}\times ٨ + ٦\text{ك}\times ٦}{-\frac{\text{ك}}{٤} - \frac{\text{ك}}{٤} - \frac{\text{ك}}{٤} - \frac{\text{ك}}{٤} + ٦\text{ك}} = ٥,٢$$

$$\text{، ص}_{\text{م}} = \frac{-\frac{\text{ك}}{٤}\times ٤ - \frac{\text{ك}}{٤}\times ٠ - \frac{\text{ك}}{٤}\times ٠ - \frac{\text{ك}}{٤}\times ٤ + ٦\text{ك}\times ٤}{-\frac{\text{ك}}{٤} - \frac{\text{ك}}{٤} - \frac{\text{ك}}{٤} - \frac{\text{ك}}{٤} + ٦\text{ك}} = ٤,٤$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو م = (٥,٢ ، ٤,٤) ثم يكمل الحل.

ملاحظة

لحساب بُعد مركز ثقل Δ أ ب حـ عن المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل ل}}$

نحسب أولًا أبعاد الرؤوس أ ، ب ، حـ عن $\overleftrightarrow{\text{ل ل}}$

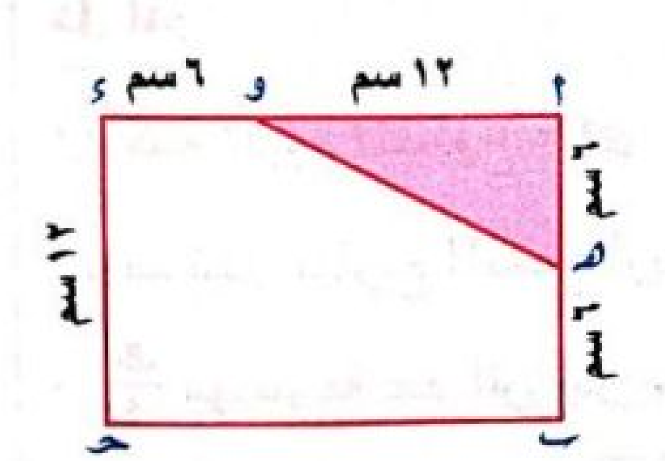
فإذا كان : * بُعد الرأس أ عن $\overleftrightarrow{\text{ل ل}}$ هو $\text{م}_١$ * بُعد الرأس ب عن $\overleftrightarrow{\text{ل ل}}$ هو $\text{م}_٢$

* بُعد الرأس حـ عن $\overleftrightarrow{\text{ل ل}}$ هو $\text{م}_٣$

∴ يكون بُعد مركز ثقل Δ أ ب حـ عن $\overleftrightarrow{\text{ل ل}}$ هو $\frac{\text{م}_١ + \text{م}_٢ + \text{م}_٣}{٣}$

فمثلًا : فى الشكل المقابل :

(١) حساب بُعد مركز ثقل Δ أ هـ و عن $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$:



نحسب أبعاد الرؤوس أ ، هـ ، و عن $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

فمن الرسم نجد أن :

أ تبعد ١٨ سم ، هـ تبعد ١٨ سم ، و تبعد ٦ سم

∴ بُعد مركز ثقل Δ أ هـ و عن $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} = \frac{١٨ + ١٨ + ٦}{٣} = ١٤$ سم.

(٢) حساب بُعد مركز ثقل Δ أ هـ و عن $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$:

نحسب أبعاد الرؤوس أ ، هـ ، و عن $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ فمن الرسم نجد أن :

أ تبعد ١٢ سم ، هـ تبعد ٦ سم ، و تبعد ١٢ سم

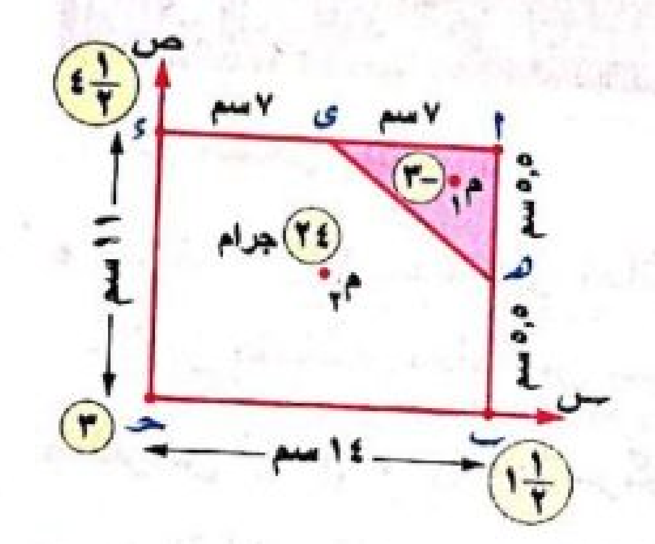
∴ بُعد مركز ثقل Δ أ هـ و عن $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}} = \frac{١٢ + ٦ + ١٢}{٣} = ١٠$ سم.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٢

أ ب حـ ء صفيحة منتظمة على هيئة مستطيل كتلته ٢٤ جرامًا فيه :
أ ب = ١١ سم ، ب حـ = ١٤ سم ، هـ ، ى منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ء}$ على الترتيب. فإذا قطع المثلث أ هـ ى من الصفيحة وثُبتت الكتل $١\frac{١}{٢}$ ، ٣ ، $٤\frac{١}{٢}$ جرام عند النقط ب ، حـ ، ء على الترتيب. فعيِّن مركز ثقل المجموعة. ثم إذا عُلقت المجموعة تعليقًا حُرًا من حـ فاثبت فى وضع الاتزان أن الضلع $\overline{حـ ب}$ يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥°

الحــل



$$\because \frac{\text{كتلة } \Delta \text{ هـ أ ى}}{\text{كتلة المستطيل أ ب حـ ء}} = \frac{\text{مساحة } \Delta \text{ هـ أ ى}}{\text{مساحة المستطيل أ ب حـ ء}}$$

$$\therefore \frac{\text{كتلة } \Delta \text{ هـ أ ى}}{٢٤} = \frac{\frac{١}{٢} \times ٥,٥ \times ٧}{١١ \times ١٤}$$

$$\therefore \text{كتلة } \Delta \text{ هـ أ ى} = \frac{\frac{١}{٢} \times ٥,٥ \times ٧}{١١ \times ١٤} \times ٢٤ = ٣ \text{ جم}$$

وتؤثر هذه الكتلة عند مركز ثقل Δ أ هـ ى أى عند $م_١$

فإذا اخترنا $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$ محورين متعامدين كان بُعد مركز ثقل

$$\Delta \text{ هـ أ ى عن } \overleftrightarrow{حـ ء} = \frac{١٤ + ١٤ + ٧}{٣} = \frac{٣٥}{٣} \text{ سم}$$

$$\text{، بُعد مركز ثقل } \Delta \text{ هـ أ ى عن } \overleftrightarrow{حـ ب} = \frac{٥,٥ + ١١ + ١١}{٣} = \frac{٢٧,٥}{٣} \text{ سم}$$

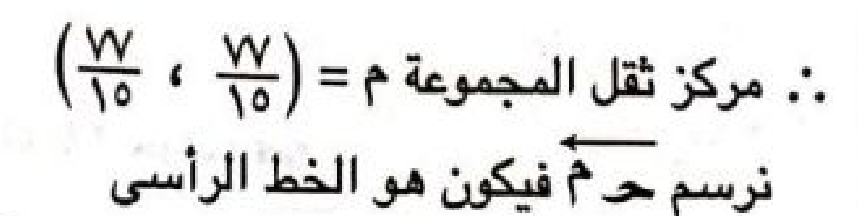
ثم نكوِّن جدول الكتل وإحداثياتها الآتى :

	عند $م_١$	عند ب	عند حـ	عند ء	عند $م_٢$
ك	-٣	$١\frac{١}{٢}$	٣	$٤\frac{١}{٢}$	٢٤
س	$\frac{٣٥}{٣}$	١٤	٠	٠	٧
ص	$\frac{٢٧,٥}{٣}$	٠	٠	١١	$٥\frac{١}{٢}$

$$\therefore س_م = \frac{-٣ \times \frac{٣٥}{٣} + \frac{٣}{٢} \times ١٤ + ٢٤ \times ٧}{-٣ + ١\frac{١}{٢} + ٣ + ٤\frac{١}{٢} + ٢٤} = \frac{٧٧}{١٥}$$

$$\text{،} ص_م = \frac{-٣ \times \frac{٢٧,٥}{٣} + ٤\frac{١}{٢} \times ١١ + ٢٤ \times ٥\frac{١}{٢}}{-٣ + ١\frac{١}{٢} + ٣ + ٤\frac{١}{٢} + ٢٤} = \frac{٧٧}{١٥}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

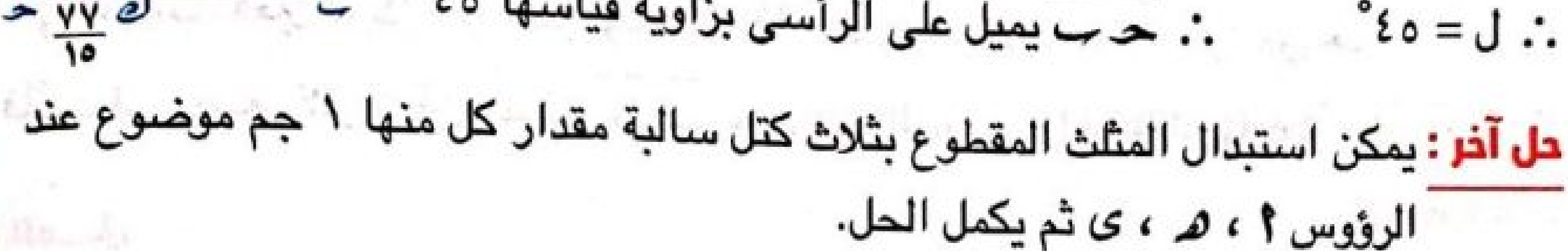


∴ مركز ثقل المجموعة م = $\left(\frac{٧٧}{١٥} ، \frac{٧٧}{١٥}\right)$

نرسم $\overleftarrow{حـ م}$ فيكون هو الخط الرأسى

∴ فى Δ م ك حـ يكون : ظا ل = $\frac{م ك}{ك حـ} = \frac{ص_م}{س_م} = ١$

∴ ل = ٤٥° ∴ $\overline{حـ ب}$ يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥°



حل آخر : يمكن استبدال المثلث المقطوع بثلاث كتل سالبة مقدار كل منها ١ جم موضوع عند الرؤوس ٢ ، هـ ، ى ثم يكمل الحل.

مركز ثقل بعض الأجسام التى لها خصائص تماثل

(١) فى الشكل المقابل :

- نفرض أن $\overleftrightarrow{٢ ب}$ محور تماثل للصفحة المنتظمة ويقسمها إلى جزأين متماثلين تمامًا من حيث الشكل وبالتالى من حيث الكتلة.
- نفرض أن $م_١$ ، $م_٢$ هما مركزا ثقل الجزأين.
- من الواضح أن محور التماثل يقطع $\overline{م_١ م_٢}$ على التعامد من منتصفها لأن مركز ثقل كتلتين متساويتين موضوعتين عند $م_١$ ، $م_٢$ يكون عند نقطة منتصف $\overline{م_١ م_٢}$
- مركز ثقل الصفيحة (م) هو نفسه مركز ثقل الكتلتين المتساويتين السابقتين

∴ م ∈ محور التماثل

أى أن

إذا وجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة وقع مركز ثقلها على خط المحور.

(٢) فى الشكل المقابل :

- نفرض أن المستوى س هو مستوى تماثل للمجسم المنتظم ويقسمها إلى جزأين متماثلين تمامًا.
- نفرض أن : $م_١$ ، $م_٢$ هما مركزا ثقل الجزأين.
- مستوى التماثل س يقطع $\overline{م_١ م_٢}$ فى نقطة م عند منتصف $\overline{م_١ م_٢}$ وبالتالى م ∈ المستوى س

أى أن

إذا وجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة وقع مركز ثقله فى هذا المستوى.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حالات خاصة لمركز الثقل

(١) مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع فى مركز الدائرة.

(٢) مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة على شكل دائرة يقع فى مركز الدائرة.

(٣) مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.

(٤) مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.

(٥) مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى المستطيلات يقع فى مركزه الهندسى.

(٦) مركز ثقل قشرة أسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزى قاعدتيها.

(٧) مركز ثقل أسطوانة دائرية قائمة مصمتة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزى قاعدتيها.

(٨) مركز ثقل منشور قائم منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة الموازية لأحرفه الجانبية والمارة بمركزى ثقل قاعدتيه باعتبارهما صفيحتين رقيقتين منتظمتى الكثافة.

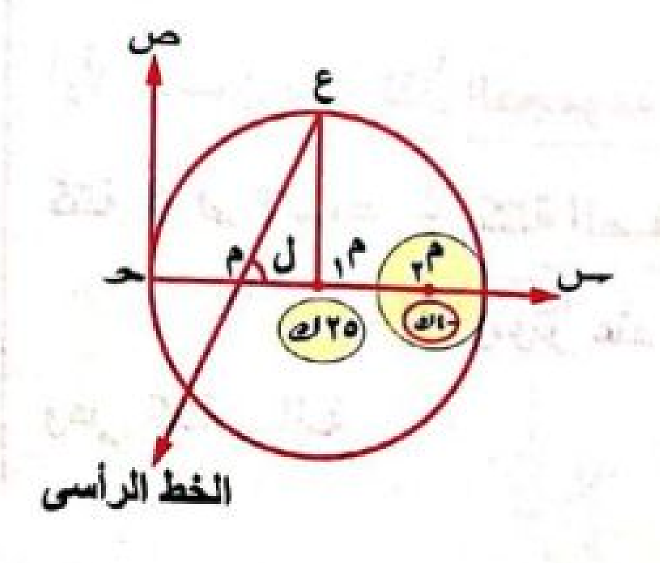
مثال ⑤

صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل قرص دائرى طول نصف قطره ١٠ سم اقتطع منها جزء على شكل قرص دائرى يمس حافة القرص الأصلى وطول نصف قطره ٤ سم

عيِّن موضع مركز ثقل الجزء الباقى.

ثم إذا عُلق هذا الجزء الباقى تعليقًا خالصًا من إحدى نهايتى قطر القرص العمودى على خط المركزين فأوجد فى وضع التوازن ظل زاوية ميل خط المركزين على الرأسى.

الحـــل



أولًا : تعيين مركز ثقل الجزء الباقى :

$$\frac{\text{كتلة القرص الأصلى}}{\text{كتلة القرص المقطوع}} = \frac{\pi (10)^2}{\pi (4)^2} = \frac{25}{4}$$

∴ كتلة القرص الأصلى = ٢٥ ك ويؤثر عند $م_1$

، كتلة القرص المقطوع = ٤ ك ويؤثر عند $م_2$

• واضح أن $\overleftrightarrow{م_1 م_2}$ هو محور تماثل للشكل

∴ مركز ثقل الجزء الباقى يقع على $\overleftrightarrow{م_1 م_2}$ لذلك نختار $\overleftrightarrow{حـ س}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ص}$ محورين متعامدين

ونكوِّن الجدول الآتى :

الكتلة	٢٥ ك	−٤ ك
س	١٠	١٦

∴ $س_م = \frac{٢٥ ك \times ١٠ - ٤ ك \times ١٦}{٢٥ ك - ٤ ك}$ ∴ $س_م = \frac{٢٥٠ - ٦٤}{٢١} = ٨\frac{٦}{٧}$

∴ م مركز ثقل الجزء الباقى يقع على بُعد $١٠ - ٨\frac{٦}{٧} = ١\frac{١}{٧}$ سم

من مركز ثقل القرص الأصلى ($م_1$)

ثانيًا : عند التعليق من ع :

نصل $\overleftrightarrow{ع م}$ فيكون هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق ع

∴ فى Δ ع م $م_1$ يكون ظا ل = $\frac{ع م_1}{م م_1}$ ولكن ع $م_1$ = ١٠ سم

، م $م_1$ = $١\frac{١}{٧} = \frac{٨}{٧}$ سم ∴ ظا ل = $\frac{١٠ \times ٧}{٨} = \frac{٣٥}{٤}$

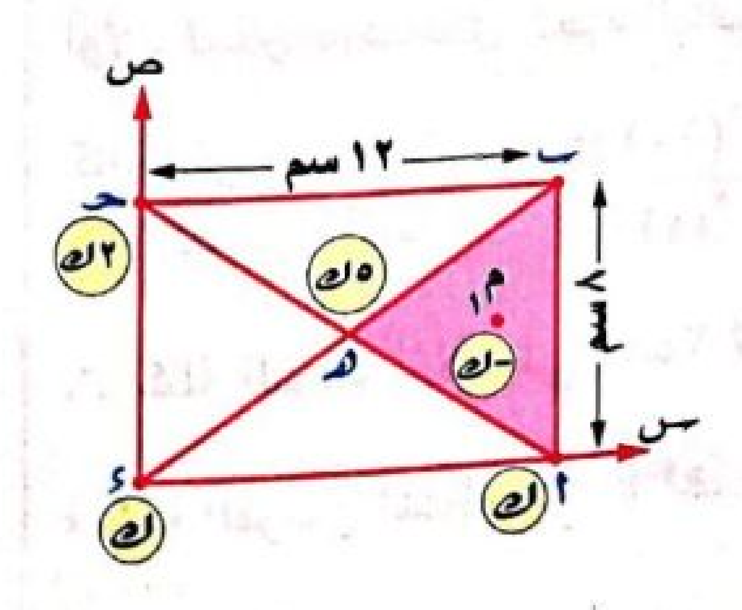
مثال ٦

صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة كتلتها (٤ ك) على هيئة المستطيل أ ب حـ ء الذى فيه :

أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، وصل قطراه فتقاطعا فى هـ ثم فصل Δ أ ب هـ وثُبتت الكتل ك ، ٢ ك ، ك ، ك عند الرؤوس أ ، حـ ، ء ، هـ على الترتيب. عيِّن موضع مركز ثقل المجموعة وإذا عُلقت هذه المجموعة من ء تعليقًا حُرًا فأثبت فى وضع التوازن أن الخط الرأسى المار بنقطة التعليق ينصف ∠ أ ء حـ

الحـــل

أولًا : تعيين مركز ثقل المجموعة :



كتلة Δ هـ أ ب = $\frac{١}{٤}$ كتلة الصفيحة المستطيلة

= ك وتؤثر عند $م_1$

وهى كتلة سالبة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثم نُعلق الكتل عند الرؤوس أ ، حـ ، ء ، هـ ونختار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{ءس}$ ، $\overleftarrow{ءص}$

∴ نقطة تلاقى متوسطات Δ ب أ هـ = $\left(\frac{١٢ + ١٢ + ٦}{٣} ، \frac{٨ + ٤ + ٠}{٣}\right)$ = (١٠ ، ٤)

وننشئ جدول إحداثيات الكتل كالآتى :

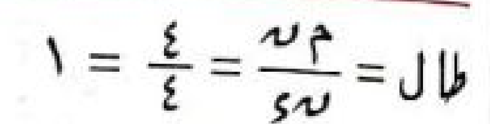
	عند $م_١$	عند هـ	عند أ	عند ء	عند حـ
الكتلة	- ك	٥ ك	ك	ك	٢ ك
س	١٠	٦	١٢	٠	٠
ص	٤	٤	٠	٠	٨

∴ $س_م = \frac{-ك \times ١٠ + ٥ك \times ٦ + ك \times ١٢}{٨ ك} = ٤$

، $ص_م = \frac{-ك \times ٤ + ٥ك \times ٤ + ٢ك \times ٨}{٨ ك} = ٤$

∴ مركز ثقل المجموعة م = (٤ ، ٤) **(المطلوب أولاً)**

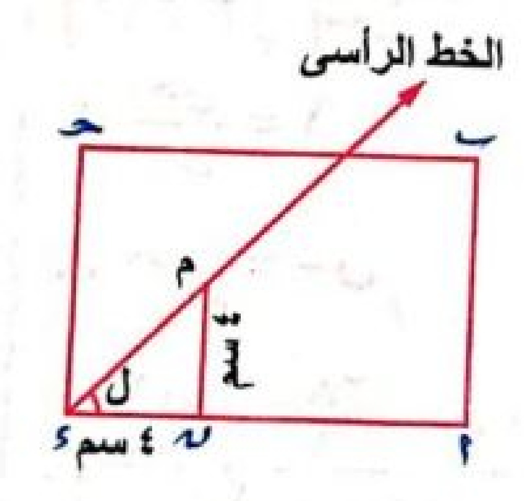
ثانيًا : التعليق من ء : من Δ م ن ء :



طا ل = $\frac{م ن}{ن ء} = \frac{٤}{٤} = ١$ ∴ ل = ٤٥°

∴ الخط الرأسى المار بنقطة التعليق ء ينصف ∠ أ ء حـ

(المطلوب ثانيًا)



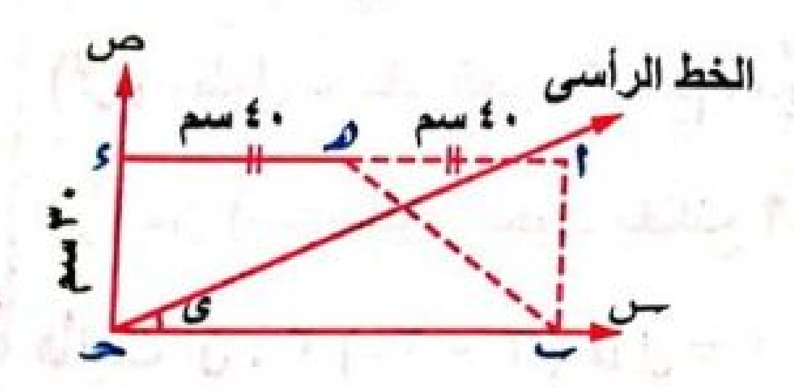
مثال ٧

صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ك على شكل مستطيل أ ب حـ ء الذى فيه :

أ ب = ٣٠ سم ، ب حـ = ٨٠ سم ، قُطع منها المثلث أ ب هـ حيث هـ منتصف $\overline{أ ء}$ ، ثم عُلق الجزء الباقى تعليقًا حُرًا من الرأس حـ عيِّن قياس زاوية ميل الضلع $\overline{حـ ب}$ على الرأسى فى وضع الاتزان. ثم أوجد الكتلة التى يجب وضعها عند الرأس ء حتى يميل $\overline{ب حـ}$ بزاوية ٤٥° مع الرأسى فى وضع التوازن.

الحـل

أولاً : إيجاد قياس زاوية ميل الضلع $\overline{حـ ب}$ على الرأسى :



$\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب هـ}}{\text{مساحة المستطيل أ ب حـ ء}} = \frac{\frac{١}{٢} \times ٣٠ \times ٤٠}{٣٠ \times ٨٠} = \frac{١}{٤}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

، ∵ كتلة المستطيل أ ب حـ ء = ك ، كتلة Δ أ ب هـ = $-\frac{1}{4}$ ك

، ∵ نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب هـ = $\left(\frac{٨٠ + ٨٠ + ٤٠}{٣} ، \frac{٠ + ٣٠ + ٣٠}{٣}\right) = \left(\frac{٢٠٠}{٣} ، ٢٠\right)$

نكوِّن جدول إحداثيات الكتل :

	المستطيل	المثلث
الكتلة	ك	$-\frac{1}{4}$ ك
س	٤٠	$\frac{٢٠٠}{٣}$
ص	١٥	٢٠

$$\therefore س_م = \frac{ك \times ٤٠ - \frac{1}{4} ك \times \frac{٢٠٠}{٣}}{ك - \frac{1}{4} ك} = \frac{٢٨٠}{٩}$$

$$ص_م = \frac{ك \times ١٥ - \frac{ك}{4} \times ٢٠}{ك - \frac{1}{4} ك} = \frac{٤٠}{٣}$$

$$طا ى = \frac{ص_م}{س_م} = \frac{٤٠}{٣} \div \frac{٢٨٠}{٩} = \frac{٣}{٧} \qquad \therefore ق(\angle ى) = ٢٣° ١٢َ$$

ثانيًا : عند وضع كتلة $ك_١$ عند ء حتى يصبح ميل $\overline{ب حـ}$ على الرأسى بزاوية ٤٥° فى وضع التوازن :

$$\therefore طا ى = \frac{ص}{س} \qquad \therefore طا ٤٥° = \frac{ص}{س}$$

$$\therefore \frac{ص}{س} = ١ \qquad \therefore ص = س$$

$$\therefore ص_م = س_م$$

	الجزء المتبقى	عند ء
الكتلة	$\frac{٣}{٤}$ ك	$ك_١$
س	$\frac{٢٨٠}{٩}$	٠
ص	$\frac{٤٠}{٣}$	٣٠

$$\therefore \frac{\frac{٣}{٤} ك \times \frac{٢٨٠}{٩} + ك_١ \times ٠}{\frac{٣}{٤} ك + ك_١} = \frac{\frac{٣}{٤} ك \times \frac{٤٠}{٣} + ك_١ \times ٣٠}{\frac{٣}{٤} ك + ك_١}$$

$$\therefore \frac{٧٠}{٣} ك = ١٠ ك + ٣٠ ك_١ \qquad \therefore \frac{٤٠}{٣} ك = ٣٠ ك_١ \qquad \therefore ك_١ = \frac{٤}{٩} ك$$

مثال ٨

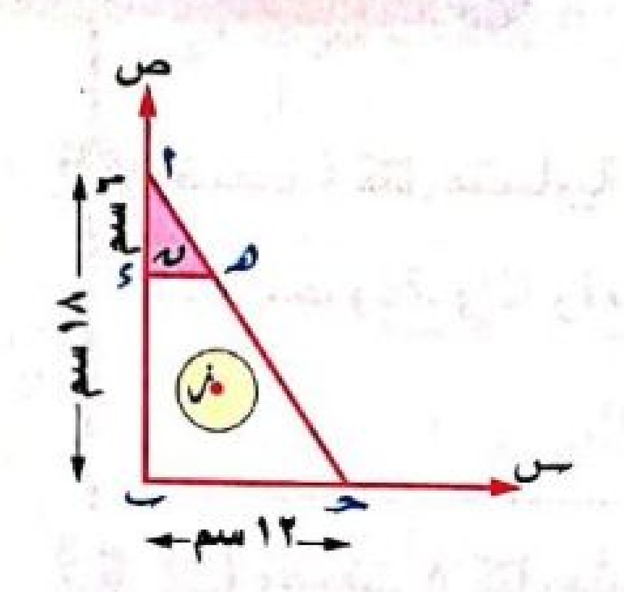
صفيحة رقيقة منتظمة على شكل المثلث أ ب حـ الذى مركزه الهندسى (ن) وقائم الزاوية فى ب وفيه : أ ب = ١٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، ء نقطة على الحرف $\overline{أ ب}$ بحيث : أ ء = ٦ سم ثم رسم $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب حـ}$ ويلاقى $\overline{أ حـ}$ فى هـ. فإذا فصل Δ أ ء هـ كما فصل قرص دائرى مركزه (ن) وطول نصف قطره ٢ سم فعيِّن مركز ثقل الجزء الباقى ، ثم إذا عُلق الجزء الباقى تعليقًا حُرًا من (ب) فاتزن بحيث يصنع $\overline{أ ب}$ مع الرأسى زاوية (ل)

فأثبت أن : ٣ (٢٠ – π) طا ل = ٢ (٢٦ – π)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحـل

أولًا : تعيين مركز ثقل الجزء الباقى :



∵ $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$ ∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{ءهـ}{بحـ}$

∴ $\frac{٦}{١٨} = \frac{ءهـ}{١٢}$ ∴ ءهـ = ٤ سم

ولكن المساحات تتناسب مع الكتل

∴ كتلة Δ أبحـ : كتلة Δ أءهـ : كتلة القرص ن

$= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٨ : \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٦ : \pi (٢)^٢$

$= ٢٧ : ٣ : \pi$

ونختار $\overleftarrow{بس}$ ، $\overleftarrow{بص}$ اتجاهين متعامدين

، ∵ نقطة تلاقى متوسطات Δ أبحـ هى ن $= \left(\frac{١٢ + ٠ + ٠}{٣} ، \frac{١٨ + ٠ + ٠}{٣}\right) = (٤ ، ٦)$

، ∵ نقطة تلاقى متوسطات Δ أءهـ هى د $= \left(\frac{٤ + ٠ + ٠}{٣} ، \frac{١٨ + ١٢ + ١٢}{٣}\right) = \left(١\frac{١}{٣} ، ١٤\right)$

ونكوّن الجدول الآتى :

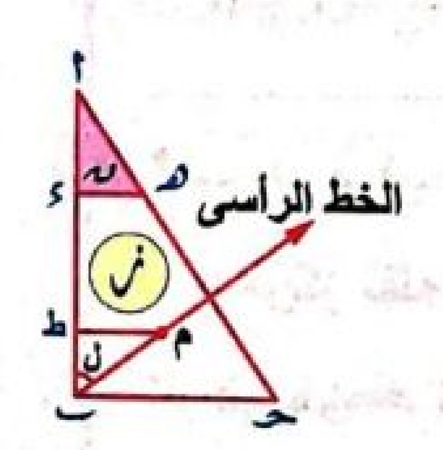
	عند د	عند ن	عند ن
الكتلة	-٣ ك	- π ك	٢٧ ك
س	$١\frac{١}{٣}$	٤	٤
ص	١٤	٦	٦

∴ $س_م = \frac{-٣ ك \times ١\frac{١}{٣} - \pi ك \times ٤ + ٢٧ ك \times ٤}{-٣ ك - \pi ك + ٢٧ ك} = \frac{١٠٤ - ٤ \pi}{٢٤ - \pi}$

، $ص_م = \frac{-٣ ك \times ١٤ - \pi ك \times ٦ + ٢٧ ك \times ٦}{-٣ ك - \pi ك + ٢٧ ك} = \frac{١٢٠ - ٦ \pi}{٢٤ - \pi}$

∴ مركز الثقل هو النقطة م $= \left(\frac{١٠٤ - ٤ \pi}{٢٤ - \pi} ، \frac{١٢٠ - ٦ \pi}{٢٤ - \pi}\right)$

ثانيًا : إيجاد ظل زاوية ميل $\overline{أب}$ على الرأسى :



فى Δ م ط ب : ظا ل $= \frac{م ط}{ط ب}$

ولكن م ط $= \frac{١٠٤ - ٤ \pi}{٢٤ - \pi} = \frac{٤ (٢٦ - \pi)}{٢٤ - \pi}$

، ط ب $= \frac{١٢٠ - ٦ \pi}{٢٤ - \pi} = \frac{٦ (٢٠ - \pi)}{٢٤ - \pi}$ ∴ ظا ل $= \frac{٢ (٢٦ - \pi)}{٣ (٢٠ - \pi)}$

∴ ٣ (٢٠ − π) ظا ل = ٢ (٢٦ − π)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



على طريقة الكتلة السالبة



من أسئلة الكتاب المدرسى

١ وضعت ٤ كتل متساوية عند الرؤوس أ ، ب ، حـ ، ء لمربع طول ضلعه ١٠ سم عيِّن مركز ثقل هذه المجموعة. وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند أ فعيِّن مركز ثقل المجموعة المتبقية.

«(٥ ، ٥) ، $\left(3\frac{1}{3} ، 3\frac{1}{3}\right)$ باعتبار $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ محورى إحداثيات موجبين»

---

٢ 📖 وضعت ٥ كتل متساوية عند الرؤوس أ ، ب ، حـ ، ء لمربع أ ب حـ ء ، النقطة هـ حيث هـ ملتقى قطريه وطول ضلع المربع ١٢ سم. عيِّن مركز ثقل المجموعة وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فعيِّن مركز ثقل المجموعة المتبقية بالنسبة للمحورين $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$

«(٦ ، ٦) ، $\left(7\frac{1}{2} ، 4\frac{1}{2}\right)$»

---

٣ وضعت ٣ كتل متساوية عند الرؤوس أ ، ب ، حـ للمثلث أ ب حـ المتساوى الأضلاع والذى طول ضلعه ١٨ سم عيِّن مركز ثقل المجموعة. وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فعيِّن مركز ثقل المجموعة المتبقية.

«(٩ ، $3\sqrt{3}$) ، $\left(\frac{9}{2} ، \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$ باعتبار $\overleftarrow{حـ ب}$ والعمودى عليه من حـ محورى إحداثيات موجبين»

---

٤ 📖 أ ب حـ مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، ء نقطة منتصف $\overline{ب حـ}$ ، ثبت كتل مقاديرها ١٥ ، ٣٠ ، ٧٥ ، ٤٥ ، ٤٥ فى النقطة أ ، ب ، ء ، حـ ، م على الترتيب. عيِّن مركز ثقل هذه المجموعة. وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فأين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية ؟

«$\left(\frac{65}{7} ، \frac{10\sqrt{3}}{7}\right)$ ، $\left(\frac{15}{2} ، \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$ باعتبار $\overleftarrow{حـ ب}$ والعمودى عليه من حـ محورى إحداثيات موجبين»

---

٥ أ ب حـ صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٨ سم ، م مركز ثقله أقتطع منه المثلث م ب حـ عيِّن مركز ثقل الجزء المتبقى وإذا عُلق الجزء الباقى من حـ تعليقًا حُرًا. فأوجد ظل زاوية ميل $\overline{حـ ب}$ على الرأسى.

«(٩ ، $4\sqrt{3}$) باعتبار $\overleftarrow{حـ ب}$ والعمودى عليه من حـ محورى إحداثيات موجبين ، ظا ل = $\frac{4\sqrt{3}}{9}$»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٦) صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمستطيل أ ب حـ ء حيث :
أ ب = ٣٠ سم ، ب حـ = ٦٠ سم ، هـ منتصف $\overline{أء}$ ، ن منتصف $\overline{ءحـ}$ ، فإذا فُصل المثلث هـ ء ن من الصفيحة وعُلق الجزء الباقى تعليقًا حُرًا من النقطة ب فأوجد فى وضع التوازن ظل الزاوية التى يصنعها $\overline{ب حـ}$ مع الرأسى. «$\frac{1}{2}$»

(٧) أ ب حـ ء صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل فيه : أ ب = ٤٠ سم ، ب حـ = ٦٠ سم ، هـ منتصف $\overline{أء}$ ، قطع منها المثلث أ ب هـ ثم عُلق الجزء الباقى تعليقًا حُرًا من الرأس حـ عيِّن ظل زاوية ميل $\overline{حـ ب}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

(٨) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على هيئة المستطيل أ ب حـ ء فيه : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٨ سم. نصف $\overline{أ ب}$ فى هـ ، فرضت نقطة (و) ∈ $\overline{أء}$ بحيث : أ و = ١٢ سم ثم فصل Δ أ هـ و عيِّن مركز ثقل الجزء الباقى بالنسبة للمحورين $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ب}$ ثم إذا عُلق الجزء الباقى تعليقًا حُرًا من حـ فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل $\overline{حـ ب}$ على الرأسى. «(٨ ، ٥,٢) ، ل = ١ ٣٣°»

(٩) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على هيئة المستطيل أ ب حـ ء فيه : أ ب = ١٦ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ، هـ ∈ $\overline{أء}$ بحيث أ هـ = ١٨ سم ، فصل Δ أ ب هـ أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقى من الصفيحة عن كل من $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{حـ ب}$ وإذا عُلق هذا الجزء الباقى تعليقًا حُرًا من (ء) فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل $\overline{ءحـ}$ على الرأسى.
«٨,٤ سم ، ٦,٤ سم ، ١١ ٤١°»

(١٠) لوح رقيق دائرى منتظم الكثافة مساحته ٥٠٠ سم². ثُقب ثُقبًا دائريًا مساحته ١٠٠ سم² فإذا كان بُعد مركز الثقب عن مركز اللوح ٤ سم فعيِّن أين يقع مركز ثقل الجزء المتبقى من اللوح. «على خط المركزين وعلى بُعد ١ سم من مركز اللوح»

(١١) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل قرص دائرى طول نصف قطره ٣٠ سم. اقتطع منها جزء على شكل قرص دائرى طول نصف قطره ١٠ سم ويبعد مركزه عن مركز الصفيحة ٢٠ سم. أوجد مركز ثقل الجزء المتبقى. «على خط المركزين ويبعد ٢,٥ سم من مركز القرص الأصلى»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٢ قرص مصمت طول نصف قطره ٣ سم عملت به فجوة على شكل دائرة طول نصف قطرها ١ سم وتمس سطح القرص فى نقطة (ء) أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقى من القرص عن نقطة ء ثم إذا عُلق الجزء الباقى تعليقًا حُرًا من نهاية قطر القرص العمودى على خط المركزين. فأوجد فى وضع التوازن ظل زاوية ميل المستقيم الواصل بين نقطة التعليق ومركز القرص على الرأسى. «$٣\frac{١}{٤}$ سم عن ء ، ظا ل = $\frac{١}{١٢}$»

---

١٣ قطعة من الورق المقوى رقيقة ومنتظمة الكثافة على شكل المربع أ ب حـ ء تقاطع قطراه فى (هـ) وفصل Δ أ ء هـ وثبت فوق Δ أ ب هـ ثم عُلق الشكل الناتج من (حـ) تعليقًا حُرًا أثبت فى وضع التوازن أن حـ ء يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٢٨َ ٥٤°

---

١٤ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل المربع أ ب حـ ء تتقاطع قطراه فى هـ ثم فصل المثلث هـ حـ ء وثبت فوق المثلث هـ أ ب وعُلق الشكل الناتج تعليقًا حُرًا من نقطة أ ، أوجد فى وضع الاتزان قياس زاوية ميل أب على الرأسى. «٤١َ ٣٣°»

---

١٥ 📖 أ ب حـ صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على هيئة مثلث قائم الزاوية فى ب حيث : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٢٠ سم وكانت س ، ص ، ع منتصفات أ ب ، ب حـ ، حـ أ على الترتيب. قطع المثلث حـ ص ع وطبق على المثلث ص ب س فإذا عُلقت المجموعة تعليقًا حُرًا من النقطة ب أوجد ظل زاوية ميل ب حـ على الرأسى فى وضع الاتزان. «$\frac{٢٤}{٢٥}$»

---

١٦ 📖 صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مربع أ ب حـ ء طول ضلعه ٣٦ سم ، تقاطع قطراه فى م ونصفت ء م فى نقطة هـ وفصل منها المثلث هـ أ ء عيِّن مركز ثقل الجزء الباقى من الصفيحة. وإذا عُلقت الصفيحة تعليقًا خالصًا من نقطة أ حتى اتزنت فى مستوى رأسى. فأوجد ميل أب على الرأسى. «$\frac{٤١}{٤٧}$»

---

١٧ أ ب حـ ء صفيحة على هيئة مربع طول ضلعه ٧٨ سم ، هـ نقطة على حـ ء بحيث : ء هـ = ٢٦ سم. إذا قطع المثلث أ ء هـ ثم عُلق الجزء الباقى تعليقًا حُرًا من أ ، فبرهن على أن الرأس المار بنقطة أ يقطع ب حـ فى نقطة و حيث : حـ و = ١٥ سم.

---

١٨ صفيحة رقيقة مستوية منتظمة الكثافة على شكل المعين أ ب حـ ء الذى طول ضلعه ١٨ سم وفيه : ق (∠ ب أ ء) = ١٢٠° فصل منها Δ ب أ ن حيث ن نقطة تلاقى قطريه برهن أن مركز ثقل الجزء الباقى يبعد عن ن بمقدار ٢ سم. وإذا عُلق الجزء الباقى من (أ) تعليقًا حُرًا فبرهن فى وضع التوازن أن أ ن يميل على الرأسى بزاوية قياسها (ل) حيث ١٠ ظا ل = $\sqrt{٣}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٩ صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل أ ب حـ ء فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، قُطعت منها قطعة مربعة الشكل من الرأس ب طول ضلعها ٤ سم ، أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقى عن كل من حـ ء ، حـ ب ثم إذا عُلق الجزء الباقى تعليقًا حُرًا من الرأسى حـ فأوجد فى وضع التوازن ظل زاوية ميل حـ ب على الرأسى.

«٣ سم ، $\frac{1}{2}$٣ سم ، $\frac{7}{6}$»

---

٢٠ (دور أول ٢٠١٨) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل فيه :

أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٨ سم فإذا كان ل ، هـ منتصفى ب حـ ، حـ ء على الترتيب ، أ حـ ∩ ب ء = {ن}

وفصل المستطيل ن ل حـ هـ من الصفيحة.

فعين بعد مركز ثقل الجزء المتبقى عن أ ب ، أ ء

وإذا علقت الصفيحة تعليقًا حرًا من أ

فأوجد ظل زاوية ميل أ ب على الرأسى فى وضع الاتزان. «$\frac{2}{3}$»

---

٢١ صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على شكل مستطيل أ ب حـ ء مركزه م حيث : أ ب = ١٦ سم ، ب حـ = ٢٠ سم. أخذت النقطتان هـ ، و على أ ب حيث : أ هـ = ب و = ٣ سم ، إذا قُطع المثلث م هـ و فأوجد بعد مركز ثقل الجزء الباقى عن كل من حـ ء ، أ ء وإذا عُلق هذا الجزء تعليقًا حُرًا من ء فأوجد فى وضع التوازن ظل الزاوية التى يصنعها ء حـ مع الرأسى. «($\frac{710}{81}$ ، ٨) ، $\frac{355}{324}$»

---

٢٢ قطعة رقيقة منتظمة الكثافة من الورق المقوى على شكل المربع أ ب حـ ء الذى طول ضلعه ١٨ سم تقاطع قطراه فى (ن) ثم فصل Δ ن ب حـ وعُلق الجزء الباقى من نقطة (هـ) حيث هـ ∈ أ ب فاتزن بحيث كان أ ب أفقيًا. أوجد طول : أ هـ «٧ سم»

---

٢٣ صفيحة منتظمة على شكل مربع أ ب حـ ء طول ضلعه ٨ سم ، فصل منها قرص دائرى طول نصف قطره ٢ سم ويبعد مركزه ٣ سم عن كل من أ ب ، ب حـ عيِّن بُعد مركز ثقل الجزء الباقى عن كل من ء حـ ، أ ء «٣,٧٦ سم ، ٣,٧٦ سم»

٢٤ صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمربع أ ب جـ د الذى طول ضلعه ٤٠ سم ، ثُقبت ثُقبًا دائريا مساحته ١٠٠ سم^{٢} ومركزه عند نقطة على القطر ب د وتقسمه بنسبة ١ : ٤ من ناحية ب ، ثم عُلقت تعليقًا حُرًا من الرأس أ عيِّن قياس زاوية ميل الضلع أ ب على الرأسى فى وضع الاتزان. «١٧ ٤٧°»

٢٥ صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على شكل المثلث أ ب جـ المتساوى الساقين حيث : أ ب = أ جـ = ٢٦ سم ، ب جـ = ٢٠ سم. رسم أ د ⊥ ب جـ ويقطع ب جـ فى د ، فإذا كانت هـ منتصف أ د وفصل المثلث هـ ب جـ أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقى عن النقطة هـ «صفر»

٢٦ صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الساقين أ ب جـ فيه : أ ب = أ جـ ، أ د هو ارتفاع المثلث وطوله ٤٥ سم رُسم مستقيم موازٍ للقاعدة ب جـ ويمر بمركز ثقل الصفيحة فقطع أ ب ، أ جـ فى النقطتين هـ ، و على الترتيب. أثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعى هـ ب جـ و يقع على أ د ويبعد ٧ سم عن نقطة د

٢٧ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بالمثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ب جـ = ٩ سم. إذا فصل المثلث أ ب م ، حيث م مركز ثقل الصفيحة ، عُلق الجزء الباقى تعليقًا حُرًا من النقطة ب فأوجد ظل زاوية ميل ب جـ على الرأسى فى وضع التوازن. «$\frac{٥}{٨}$»

٢٨ فى الشكل المقابل :

صفيحة منتظمة محدودة بمربع طول ضلعه ٦ سم قُسمت إلى تسعة مربعات متطابقة

فاختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

ل	ك	ط
ح	هـ	د
جـ	ب	أ

(المحوران: و ، س ، ص)

أولًا : بعد قطع المربع (هـ) يكون مركز الثقل هو ....

(أ) (٢ ، ٢)　(ب) (١ ، ١)　(جـ) (٦ ، ٦)　(د) (٣ ، ٣)

ثانيًا : بعد قطع المربعين (جـ ، ل) يكون مركز الثقل هو ....

(أ) (١ ، ١)　(ب) (١ ، ٢)　(جـ) $\left(\frac{١٧}{٧} ، ٣\right)$　(د) (٢ ، ١)

ثالثًا : بعد قطع المربع (هـ) ولصقه على المربع (ب) يكون مركز الثقل هو ....

(أ) $\left(٣ ، \frac{٢٥}{٩}\right)$　(ب) $\left(٣ ، \frac{٢٩}{٩}\right)$　(جـ) (٣ ، ٢)　(د) $\left(\frac{٢٥}{٩} ، ٣\right)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جسم مكوّن من أسطوانة مصمتة نصف قطرها نق وارتفاعها نق ويعلوها نصف كرة نصف قطرها نق فإن مركز ثقل الجسم يكون ....

(أ) داخل الأسطوانة.

(ب) داخل نصف الكرة.

(جـ) على السطح بين الأسطوانة ونصف الكرة.

(د) خارج كليهما.

② كرتان مصمتتان متماستان من الخارج وطولا نصفى قطريهما ٦ سم ، ٣ سم مركز ثقل الجسم الناشئ عند تماسهما يبعد عن مركز الكرة الكبرى مسافة ....

(أ) ١ سم. (ب) ٢ سم. (جـ) ٣ سم. (د) ٤ سم.

③ سلك منتظم الكثافة على شكل دائرة معادلتها : $س^2 + ص^2 = ٣٦$ مُثبت فيه ثقلين كلًا منهما يساوى وزن السلك عند النقطتين (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٦)

فإن مركز ثقل المجموعة هو ....

(أ) (٣ ، ٣) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٦ ، ٦)

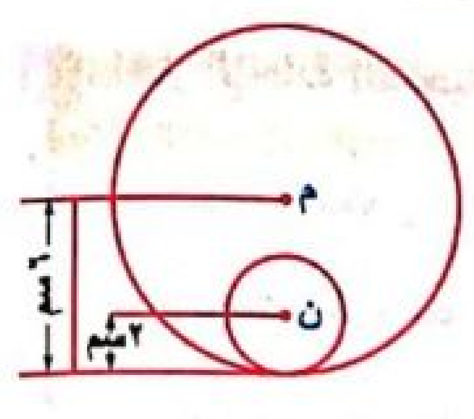
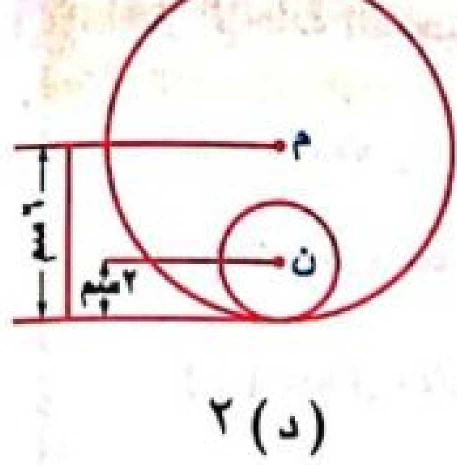
④ صفيحة معدنية منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع أ ب حـ طول ضلعه $٨\sqrt{٣}$ سم قطع منها قرص دائرى طول نصف قطره يساوى ٤ سم فإن بعد مركز ثقل الجزء الباقى عن الرأس أ يساوى .... سم

(أ) ٤ (ب) $٤\sqrt{٣}$ (جـ) ٨ (د) ٦

⑤ الشكل المقابل يبين قرص دائرى مركزه م ، ثقب ثقبان دائريان مركزاهما $م_1$ ، $م_2$ وطولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٢ سم على الترتيب ، فإن مركز ثقل الجزء المتبقى من الشكل يقع على ....

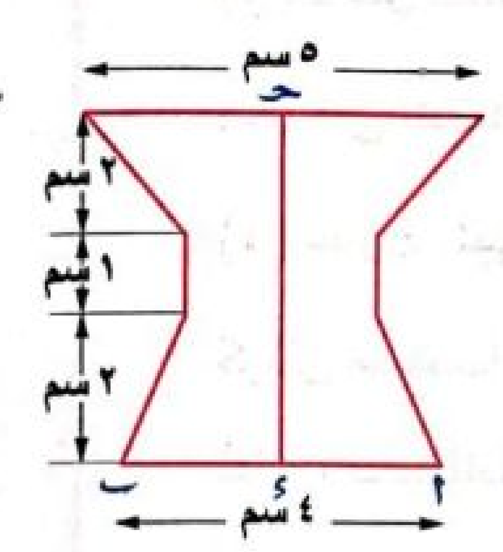
(أ) $\overline{م م_1}$ (ب) $\overline{م م_2}$ (جـ) $\overline{أ م_1}$ (د) $\overline{ب م_2}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑥ الشكل المقابل يمثل قرص دائرى منتظم من الصاج الرقيق ، طول نصف قطره ٦ سم ومركزه م ، فصل منه قرص دائرى مركزه ن ، طول نصف قطره ٢ سم ، فإن مركز ثقل الجزء الباقى يبعد عن م مسافة = ... سم.

(أ) ٠,٤ (ب) ٠,٥ (جـ) ١ (د) ٢



⑦ الشكل المقابل يمثل صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة و متماثلة حول المحور $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ، فإذا كانت الأبعاد كما بالرسم ، ورمز لبُعد مركز ثقل الصفيحة عن $\overline{أب}$ بالرمز ل سم فإن أى مما يأتى صحيحًا ؟

(أ) ل = ٢ (ب) ٢ < ل < $٢\frac{١}{٢}$

(جـ) ل = $٢\frac{١}{٢}$ (د) $٢\frac{١}{٢}$ < ل < ٤

٣٠ صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على شكل قرص دائرى مركزه نقطة الأصل وطول نصف قطره ٢٤ سم ، قُطع منه قرصان دائريان مركز أحدهما (−٢ ، −١٢) وطول نصف قطره ٤ سم ومركز الآخر (٦ ، ١٠) وطول نصف قطره ١٢ سم.
عيِّن مركز ثقل الجزء الباقى من القرص. «(−٢ ، −٣)»

٣١ صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على شكل قرص دائرى مركزه نقطة الأصل وطول نصف قطره ٦ وحدات طول ، قُطع منه قرصان دائريان مركز أحدهما (−١ ، −٣) وطول نصف قطره وحدة طول واحدة ومركز الآخر (١ ، ٢) وطول نصف قطره ٣ وحدات طول. أوجد مركز ثقل الجزء الباقى من القرص الأصلى. «($\frac{-٤}{١٣}$ ، $\frac{-١٥}{٢٦}$)»

٣٢ سلك منتظم طوله ١٠٠ سم ثنى على هيئة خمسة أضلاع من مسدس منتظم أ ب جـ ء هـ و بدأ من نقطة أ عيِّن بُعد مركز ثقله عن مركز المسدس. واذا عُلق السلك تعليقًا حُرًا من طرفه أ فعيِّن قياس زاوية ميل $\overline{أب}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.
«$٢\sqrt{٣}$ سم ، ٥٥° ٤٢َ»

٣٣ صفيحة رقيقة محدودة بمسدس منتظم أ ب جـ ء هـ و فصل عن الصفيحة سطح المثلث أ ب ى حيث ى نقطة تقاطع $\overline{أجـ}$ مع $\overline{بهـ}$ ثم عُلق الجزء الباقى تعليقًا حُرًا من نقطة (و) عيِّن ظل زاوية ميل وأ على الرأسى فى وضع التوازن.
«$\frac{٣٤\sqrt{٣}}{٢٩}$»



مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٣٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① في الشكل المقابل :

صفيحة منتظمة الكثافة على شكل مثلث أ ب ج فيها

أ ب = أ ج ، ب ج = (٢ م) متر ، هـ د // ب ج

إذا كانت أ تبعد عن ب ج مسافة (٩ ل) متر

وتبعد عن هـ د مسافة (٦ ل) متر

أولاً : مركز ثقل شبه المنحرف ب ج هـ د يبعد عن ب ج مسافة تساوى .... متر

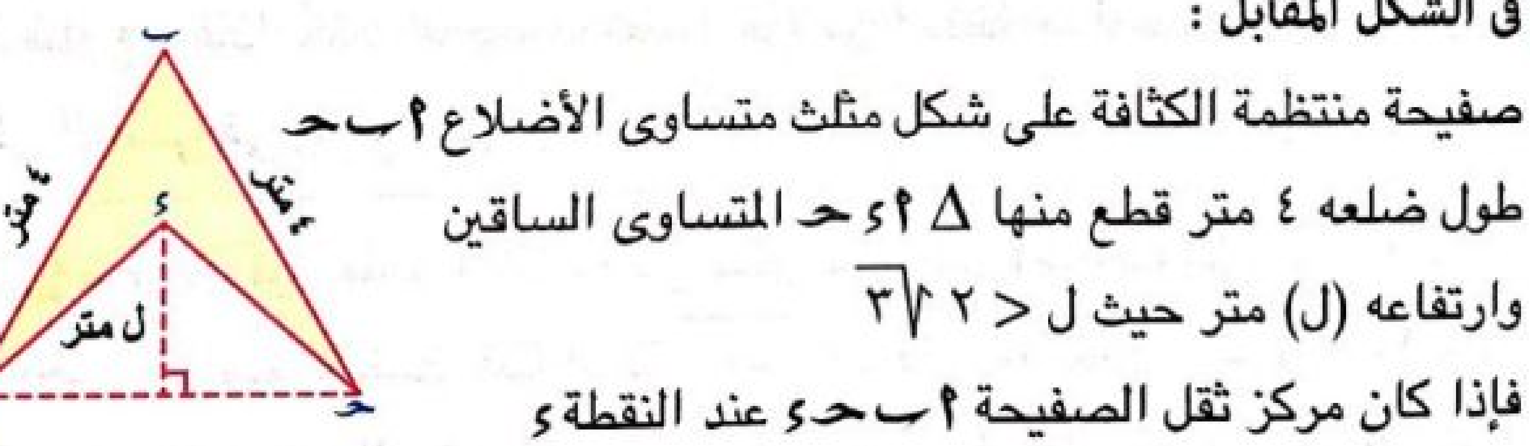
(أ) ل (ب) $\frac{٢}{٣}$ ل (جـ) $\frac{٥}{٣}$ ل (د) $\frac{٧}{٥}$ ل

ثانيًا : إذا طوى Δ أ هـ د حول هـ د بحيث انطبق جزء منه على شبه المنحرف ب ج هـ د كما بالشكل المقابل

فإن مركز ثقل الشكل الناتج يبعد عن ب ج مسافة تساوى .... متر

(أ) $\frac{٧}{٩}$ ل (ب) $\frac{٦}{٥}$ ل (جـ) $\frac{١١}{٩}$ ل (د) ٢ ل

② في الشكل المقابل :



صفيحة منتظمة الكثافة على شكل مثلث متساوى الأضلاع أ ب ج طول ضلعه ٤ متر قطع منها Δ أ د ج المتساوى الساقين وارتفاعه (ل) متر حيث ل < ٢$\sqrt{٣}$

فإذا كان مركز ثقل الصفيحة أ ب ج د عند النقطة د

فإن : ل = ... متر

(أ) ١ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٢$\sqrt{٣}$

٣٥ صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمستطيل أ ب ج د حيث : أ ب = ٣٠ سم ، أ د = ٤٠ سم ، هـ ، و ∈ ب د بحيث : ب و = ١٥ سم ، د هـ = ٧,٥ سم ، ثُقبت الصفيحة ثُقبان دائريان الأول مركزه و ، طول نصف قطره ٧ سم ، الثانى مركزه هـ وطول نصف قطره ٣,٥ سم. عيِّن نقطة على أ ب إذا عُلق منها الجزء الباقى من الصفيحة يكون أ ب أفقيًا وعيِّن نقطة أخرى على أ د بحيث إذا عُلق منها الجزء الباقى من الصفيحة يكون أ د أفقيًا. «(٤٠ ، ١٥,٥) ، (١٩,٣ ، ٣٠) باعتبار ج ب ، ج د محورى إحداثيات موجبين»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣٦ أ ب حـ ء صفيحة منتظمة السُمك والكثافة على شكل مستطيل فيه : أ ب = ١٨ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ، هـ نقطة تقاطع قطرية أ حـ ، ب ء فصل المثلث أ هـ ء وثبت فوق المثلث ب هـ حـ بحيث تنطبق أ على ب ، ء على حـ عيِّن بُعدى مركز ثقل الصفيحة عن أ ب ، ب حـ وإذا عُلقت الصفيحة تعليقًا حُرًا من الرأس حـ فأحسب ظل زاوية ميل حـ ب على الرأسى.

«١٢ سم ، ٦ سم ، $\frac{1}{2}$»

---

٣٧ أ ب حـ ء صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على هيئة مستطيل مركزه (ن) وكتلته (ك) فيه : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٨ سم. قطع Δ ن أ ب ثم ثُبتت فى الجزء الباقى الكتل ك ، ٢ ك ، ٣ ك ، ٤ ك ، $\frac{٧}{٤}$ ك عند النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، ن على الترتيب عيِّن مركز ثقل المجموعة. ثم أثبت أنه إذا عُلقت المجموعة تعليقًا حُرًا من (ء) فإن حـ ء يميل على الرأسى فى وضع الاتزان بزاوية قياسها ٤٥°

«(٦ ، ٦) باعتبار حـ ب ، حـ ء محورى إحداثيات موجبين»

---

٣٨ أ ب حـ ء صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ٤٨ سم وكتلتها ٤٠ جم. النقطتان ل ، م منتصفا أ ب ، أ ء على الترتيب. قطع المثلث أ ل م ثم ثُبتت عند كل من حـ ، ء كتلة تساوى كتلة المثلث المقطوع وثُبت عند ب كتلة تساوى ضعف كتلة المثلث المقطوع ، فإذا عُلقت المجموعة تعليقًا حُرًا من النقطة حـ أوجد ظل زاوية ميل ب حـ على الرأسى فى وضع الاتزان.

« $\frac{٢٥}{٣١}$ »

---

٣٩ 📖 صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل المستطيل أ ب حـ ء الذى فيه : أ ب = ٢٥ سم ، ب حـ = ١٦ سم. فرضت نقطة هـ $\in$ ب حـ ، و $\in$ ب أ بحيث : ب هـ = ١٠ سم ثم فصل Δ ب هـ و ووضعت الصفيحة فى مستوٍ رأسى بحيث انطبق حرفها حـ هـ على نضد أفقى أملس فكانت الصفيحة على وشك الدوران حول (هـ) **أوجد طول : ب و**

«٢٤ سم»

---

٤٠ أ ب حـ ء صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة وزنها ثقل كيلو جرام واحد على شكل مربع طول ضلعه ٦٠ سم ، ط منتصف أ ء ، ن منتصف أ ب ، س منتصف ب حـ ، ثنى المثلث ط أ ن حول ط ن ، وثنى المثلث ن ب س حول ن س حتى لامس سطحاهما سطح باقى الصفيحة ، ثم ثُبت جسيم وزنه ٦٠٠ ث جم فى نقطة ط ، ثُبت جسيم آخر وزنه ٤٠٠ ث جم فى نقطة س ، عيِّن مركز ثقل المجموعة فى وضعها الأخير.

«(٢٨,٧٥ ، ٣٣) باعتبار حـ ب ، حـ ء محورى إحداثيات موجبين»

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاستاتيكا
الرياضيات التطبيقية

الآن بالمكتبات

المعاصر في:

- الديناميكا
- الجبر و الهندسة الفراغية
- التفاضل و التكامل
- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية

يصرف مجانًا مع هذا الكتاب

- المراجعة المستمرة
- الجزء الخاص بالإجابات

عزيز إسحق سرجيوس
حسين جاويش



- أدخل كودك الشخصي الموجود على ظهر الغلاف
- لمزيد من المعلومات انظر صفحتي ٥،٤









مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقي - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤٠١٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com

